[illegible]

Handbuch
der
Mechanik fester Körper
und
der Hydraulik.

Mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Architektur.

Aufgesetzt
von

D. J. A. Eytelwein

Königl. Preuß. Ober-Landes-Baudirektor; Ritter des rothen Adler- und des k. niederländ. Löwenordens; ordentlichem Mitgliede der Akademie der Wissenschaften und des Senats der Akademie der Künste zu Berlin; des National-Instituts der Wissenschaften und Künste zu Amsterdam, der Gesellschaft der Experimental-Philosophie zu Rotterdam, der Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Frankfurt a. d. O., der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg, der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig und Potsdam und der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur Mitgliede.

Zweite Auflage.

Mit 60 Holzschnitten und 5 Kupfertafeln.

Leipzig,
bei H. A. Köchly.
1823.

Vorrede zur ersten Auflage.

Zur richtigen Beurtheilung der Bauanlagen und in den vielen Fällen, wo eigene Erfahrungen nicht hinreichen, bedarf der Baumeister einer Führerin, die er vorzüglich in der Mathematik und Naturkunde findet. Besonders sind es die Resultate einiger Theile der angewandten Mathematik, welche mit seinen Geschäften in naher Verbindung stehen, und es ist zu wünschen, daß, bei dem großen Umfange der Mathematik, für den Architekten dasjenige ausgehoben werde, was ihm zunächst Bedürfniß ist.

Sollen aber mit irgend einer Rücksicht auf Anwendung einzelne Resultate einer Wissenschaft zusammengestellt werden, so muß selbst Unverständlichkeit daraus entstehen, wenn diese Resultate nur trocken zusammengereihet sind, und wenn die zur Ueberzeugung nöthigen Beweise fehlen. Dagegen ist derjenige, welcher sich in der Nothwendigkeit befindet, als Geschäftsmann einzelne Sätze aus der Mathematik und Naturkunde zu benutzen, selten mit denjenigen Kenntnissen ausgerüstet, durch die man nur freien Zutritt in diese Wissenschaften und die erforderliche Ueberzeugung erhalten kann; auch darf sich der Mathematiker noch nicht schmeicheln, von dem größten Theile derjenigen, welche von seinen Untersuchungen Gebrauch machen könnten, verstanden zu werden. Dies ist die Ursache, weshalb in der vorliegenden Schrift die höhere

Analysis im zusammenhängenden Vortrage vermieden ist. Hiedurch entstand eine eigene Schwierigkeit bei der Ausarbeitung dieses Handbuchs, um bei der möglichsten Kürze dennoch nicht den nöthigen Zusammenhang fehlen zu lassen, und die Beweise so vorzutragen, daß sie nicht zu weitläuftige Vorkenntnisse erforderten. In den Noten unter dem Texte sind zwar die vorzüglichsten Lehren mit Hülfe der höhern Analysis auseinander gesetzt, um auch den kleinern Theil, welcher mit dieser Rechnungsart bekannt ist, nicht unbefriedigt zu lassen; es war aber auch hiebei nöthig, gewisse Grenzen nicht zu überschreiten.

Nach dieser Absicht wird sich über den Plan, welcher bei Bearbeitung des Handbuchs befolgt ist, urtheilen lassen. Die meisten Schwierigkeiten entstanden in der Hydraulik daher, daß dieselbe nicht nur eine ausgebreitete Theorie als Grundlage erfordert, die hier nicht vorausgesetzt, noch weniger vollständig vorgetragen werden konnte, und daß noch weit mehr, eine Menge Erfahrungen nöthig sind, die bis jetzt noch größtentheils fehlen, um diese Wissenschaft vollständig und überzeugend abzuhandeln. Aus dieser letzten Ursache sind einige Lehren, welche wohl zur Hydraulik gehörten, gänzlich weggeblieben, bis Theorie und Erfahrung darüber näher entscheiden; bei andern aber hat man sich solche Darstellungen erlaubt, die, wenn sie auch nicht die Erfordernisse eines mathematischen Beweises haben, dennoch so lange als Annäherungen dienen können, bis vollständige Erfahrungen aller Art, neue Gesichtspunkte zu einer gründlichen Theorie aufstellen.

Der angegebene Endzweck erforderte, die allgemeinen Formeln zur Berechnung irgend eines Erfolgs bei vorkommenden Gegenständen so viel wie möglich zu vereinfachen, weil sie sonst ihre Brauch-

barkeit verlieren, da es bekannt genug ist, daß sehr oft eine Anlage lieber auf Gerathewohl ausgeführt wird, um nur der großen Beschwerde — einer weitläuftigen Berechnung, zu entgehen. Ohne hieraus zu folgern, daß strengere Untersuchungen überflüssig, oder höhere Analysis eine dem forschenden Baumeister ganz entbehrliche Wissenschaft sei, so mußte doch auf die größte Anzahl derjenigen, welche mit derselben nicht vertraut sind, Rücksicht genommen werden. Zur Versinnlichung der allgemeinen Sätze sind, so weit es ohne Weitläuftigkeit zulässig war, Beyspiele in Zahlen gegeben, und theils zur Vergleichung, theils zur Erweiterung der vorgetragenen Lehren, die vorzüglichsten hierher gehörigen Schriften angeführt. Unter den zur Erläuterung gegebenen Beispielen sind einige, welche schon von mir der Uebersetzung von du Buat's Hydraulik beigefügt waren, und da solche ebenfalls in Kosmann's Hydraulik vorkommen, so wird dieses zu keiner Mißdeutung Anlaß geben.

Statik und Hydrostatik sind durchgängig als bekannt vorausgesetzt worden, und wenn in der Hydraulik von der Kraft zur Bewegung einer Maschine die Rede ist, so bezieht sich solche vorzüglich nur auf diejenigen Hindernisse, welche das Wasser der Bewegung entgegensetzt, weil die übrigen Untersuchungen in die Maschinenlehre gehören, welche auf die Hydraulik folgen soll.

Was die abgehandelten Materien selbst betrift, so erforderten einige Lehren der Mechanik fester Körper, in Hinsicht auf Hydraulik und Maschinenlehre, eine weitere Ausführung, wozu gewöhnlich die höhere Analysis nöthig ist. Indessen war man bemüht, diese Lehren, auch selbst bei den Momenten der Trägheit, größtentheils mit Hülfe der Elementaranalysis auszuführen. Der Vortrag über die Bewegung des Wassers ist auf die Versuche

der vorzüglichsten Hydrauliker, so weit solche hinreichend waren, gegründet, auch sind an mehrern Orten meine eigenen, mit aller möglichen Sorgfalt angestellten Versuche beigefügt worden. Dem Kenner werden hoffentlich mehrere neue Ansichten nicht entgehen, wohin besonders die Untersuchung über die Wassermenge bei der archimedischen Wasserschnecke gerechnet werden kann, deren Windungen man zeither als sehr enge Röhren betrachtete. Die Spiralpumpe, die man noch in den Lehrbüchern vermißt, schien mir einer besondern, auch dem Anfänger möglichst verständlichen Bearbeitung werth zu seyn. Mein ganzer Endzweck ist erreicht, wenn ich einen kleinen Beitrag liefere, dem Baumeister die Nothwendigkeit und den Nutzen der mathematischen Wissenschaften recht einleuchtend zu machen.

Noch ist zu bemerken, daß sich alle Maße, wenn nichts dabei erinnert ist, auf das bei uns eingeführte rheinländische oder preußische Fußmaß beziehen.

Berlin im Januar 1800.

J. A. E.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Mit Ausnahme einiger Zusätze und Abänderungen, ist diese zweite Auflage mit Rücksicht auf den vorgesetzten Zweck unverändert geblieben; auch sind die Druckfehler der ersten Auflage verbessert worden.

Berlin im Juny 1822.

J. A. E.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Die Mechanik fester Körper.

Einleitung.

III. Kap. Von der Bahn geworfener Körper.

IV. Kap. Von den Wirkungen der Kräfte.

V. Kap. Vom Stoße der Körper.

VI. Kap. Vom freien Falle schwerer Körper auf einer schiefen Ebene.

VII. Kap. Von der Kreisbewegung.

VIII. Kap. Vom Pendel.

Zweite Abtheilung.

Die Hydraulik.

Einleitung.

I. Kap. Von der Bewegung des Wassers beim Ausflusse aus Behältern, und von der Zusammenziehung des Wasserstrahls.

II. Kap. Vom Ausflusse des Wassers durch horizontale und kleine Seitenöfnungen eines beständig voll erhaltenen Gefäßes.

X. Kap. Von den springenden Strahlen.

XI. Kap. Vom Stoße oder hydraulischen Druck des Wassers.

XII. Kap. Von den oberschlächtigen Wasserrädern.

XIII. Kap. Von den unterschlächtigen Wasserrädern.

XIV. Kap. Von den Eigenschaften der Luft in Bezug auf hydraulische Maschinen.

XV. Kap. Von den Hebern.

XVI. Kap. Von den Saugpumpen.

XVII. Kap. Von den Druckpumpen.

XVIII. Kap. Von den vereinigten Saug- und Druckpumpen.

XIX. Kap. Von der Wassersäulenmaschine.

XX. Kap. Von der Spiralpumpe.

XXI. Kap. Von der archimedischen Wasserschnecke und der Wasserschraube.

XXII. Kap. Von den Schöpf- und Wurfrädern.

XXIII. Kap. Von den Schaufel- und Paternosterwerken.

XXIV. Kap. Von den Stromgeschwindigkeitsmessern.

Tafel über die Geschwindigkeit frei fallender Körper.

T a f e l

für

die Geschwindigkeiten

elche ein Körper durch den freien Fall erlangt,

im preußischen Fußmaße.

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
R.	F.	Z.	L.	Fuß	Fuß.	R.	F.	Z.	L.	Fuß.	Fuß.
			2	0,001	0,2500			6	7	0,046	1,6956
			3	0,002	0,3536			6	9	0,047	1,7139
			5	0,003	0,4330			6	11	0,048	1,7321
			7	0,004	0,5000			7	1	0,049	1,7500
			9	0,005	0,5590			7	2	0,050	1,7678
			10	0,006	0,6124			7	4	0,051	1,7854
		1	0	0,007	0,6614			7	6	0,052	1,8028
		1	2	0,008	0,7071			7	8	0,053	1,8200
		1	4	0,009	0,7500			7	9	0,054	1,8371
		1	5	0,010	0,7906			7	11	0,055	1,8540
		1	7	0,011	0,8292			8	1	0,056	1,8708
		1	9	0,012	0,8660			8	2	0,057	1,8875
		1	10	0,013	0,9014			8	4	0,058	1,9039
		2	0	0,014	0,9354			8	6	0,059	1,9203
		2	2	0,015	0,9682			8	8	0,060	1,9365
		2	4	0,016	1,0000			8	9	0,061	1,9526
		2	5	0,017	1,0308			8	11	0,062	1,9685
		2	7	0,018	1,0607			9	1	0,063	1,9843
		2	9	0,019	1,0897			9	3	0,064	2,0000
		2	11	0,020	1,1180			9	4	0,065	2,0156
		3	0	0,021	1,1456			9	6	0,066	2,0310
		3	2	0,022	1,1726			9	8	0,067	2,0463
		3	4	0,023	1,1990			9	10	0,068	2,0616
		3	5	0,024	1,2247			9	11	0,069	2,0767
		3	7	0,025	1,2500			10	1	0,070	2,0917
		3	9	0,026	1,2748			10	3	0,071	2,1065
		3	11	0,027	1,2990			10	4	0,072	2,1213
		4	0	0,028	1,3229			10	6	0,073	2,1360
		4	2	0,029	1,3463			10	8	0,074	2,1506
		4	4	0,030	1,3693			10	10	0,075	2,1651
		4	6	0,031	1,3919			10	11	0,076	2,1794
		4	7	0,032	1,4142			11	1	0,077	2,1937
		4	9	0,033	1,4361			11	3	0,078	2,2079
		4	11	0,034	1,4577			11	5	0,079	2,2220
		5	0	0,035	1,4790			11	6	0,080	2,2361
		5	2	0,036	1,5000			11	8	0,081	2,2500
		5	4	0,037	1,5207			11	10	0,082	2,2638
		5	6	0,038	1,5411			11	11	0,083	2,2776
		5	7	0,039	1,5612		1	0	1	0,084	2,2913
		5	9	0,040	1,5811		1	0	3	0,085	2,3049
		5	11	0,041	1,6008		1	0	5	0,086	2,3184
		6	1	0,042	1,6202		1	0	6	0,087	2,3318
		6	2	0,043	1,6394		1	0	8	0,088	2,3452
		6	4	0,044	1,6583		1	0	10	0,089	2,3585
		6	6	0,045	1,6771		1	1	0	0,090	2,3717

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
			2	0,001	0,2500			6	7	0,046	1,6956
			3	0,002	0,3536			6	9	0,047	1,7139
			5	0,003	0,4330			6	11	0,048	1,7321
			7	0,004	0,5000			7	1	0,049	1,7500
			9	0,005	0,5590			7	2	0,050	1,7678
			10	0,006	0,6124			7	4	0,051	1,7854
		1	0	0,007	0,6614			7	6	0,052	1,8028
		1	2	0,008	0,7071			7	8	0,053	1,8200
		1	4	0,009	0,7500			7	9	0,054	1,8371
		1	5	0,010	0,7906			7	11	0,055	1,8540
		1	7	0,011	0,8292			8	1	0,056	1,8708
		1	9	0,012	0,8660			8	2	0,057	1,8875
		1	10	0,013	0,9014			8	4	0,058	1,9039
		2	0	0,014	0,9354			8	6	0,059	1,9203
		2	2	0,015	0,9682			8	8	0,060	1,9365
		2	4	0,016	1,0000			8	9	0,061	1,9526
		2	5	0,017	1,0308			8	11	0,062	1,9685
		2	7	0,018	1,0607			9	1	0,063	1,9843
		2	9	0,019	1,0897			9	3	0,064	2,0000
		2	11	0,020	1,1180			9	4	0,065	2,0156
		3	0	0,021	1,1456			9	6	0,066	2,0310
		3	2	0,022	1,1726			9	8	0,067	2,0463
		3	4	0,023	1,1990			9	10	0,068	2,0616
		3	5	0,024	1,2247			9	11	0,069	2,0767
		3	7	0,025	1,2500			10	1	0,070	2,0917
		3	9	0,026	1,2748			10	3	0,071	2,1065
		3	11	0,027	1,2990			10	4	0,072	2,1213
		4	0	0,028	1,3229			10	6	0,073	2,1360
		4	2	0,029	1,3463			10	8	0,074	2,1506
		4	4	0,030	1,3693			10	10	0,075	2,1651
		4	6	0,031	1,3919			10	11	0,076	2,1794
		4	7	0,032	1,4142			11	1	0,077	2,1937
		4	9	0,033	1,4361			11	3	0,078	2,2079
		4	11	0,034	1,4577			11	5	0,079	2,2220
		5	0	0,035	1,4790			11	6	0,080	2,2361
		5	2	0,036	1,5000			11	8	0,081	2,2500
		5	4	0,037	1,5207			11	10	0,082	2,2638
		5	6	0,038	1,5411			11	11	0,083	2,2776
		5	7	0,039	1,5612		1	0	1	0,084	2,2913
		5	9	0,040	1,5811		1	0	3	0,085	2,3049
		5	11	0,041	1,6008		1	0	5	0,086	2,3184
		6	1	0,042	1,6202		1	0	6	0,087	2,3318
		6	2	0,043	1,6394		1	0	8	0,088	2,3452
		6	4	0,044	1,6583		1	0	10	0,089	2,3585
		6	6	0,045	1,6771		1	1	0	0,090	2,3717

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	1	1	1	0,091	2,3848		1	7	7	0,136	2,9155
	1	1	3	0,092	2,3979		1	7	9	0,137	2,9262
	1	1	5	0,093	2,4109		1	7	10	0,138	2,9368
	1	1	6	0,094	2,4238		1	8	0	0,139	2,9475
	1	1	8	0,095	2,4367		1	8	2	0,140	2,9580
	1	1	10	0,096	2,4495		1	8	4	0,141	2,9686
	1	2	0	0,097	2,4622		1	8	5	0,142	2,9791
	1	2	1	0,098	2,4749		1	8	7	0,143	2,9896
	1	2	3	0,099	2,4875		1	8	9	0,144	3,0000
	1	2	5	0,100	2,5000		1	8	11	0,145	3,0104
	1	2	7	0,101	2,5125		1	9	0	0,146	3,0:08
	1	2	8	0,102	2,5249		1	9	2	0,147	3,0311
	1	2	10	0,103	2,5372		1	9	4	0,148	3,0414
	1	3	0	0,104	2,5495		1	9	5	0,149	3,0516
	1	3	1	0,105	2,5617		1	9	7	0,150	3,0619
	1	3	3	0,106	2,5789		1	9	9	0,151	3,0721
	1	3	5	0,107	2,5860		1	9	11	0,152	3,0822
	1	3	7	0,108	2,5981		1	10	0	0,153	3,0923
	1	3	8	0,109	2,6101		1	10	2	0,154	3 1024
	1	[illegible]	10	0,110	2,6220		1	10	4	0,155	3,1125
	1	[illegible]	[illegible]	0,111	2,6339		1	10	6	0,156	3,1225
	1	[illegible]	[illegible]	0,112	2,6458		1	10	7	0,157	3,1325
	1	4	3	0,113	2,6575		1	10	9	0,158	3,1425
	1	[illegible]	5	0,114	2,6693		1	10	11	0,159	3,1524
	1	[illegible]	7	0,115	2,6810		1	11	0	0,160	3,1623
	1	4	8	0,116	2,6926		1	11	2	0,161	3,1721
	1	4	10	0,117	2,7042		1	11	4	0,162	3,1820
	1	5	0	0,118	2,7157		1	11	6	0,163	3,1918
	1	5	2	0,119	2,7272		1	11	7	0,164	3,2016
	1	5	3	0,120	2,7386		1	11	9	0,165	3,2113
	1	5	5	0,121	2,7500		1	11	11	0,166	3,2210
	1	5	7	0,122	2,7613		2	0	1	0,167	3,2307
	1	5	9	0,123	2,7726		2	0	2	0,168	3,2404
	1	5	10	0,124	2,7839		2	0	4	0,169	3,2500
	1	6	0	0,125	2,7951		2	0	6	0,170	3,2596
	1	6	2	0,126	2,8062		2	0	7	0,171	3,2692
	1	6	3	0,127	2,8174		2	0	9	0,172	3,2787
	1	6	5	0,128	2,8284		2	0	11	0,173	3,2882
	1	6	7	0,129	2,8395		2	1	1	0,174	3,2977
	1	6	9	0,130	2,8504		2	1	2	0,175	3,3072
	1	6	10	0,131	2,8614		2	1	4	0,176	3,3166
	1	7	0	0,132	2,8723		2	1	6	0,177	3,3260
	1	7	2	0,133	2,8831		2	1	8	0,178	3,3354
	1	7	4	0,134	2,8940		2	1	9	0,179	3,3448
	1	7	5	0,135	2,9047		2	1	11	0,180	3,3541

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	2	2	1	0,181	3,3634
	2	2	2	0,182	3,3727
	2	2	4	0,183	3,3819
	2	2	6	0,184	3,3912
	2	2	8	0,185	3,4004
	2	2	9	0,186	3,4095
	2	2	11	0,187	3,4187
	2	3	1	0,188	3,4278
	2	3	3	0,189	3,4369
	2	3	4	0,190	3,4460
	2	3	6	0,191	3,4551
	2	3	8	0,192	3,4641
	2	3	10	0,193	3,4731
	2	3	11	0,194	3,4821
	2	4	1	0,195	3,4911
	2	4	3	0,196	3,5000
	2	4	4	0,197	3,5089
	2	4	6	0,198	3,5178
	2	4	8	0,199	3,5267
	2	4	10	0,200	3,5355
	2	4	11	0,201	3,5444
	2	5	1	0,202	3,5532
	2	5	3	0,203	3,5620
	2	5	5	0,204	3,5707
	2	5	6	0,205	3,5795
	2	5	8	0,206	3,5882
	2	5	10	0,207	3,5969
	2	5	11	0,208	3,6056
	2	6	1	0,209	3,6142
	2	6	3	0,210	3,6228
	2	6	5	0,211	3,6315
	2	6	6	0,212	3,6401
	2	6	8	0,213	3,6486
	2	6	10	0,214	3,6572
	2	7	0	0,215	3,6657
	2	7	1	0,216	3,6742
	2	7	3	0,217	3,6827
	2	7	5	0,218	3,6912
	2	7	6	0,219	3,6997
	2	7	8	0,220	3,7081
	2	7	10	0,221	3,7165
	2	8	0	0,222	3,7249
	2	8	1	0,223	3,7333
	2	8	3	0,224	3,7417
	2	8	5	0,225	3,7500
	2	8	7	0,226	3,7583
	2	8	8	0,227	3,7666
	2	8	10	0,228	3,7749
	2	9	0	0,229	3,7832
	2	9	1	0,230	3,7914
	2	9	3	0,231	3,7997
	2	9	5	0,232	3,8079
	2	9	7	0,233	3,8161
	2	9	8	0,234	3,8243
	2	9	10	0,235	3,8324
	2	10	0	0,236	3,8406
	2	10	2	0,237	3,8487
	2	10	3	0,238	3,8568
	2	10	5	0,239	3,8649
	2	10	7	0,240	3,8730
	2	10	8	0,241	3,8810
	2	10	10	0,242	3,8891
	2	11	0	0,243	3,8971
	2	11	2	0,244	3,9051
	2	11	3	0,245	3,9132
	2	11	5	0,246	3,9211
	2	11	7	0,247	3,9291
	2	11	9	0,248	3,9370
	2	11	10	0,249	3,9449
	3	0	0	0,250	3,9528
	3	0	2	0,251	3,9607
	3	0	3	0,252	3,9686
	3	0	5	0,253	3,9765
	3	0	7	0,254	3,9843
	3	0	9	0,255	3,9922
	3	0	10	0,256	4,0000
	3	1	0	0,257	4,0078
	3	1	2	0,258	4,0156
	3	1	4	0,259	4,0234
	3	1	5	0,260	4,0311
	3	1	7	0,261	4,0889
	3	1	9	0,262	4,0466
	3	1	10	0,263	4,0543
	3	2	0	0,264	4,0620
	3	2	2	0,265	4,0697
	3	2	4	0,266	4,0774
	3	2	5	0,267	4,0850
	3	2	7	0,268	4,0927
	3	2	9	0,269	4,1003
	3	2	11	0,270	4,1079

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	3	3	0	0,271	4,1155
	3	3	2	0,272	4,1231
	3	3	4	0,273	4,1307
	3	3	5	0,274	4,1382
	3	3	7	0,275	4,1458
	3	3	9	0,276	4,1533
	3	3	11	0,277	4,1608
	3	4	0	0,278	4,1683
	3	4	2	0,279	4,1758
	3	4	4	0,280	4,1833
	3	4	6	0,281	4,1908
	3	4	7	0,282	4,1982
	3	4	9	0,283	4,2057
	3	4	11	0,284	4,2131
	3	5	0	0,285	4,2205
	3	5	2	0,286	4,2279
	3	5	4	0,287	4,2353
	3	5	6	0,288	4,2426
	3	5	7	0,289	4,2500
	3	5	9	0,290	4,2573
	3	5	11	0,291	4,2647
	3	6	1	0,292	4,2720
	3	6	2	0,293	4,2793
	3	6	4	0,294	4,2866
	3	6	6	0,295	4,2939
	3	6	7	0,296	4,3012
	3	6	9	0,297	4,3084
	3	6	11	0,298	4,3157
	3	7	1	0,299	4,3229
	3	7	2	0,300	4,3301
	3	7	4	0,301	4,3373
	3	7	6	0,302	4,3445
	3	7	8	0,303	4,3517
	3	7	9	0,304	4,3589
	3	7	11	0,305	4,3661
	3	8	1	0,306	4,3732
	3	8	2	0,307	4,3804
	3	8	4	0,308	4,3875
	3	8	6	0,309	4,3946
	3	8	8	0,310	4,4017
	3	8	9	0,311	4,4088
	3	8	11	0,312	4,4159
	3	9	1	0,313	4,4230
	3	9	3	0,314	4,4300
	3	9	4	0,315	4,4371
	3	9	6	0,316	4,4441
	3	9	8	0,317	4,4511
	3	9	10	0,318	4,4581
	3	9	11	0,319	4,4651
	3	10	1	0,320	4,4721
	3	10	3	0,321	4,4791
	3	10	4	0,322	4,4861
	3	10	6	0,323	4,4931
	3	10	8	0,324	4,5000
	3	10	10	0,325	4,5069
	3	10	11	0,326	4,5139
	3	11	1	0,327	4,5208
	3	11	3	0,328	4,5277
	3	11	5	0,329	4,5346
	3	11	6	0,330	4,5415
	3	11	8	0,331	4,5484
	3	11	10	0,332	4,5552
	3	11	11	0,333	4,5621
	4	0	1	0,334	4,5689
	4	0	3	0,335	4,5758
	4	0	5	0,336	4,5826
	4	0	6	0,337	4,5894
	4	0	8	0,338	4,5962
	4	0	10	0,339	4,6030
	4	1	0	0,340	4,6098
	4	1	1	0,341	4,6165
	4	1	3	0,342	4,6233
	4	1	5	0,343	4,6301
	4	1	6	0,344	4,6368
	4	1	8	0,345	4,6435
	4	1	10	0,346	4,6503
	4	2	0	0,347	4,6570
	4	2	1	0,348	4,6637
	4	2	3	0,349	4,6704
	4	2	5	0,350	4,6771
	4	2	7	0,351	4,6837
	4	2	8	0,352	4,6904
	4	2	10	0,353	4,6971
	4	3	0	0,354	4,7037
	4	3	1	0,355	4,7104
	4	3	3	0,356	4,7170
	4	3	5	0,357	4,7236
	4	3	7	0,358	4,7302
	4	3	8	0,359	4,7368
	4	3	10	0,360	4,7434

VIII. Kap. Vom Abflusse und Aufstau bei Wehren, Ueberfällen und Einbauen, in Flüssen und Kanälen.

IX. Kap. Von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

X. Kap. Von den springenden Strahlen.

XI. Kap. Vom Stoße oder hydraulischen Druck des Wassers.

XII. Kap. Von den oberschlächtigen Wasserrädern.

XIII. Kap. Von den unterschlächtigen Wasserrädern.

XIV. Kap. Von den Eigenschaften der Luft in Bezug auf hydraulische Maschinen.

XV. Kap. Von den Hebern.

XVI. Kap. Von den Saugpumpen.

XVII. Kap. Von den Druckpumpen.

XVIII. Kap. Von den vereinigten Saug- und Druckpumpen.

XIX. Kap. Von der Wassersäulenmaschine.

XX. Kap. Von der Spiralpumpe.

XXI. Kap. Von der archimedischen Wasserschnecke und der Wasserschraube.

XXII. Kap. Von den Schöpf- und Wurfrädern.

XXIII. Kap. Von den Schaufel- und Paternosterwerken.

XXIV. Kap. Von den Stromgeschwindigkeitsmessern.

Tafel

für

die Geschwindigkeiten

welche ein Körper durch den freien Fall erlangt,

im preußischen Fußmaße.

✝

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
R.	F.	Z.	L.	Fuß	Fuß.	R.	F.	Z.	L.	Fuß.	Fuß.
			1	0.001	0,2500			6	7	0,046	1,6956
			3	0,002	0,3536			6	9	0,047	1,7139
			5	0,003	0,4330			6	11	0,048	1,7321
			7	0,004	0,5000			7	1	0,049	1,7500
			9	0,005	0,5590			7	2	0,050	1,7678
			10	0,006	0,6124			7	4	0,051	1,7854
		1	0	0,007	0,6614			7	6	0,052	1,8028
		1	2	0,008	0,7071			7	8	0,053	1,8200
		1	4	0,009	0,7500			7	9	0,054	1,8371
		1	5	0,010	0,7906			7	11	0,055	1,8540
		1	7	0,011	0,8292			8	1	0,056	1,8708
		1	9	0,012	0,8660			8	2	0,057	1,8875
		1	10	0,013	0,9014			8	4	0,058	1,9039
		2	0	0,014	0,9354			8	6	0,059	1,9203
		2	2	0,015	0,9682			8	8	0,060	1,9365
		2	4	0,016	1,0000			8	9	0,061	1,9526
		2	5	0,017	1,0308			8	11	0,062	1,9685
		2	7	0,018	1,0607			9	1	0,063	1,9843
		2	9	0,019	1,0897			9	3	0,064	2,0000
		2	11	0,020	1,1180			9	4	0,065	2,0156
		3	0	0,021	1,1456			9	6	0,066	2,0310
		3	2	0,022	1,1726			9	8	0,267	2,0463
		3	4	0,023	1,1990			9	10	0,068	2,0616
		3	5	0,024	1,2247			9	11	0,069	2,0767
		3	7	0,025	1,2500			10	1	0,070	2,0917
		3	9	0,026	1,2748			10	3	0,071	2,1065
		3	11	0,027	1,2990			10	4	0,072	2,1213
		4	0	0,028	1,3229			10	6	0,073	2,1360
		4	2	0,029	1,3463			10	8	0,074	2,1506
		4	4	0,030	1,3693			10	10	0,075	2,1651
		4	6	0,031	1,3919			10	11	0,076	2,1794
		4	7	0,032	1,4142			11	1	0,077	2,1937
		4	9	0,033	1,4361			11	3	0,078	2,2079
		4	11	0,034	1,4577			11	5	0,079	2,2220
		5	0	0,035	1,4790			11	6	0,080	2,2361
		5	2	0,036	1,5000			11	8	0,081	2,2500
		5	4	0,037	1,5207			11	10	0,082	2,2638
		5	6	0,038	1,5411			11	11	0,083	2,2776
		5	7	0,039	1,5612		1	0	1	0,084	2,2913
		5	9	0,040	1,5811		1	0	3	0,085	2,3049
		5	11	0,041	1,6008		1	0	5	0,086	2,3184
		6	1	0,042	1,6202		1	0	6	0,087	2,3318
		6	2	0,043	1,6394		1	0	8	0,088	2,3452
		6	4	0,044	1,6583		1	0	10	0,089	2,3585
		6	6	0,045	1,6771		1	1	0	0,090	2,3717

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	1	1	2	0,091	2,3848		1	7	7	0,136	2,9155
	1	1	3	0,092	2,3979		1	7	9	0,137	2,9262
	1	1	5	0,093	2,4109		1	7	10	0,138	2,9368
	1	1	6	0,094	2,4238		1	8	0	0,139	2,9475
	1	1	8	0,095	2,4367		1	8	2	0,140	2,9580
	1	1	10	0,096	2,4495		1	8	4	0,141	2,9686
	1	2	0	0,097	2,4622		1	8	5	0,142	2,9791
	1	2	1	0,098	2,4749		1	8	7	0,143	2,9896
	1	2	3	0,099	2,4875		1	8	9	0,144	3,0000
	1	2	4	0,100	2,5000		1	8	11	0,145	3,0104
	1	2	7	0,101	2,5125		1	9	0	0,146	3,0208
	1	2	8	0,102	2,5249		1	9	2	0,147	3,0311
	1	2	10	0,103	2,5372		1	9	4	0,148	3,0414
	1	3	0	0,104	2,5495		1	9	5	0,149	3,0516
	1	3	1	0,105	2,5617		1	9	7	0,150	3,0619
	1	3	3	0,106	2,5789		1	9	9	0,151	3,0721
	1	3	5	0,107	2,5860		1	9	11	0,152	3,0822
	1	3	7	0,108	2,5981		1	10	0	0,153	3,0923
	1	3	8	0,109	2,6101		1	10	2	0,154	3,1024
	1	3	10	0,110	2,6220		1	10	4	0,155	3,1125
	1	[illegible]	[illegible]	0,111	2,6339		1	10	6	0,156	3,1225
	1	[illegible]	[illegible]	0,112	2,6458		1	10	7	0,157	3,1325
	1	[illegible]	3	0,113	2,6575		1	10	9	0,158	3,1425
	1	[illegible]	5	0,114	2,6693		1	10	11	0,159	3,1524
	1	[illegible]	7	0,115	2,6810		1	11	0	0,160	3,1623
	1	4	8	0,116	2,6926		1	11	2	0,161	3,1721
	1	4	10	0,117	2,7042		1	11	4	0,162	3,1820
	1	5	0	0,118	2,7157		1	11	6	0,163	3,1918
	1	5	2	0,119	2,7272		1	11	7	0,164	3,2016
	1	5	3	0,120	2,7386		1	11	9	0,165	3,2113
	1	5	5	0,121	2,7500		1	11	11	0,166	3,2210
	1	5	7	0,122	2,7613		2	0	1	0,167	3,2307
	1	5	9	0,123	2,7726		2	0	2	0,168	3,2404
	1	5	10	0,124	2,7839		2	0	4	0,169	3,2500
	1	6	0	0,125	2,7951		2	0	6	0,170	3,2596
	1	6	2	0,126	2,8062		2	0	7	0,171	3,2692
	1	6	3	0,127	2,8174		2	0	9	0,172	3,2787
	1	6	5	0,128	2,8284		2	0	11	0,173	3,2882
	1	6	7	0,129	2,8395		2	1	1	0,174	3,2977
	1	6	9	0,130	2,8504		2	1	2	0,175	3,3072
	1	6	10	0,131	2,8614		2	1	4	0,176	3,3166
	1	7	0	0,132	2,8723		2	1	6	0,177	3,3260
	1	7	2	0,133	2,8831		2	1	8	0,178	3,3354
	1	7	4	0,134	2,8940		2	1	9	0,179	3,3448
	1	7	5	0,135	2,9047		2	1	11	0,180	3,3541

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	2	2	1	0,181	3,3634		2	8	7	0,226	3,7583
	2	2	2	0,182	3,3727		2	8	8	0,227	3,7666
	2	2	4	0,183	3,3819		2	8	10	0,228	3,7749
	2	2	6	0,184	3,3912		2	9	0	0,229	3,7832
	2	2	8	0,185	3,4004		2	9	1	0,230	3,7914
	2	2	9	0 186	3,4095		2	9	3	0,231	3,7997
	2	2	11	0,187	3,4187		2	9	5	0,232	3,8079
	2	3	1	0,188	3,4278		2	9	7	0,233	3,8161
	2	3	3	0,189	3,4369		2	9	8	0,234	3,8243
	2	3	4	0,190	3,4460		2	9	10	0,235	3,8324
	2	3	6	0,191	3,4551		2	10	0	0,236	3,8406
	2	3	8	0,192	3,4641		2	10	2	0,237	3,8487
	2	3	10	0,193	3,4731		2	10	3	0,238	3,8568
	2	3	11	0,194	3,4821		2	10	5	0,239	3,8649
	2	4	1	0,195	3,4911		2	10	7	0,240	3,8730
	2	4	3	0,196	3,5000		2	10	8	0,241	3,8810
	2	4	4	0,197	3,5089		2	10	10	0,242	3,8891
	2	4	6	0,198	3,5178		2	11	0	0,243	3,8971
	2	4	8	0,199	3,5267		2	11	2	0,244	3,9051
	2	4	10	0,200	3,5355		2	11	3	0,245	3,9132
	2	4	11	0,201	3,5444		2	11	5	0,246	3,9211
	2	5	1	0,202	3,5532		2	11	7	0,247	3,9291
	2	5	3	0,203	3,5620		2	11	9	0,248	3,9370
	2	5	5	0,204	3,5707		2	11	10	0,249	3,9449
	2	5	6	0,205	3,5795		3	0	0	0,250	3,9528
	2	5	8	0,206	3,5882		3	0	2	0,251	3,9607
	2	5	10	0,207	3,5969		3	0	3	0,252	3,9686
	2	5	11	0,208	3,6055		3	0	5	0,253	3,9765
	2	6	1	0,209	3,6142		3	0	7	0,254	3,9843
	2	6	3	0,210	3 6228		3	0	9	0,255	3 9922
	2	6	5	0,211	3,6315		3	0	10	0,256	4,0000
	2	6	6	0,212	3,6401		3	1	0	0,257	4,0078
	2	6	8	0 213	3 6486		3	1	2	0,258	4,0156
	2	6	10	0,214	3,6572		3	1	4	0,259	4,0234
	2	7	0	0,215	3,6657		3	1	5	0,260	4,0311
	2	7	1	0,216	3,6742		3	1	7	0,261	4,0389
	2	7	3	0,217	3,6827		3	1	9	0,262	4,0466
	2	7	5	0,218	3,6912		3	1	10	0,263	4,0543
	2	7	6	0,219	3,6997		3	2	0	0,264	4,0620
	2	7	8	0,220	3,7081		3	2	2	0,265	4 0697
	2	7	10	0,221	3 7165		3	2	4	0,266	4,0774
	2	8	0	0,222	3,7249		3	2	5	0,267	4,0850
	2	8	1	0,223	3,7333		3	2	7	0,268	4,0927
	2	8	3	0,224	3,7417		3	2	9	0,269	4,1003
	2	8	5	0,225	3,7500		3	2	11	0,270	4,1079

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	3	3	0	0,271	4,1155
	3	3	2	0,272	4,1231
	3	3	4	0,273	4,1307
	3	3	5	0,274	4,1382
	3	3	7	0,275	4,1458
	3	3	9	0,276	4,1533
	3	3	11	0,277	4,1608
	3	4	0	0,278	4,1683
	3	4	2	0,279	4,1758
	3	4	4	0,280	4,1833
	3	4	6	0,281	4,1908
	3	4	7	0,282	4,1982
	3	4	9	0,283	4,2057
	3	4	11	0,284	4,2131
	3	5	0	0,285	4,2205
	3	5	2	0,286	4,2279
	3	5	4	0,287	4,2353
	3	5	6	0,288	4,2426
	3	5	7	0,289	4,2500
	3	5	9	0,290	4,2573
	3	5	11	0,291	4,2647
	3	6	1	0,292	4,2720
	3	6	2	0,293	4,2793
	3	6	4	0,294	4,2866
	3	6	6	0,295	4,2939
	3	6	7	0,296	4,3012
	3	6	9	0,297	4,3084
	3	6	11	0,298	4,3157
	3	7	1	0,299	4,3229
	3	7	2	0,300	4,3301
	3	7	4	0,301	4,3373
	3	7	6	0,302	4,3445
	3	7	8	0,303	4,3517
	3	7	9	0,304	4,3589
	3	7	11	0,305	4,3661
	3	8	1	0,306	4,3732
	3	8	2	0,307	4,3804
	3	8	4	0,308	4,3875
	3	8	6	0,309	4,3946
	3	8	8	0,310	4,4017
	3	8	9	0,311	4,4088
	3	8	11	0,312	4,4159
	3	9	1	0,313	4,4230
	3	9	3	0,314	4,4300
	3	9	4	0,315	4,4371
	3	9	6	0,316	4,4441
	3	9	8	0,317	4,4511
	3	9	10	0,318	4,4581
	3	9	11	0,319	4,4651
	3	10	1	0,320	4,4721
	3	10	3	0,321	4,4791
	3	10	4	0,322	4,4861
	3	10	6	0,323	4,4931
	3	10	8	0,324	4,5000
	3	10	10	0,325	4,5069
	3	10	11	0,326	4,5139
	3	11	1	0,327	4,5208
	3	11	3	0,328	4,5277
	3	11	5	0,329	4,5346
	3	11	6	0,330	4,5415
	3	11	8	0,331	4,5484
	3	11	10	0,332	4,5552
	3	11	11	0,333	4,5621
	4	0	1	0,334	4,5689
	4	0	3	0,335	4,5758
	4	0	5	0,336	4,5826
	4	0	6	0,337	4,5894
	4	0	8	0,338	4,5962
	4	0	10	0,339	4,6030
	4	1	0	0,340	4,6098
	4	1	1	0,341	4,6165
	4	1	3	0,342	4,6233
	4	1	5	0,343	4,6301
	4	1	6	0,344	4,6368
	4	1	8	0,345	4,6435
	4	1	10	0,346	4,6503
	4	2	0	0,347	4,6570
	4	2	1	0,348	4,6637
	4	2	3	0,349	4,6704
	4	2	5	0,350	4,6771
	4	2	7	0,351	4,6837
	4	2	8	0,352	4,6904
	4	2	10	0,353	4,6971
	4	3	0	0,354	4,7037
	4	3	1	0,355	4,7104
	4	3	3	0,356	4,7170
	4	3	5	0,357	4,7236
	4	3	7	0,358	4,7302
	4	3	8	0,359	4,7368
	4	3	10	0,360	4,7434

Fallhöhe.				Geschw.	Fallhöhe.				Geschw.
F. | Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F. | Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
4	4	0	0,361	4,7500	4	10	6	0,406	5,0374
4	4	2	0,362	4,7566	4	10	7	0,407	5,0436
4	4	3	0,363	4,7631	4	10	9	0,408	5,0498
4	4	5	0.364	4,7697	4	10	11	0,409	5,0559
4	4	7	0,365	4,7762	4	11	0	0,410	5,0621
4	4	8	0,366	4,7828	4	11	2	0,411	5,0683
4	4	10	0,367	4,7893	4	11	4	0,412	5,0744
4	5	0	0,368	4,7958	4	11	6	0,413	5,0806
4	5	2	0,369	4,8023	4	11	7	0,414	5,0867
4	5	3	0,370	4,8088	4	11	9	0,415	5,0929
4	5	5	0,371	4,8153	4	11	11	0,416	5,0990
4	5	7	0,372	4,8218	5	0	1	0,417	5,1051
4	5	9	0,373	4,8283	5	0	2	0,418	5,1113
4	5	10	0,374	4,8348	5	0	4	0,419	5,1174
4	6	0	0,375	4,8412	5	0	6	0,420	5,1235
4	6	2	0,376	4,8477	5	0	7	0,421	5,1296
4	6	3	0,377	4,8541	5	0	9	0 422	5,1357
4	6	5	0,378	4,8606	5	0	11	0,423	5,1417
4	6	7	0,379	4,8670	5	1	1	0,424	5,1478
4	6	9	0,380	4,8734	5	1	2	0,425	5,1539
4	6	10	0,381	4,8798	5	1	4	0,426	5,1599
4	7	0	0,382	4,8862	5	1	6	0,427	5,1660
4	7	2	0,383	4,8926	5	1	8	0,428	5,1720
4	7	4	0,384	4,8990	5	1	9	0,429	5,1781
4	7	5	0,385	4,9054	5	1	11	0,430	5,1841
4	7	7	0,386	4,9117	5	2	1	0,431	5,1901
4	7	9	0,387	4,9181	5	2	2	0,432	5,1962
4	7	10	0,388	4,9244	5	2	4	0,433	5,2022
4	8	0	0,889	4,9308	5	2	6	0.434	5,2082
4	8	2	0,390	4,9371	5	2	8	0,435	5,2142
4	8	4	0,391	4,9434	5	2	9	0.436	5,2202
4	8	5	0,392	4,9497	5	2	11	0,437	5,2261
4	8	7	0,393	4,9561	5	3	1	0,438	5,2321
4	8	9	0,394	4,9624	5	3	3	0,439	5,2381
4	8	11	0,395	4,9687	5	3	4	0,440	5,2440
4	9	0	0,396	4,9749	5	3	6	0,441	5,2500
4	9	2	0,397	4,9812	5	3	8	0,442	5,2559
4	9	4	0,398	4,9875	5	3	10	0,443	5,2619
4	9	5	0,399	4,9937	5	3	11	0,444	5,2678
4	9	7	0,400	5,0000	5	4	1	0,445	5,2738
4	9	9	0,401	5,0062	5	4	3	0,446	5,2797
4	9	11	0,402	5,0125	5	4	4	0,447	5,2856
4	10	0	0,403	5,0187	5	4	6	0,448	5,2915
4	10	2	0,404	5,0249	5	4	8	0,449	5,2974
4	10	4	0,405	5,0312	5	4	10	0,450	5,3033

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	5	4	11	0,451	5,3093		5	11	5	0,496	5,5678
	5	5	1	0,452	5,3151		5	11	7	0,497	5,5734
	5	5	3	0,453	5,3209		5	11	9	0,498	5,5790
	5	5	5	0,454	5,3268		5	11	10	0,499	5,5846
	5	5	6	0,455	5,3327		6	0	0	0,500	5,5902
	5	5	8	0,456	5,3385		6	0	2	0,501	5,5958
	5	5	10	0,457	5,3444		6	0	3	0,502	5,6013
	5	5	11	0,458	5,3502		6	0	5	0,503	5,6069
	5	6	1	0,459	5,3561		6	0	7	0,504	5,6125
	5	6	3	0,460	5,3619		6	0	9	0,505	5,6181
	5	6	5	0,461	5,3677		6	0	10	0,506	5,6236
	5	6	6	0,462	5,3735		6	1	0	0,507	5,6292
	5	6	8	0,463	5,3794		6	1	2	0,508	5,6347
	5	6	10	0,464	5,3852		6	1	4	0,509	5,6403
	5	7	0	0,465	5,3910		6	1	5	0,510	5,6458
	5	7	1	0,466	5,3968		6	1	7	0,511	5,6513
	5	7	3	0,467	5,4025		6	1	9	0,512	5,6569
	5	7	5	0,468	5,4083		6	1	10	0,513	5,6624
	5	7	6	0,469	5,4141		6	2	0	0,514	5,6679
	5	7	8	0,470	5,4199		6	2	2	0,515	5,6734
	5	7	10	0,471	5,4256		6	2	4	0,516	5,6789
	5	8	0	0,472	5,4314		6	2	5	0,517	5,6844
	5	8	1	0,473	5,4371		6	2	7	0,518	5,6899
	5	8	3	0,474	5,4429		6	2	9	0,519	5,6954
	5	8	5	0,475	5,4486		6	2	11	0,520	5,7009
	5	8	7	0,476	5,4544		6	3	0	0,521	5,7064
	5	8	8	0,477	5,4601		6	3	2	0,522	5,7118
	5	8	10	0,478	5,4658		6	3	4	0,523	5,7173
	5	9	0	0,479	5,4715		6	3	5	0,524	5,7228
	5	9	1	0,480	5,4772		6	3	7	0,525	5,7282
	5	9	3	0,481	5,4829		6	3	9	0,526	5,7337
	5	9	5	0,482	5,4886		6	3	11	0,527	5,7391
	5	9	7	0,483	5,4943		6	4	0	0,528	5,7446
	5	9	8	0,484	5,5000		6	4	2	0,529	5,7500
	5	9	10	0,485	5,5057		6	4	4	0,530	5,7554
	5	10	0	0,486	5,5114		6	4	6	0,531	5,7609
	5	10	2	0,487	5,5170		6	4	7	0,532	5,7663
	5	10	3	0,488	5,5227		6	4	9	0,533	5,7717
	5	10	5	0,489	5,5283		6	4	11	0,534	5,7771
	5	10	7	0,490	5,5350		6	5	0	0,535	5,7825
	5	10	8	0,491	5,5396		6	5	2	0,536	5,7879
	5	10	10	0,492	5,5453		6	5	4	0,537	5,7933
	5	11	0	0,493	5,5509		6	5	6	0,538	5,7987
	5	11	2	0,494	5,5565		6	5	7	0,539	5,8041
	5	11	3	0,495	5,5621		6	5	9	0,540	5,8095

Fallhöhe.				Geschw.	Fallhöhe.				Geschw.
F. Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F. Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
6 5	11		0,541	5,8149	7	0	5	0,586	6,0519
6 6	1		0,542	5,8202	7	0	6	0,587	6,0570
6 6	2		0,543	5,8256	7	0	8	0,588	6,0622
6 6	4		0,544	5,8310	7	0	10	0,589	6,0673
6 6	6		0,545	5,8363	7	1	0	0,590	6,0725
6 6	7		0,546	5,8417	7	1	1	0,591	6,0776
6 6	9		0,547	5,8470	7	1	3	0,592	6,0828
6 6	11		0,548	5,8523	7	1	5	0,593	6,0879
6 7	1		0,549	5,8577	7	1	6	0,594	6,0930
6 7	2		0,550	5,8630	7	1	8	0,595	6,0982
6 7	4		0,551	5,8683	7	1	10	0,596	6,1033
6 7	6		0,552	5,8737	7	2	0	0,597	6,1084
6 7	8		0,553	5,8790	7	2	1	0,598	6,1135
6 7	9		0,554	5,8843	7	2	3	0,599	6,1186
6 7	11		0,555	5,8896	7	2	5	0,600	6,1237
6 8	1		0,556	5,8949	7	2	7	0,601	6,1288
6 8	2		0,557	5,9002	7	2	8	0,602	6,1339
6 8	4		0,558	5,9055	7	2	10	0,603	6,1390
6 8	6		0,559	5,9108	7	3	0	0,604	6,1441
6 8	8		0,560	5,9161	7	3	1	0,605	6,1492
6 8	9		0,561	5,9214	7	3	3	0,606	6,1543
6 8	11		0,562	5,9266	7	3	5	0,607	6,1593
6 9	1		0,563	5,9319	7	3	7	0,608	6,1644
6 9	3		0,564	5,9372	7	3	8	0,609	6,1695
6 9	4		0,565	5,9424	7	3	10	0,610	6,1745
6 9	6		0,566	5,9477	7	4	0	0,611	6,1796
6 9	8		0,567	5,9529	7	4	2	0,612	6,1847
6 9	10		0,568	5,9582	7	4	3	0,613	6,1897
6 9	11		0,569	5,9634	7	4	5	0,614	6,1948
6 10	1		0,570	5,9687	7	4	7	0,615	6,1998
6 10	3		0,571	5,9739	7	4	8	0,616	6,2048
6 10	4		0,572	5,9791	7	4	10	0,617	6,2099
6 10	6		0,573	5,9844	7	5	0	0,618	6,2149
6 10	8		0,574	5,9896	7	5	2	0,619	6,2199
6 10	10		0,575	5,9948	7	5	3	0,620	6,2249
6 10	11		0,576	6,0000	7	5	5	0,621	6,2300
6 11	1		0,577	6,0052	7	5	7	0,622	6,2350
6 11	3		0,578	6,0104	7	5	9	0,623	6,2400
6 11	5		0,579	6,0156	7	5	10	0,624	6,2450
6 11	6		0,580	6,0203	7	6	0	0,625	6,2500
6 11	8		0,581	6,0260	7	6	2	0,626	6,2550
6 11	10		0,582	6,0312	7	6	3	0,627	6,2600
6 11	11		0,583	6,0363	7	6	5	0,628	6,2650
7 0	1		0,584	6,0415	7	6	7	0,629	6,2700
7 0	3		0,585	6,0467	7	6	9	0,630	6,2750

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	7	6	10	0,631	6,2799
	7	7	0	0,632	6,2849
	7	7	2	0,633	6,2899
	7	7	4	0,634	6,2948
	7	7	5	0,635	6,2998
	7	7	7	0,636	6,3048
	7	7	9	0,637	6,3097
	7	7	10	0,638	6,3147
	7	8	0	0,639	6,3196
	7	8	2	0,640	6,3246
	7	8	4	0,641	6,3295
	7	8	5	0,642	6,3344
	7	8	7	0,643	6,3394
	7	8	9	0,644	6,3443
	7	8	11	0,645	6,3492
	7	9	0	0,646	6,3541
	7	9	2	0,647	6,3590
	7	9	4	0,648	6,3640
	7	9	5	0,649	6,3689
	7	9	7	0,650	6,3738
	7	9	9	0,651	6,3787
	7	9	11	0,652	6,3836
	7	10	0	0,653	6,3885
	7	10	2	0,654	6,3934
	7	10	4	0,655	6,3982
	7	10	6	0,656	6,4031
	7	10	7	0,657	6,4080
	7	10	9	0,658	6,4129
	7	10	11	0,659	6,4177
	7	11	0	0,660	6,4226
	7	11	2	0,661	6,4275
	7	11	4	0,662	6,4323
	7	11	6	0,663	6,4372
	7	11	7	0,664	6,4420
	7	11	9	0,665	6,4469
	7	11	11	0,666	6,4517
	8	0	1	0,667	6,4566
	8	0	2	0,668	6,4614
	8	0	4	0,669	6,4663
	8	0	6	0,670	6,4711
	8	0	7	0,671	6,4759
	8	0	9	0,672	6,4807
	8	0	11	0,673	6,4856
	8	1	1	0,674	6,4904
	8	1	2	0,675	6,4952
	8	1	4	0,676	6,5000
	8	1	6	0,677	6,5048
	8	1	8	0,678	6,5096
	8	1	9	0,679	6,5144
	8	1	11	0,680	6,5192
	8	2	1	0,681	6,5240
	8	2	2	0,682	6,5288
	8	2	4	0,683	6,5336
	8	2	6	0,684	6,5383
	8	2	8	0,685	6,5431
	8	2	9	0,686	6,5479
	8	2	11	0,687	6,5527
	8	3	1	0,688	6,5574
	8	3	3	0,689	6,5622
	8	3	4	0,690	6,5670
	8	3	6	0,691	6,5717
	8	3	8	0,692	6,5765
	8	3	10	0,693	6,5812
	8	3	11	0,694	6,5860
	8	4	1	0,695	6,5907
	8	4	3	0,696	6,5955
	8	4	4	0,697	6,6002
	8	4	6	0,698	6,6049
	8	4	8	0,699	6,6097
	8	4	10	0,700	6,6144
	8	4	11	0,701	6,6191
	8	5	1	0,702	6,6238
	8	5	3	0,703	6,6285
	8	5	5	0,704	6,6332
	8	5	6	0,705	6,6380
	8	5	8	0,706	6,6427
	8	5	10	0,707	6,6474
	8	5	11	0,708	6,6521
	8	6	1	0,709	6,6568
	8	6	3	0,710	6,6615
	8	6	5	0,711	6,6661
	8	6	6	0,712	6,6708
	8	6	8	0,713	6,6755
	8	6	10	0,714	6,6802
	8	7	0	0,715	6,6849
	8	7	1	0,716	6,6895
	8	7	3	0,717	6,6942
	8	7	5	0,718	6,6989
	8	7	6	0,719	6,7035
	8	7	8	0,720	6,7082

Fallhöhe.				Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
8	7	10	0,721	6,7129	9	2	4		0,766	6,9192
8	8	0	0,722	6,7175	9	2	5		0,767	6,9237
8	8	1	0,723	6,7222	9	2	7		0,768	6,9282
8	8	3	0,724	6,7268	9	2	9		0,769	6,9327
8	8	5	0,725	6,7315	9	2	11		0,770	6,9372
8	8	7	0,726	6,7361	9	3	0		0,771	6,9417
8	8	8	0,727	6,7407	9	3	2		0,772	6,9462
8	8	10	0,728	6,7454	9	3	4		0,773	6,9507
8	9	0	0,729	6,7500	9	3	5		0,774	6,9552
8	9	1	0,730	6,7546	9	3	7		0,775	6,9597
8	9	3	0,731	6,7593	9	3	9		0,776	6,9642
8	9	5	0,732	6,7639	9	3	11		0,777	6,9687
8	9	7	0,733	6,7685	9	4	0		0,778	6,9732
8	9	8	0,734	6,7731	9	4	2		0,779	6,9776
8	9	10	0,735	6,7777	9	4	4		0,780	6,9821
8	10	0	0,736	6,7823	9	4	6		0,781	6,9866
8	10	2	0,737	6,7869	9	4	7		0,782	6,9911
8	10	3	0,738	6,7915	9	4	9		0,783	6,9955
8	10	5	0,739	6,7961	9	4	11		0,784	7,0000
8	10	7	0,740	6,8007	9	5	0		0,785	7,0045
8	10	8	0,741	6,8053	9	5	2		0,786	7,0089
8	10	10	0,742	6,8099	9	5	4		0,787	7,0134
8	11	0	0,743	6,8145	9	5	6		0,788	7,0178
8	11	2	0,744	6,8191	9	5	7		0,789	7,0223
8	11	3	0,745	6,8237	9	5	9		0,790	7,0267
8	11	5	0,746	6,8283	9	5	11		0,791	7,0312
8	11	7	0,747	6,8328	9	6	1		0,792	7,0356
8	11	9	0,748	6,8374	9	6	2		0,793	7,0401
8	11	10	0,749	6,8420	9	6	4		0,794	7,0445
9	0	0	0,750	6,8465	9	6	6		0,795	7,0489
9	0	2	0,751	6,8511	9	6	7		0,796	7,0534
9	0	3	0,752	6,8557	9	6	9		0,797	7,0578
9	0	5	0,753	6,8602	9	6	11		0,798	7,0622
9	0	7	0,754	6,8648	9	7	1		0,799	7,0666
9	0	9	0,755	6,8693	9	7	2		0,800	7,0711
9	0	10	0,756	6,8739	9	7	4		0,801	7,0755
9	1	0	0,757	6,8784	9	7	6		0,802	7,0799
9	1	2	0,758	6,8829	9	7	8		0,803	7,0843
9	1	4	0,759	6,8875	9	7	9		0,804	7,0887
9	1	5	0,760	6,8920	9	7	11		0,805	7,0931
9	1	7	0,761	6,8966	9	8	1		0,806	7,0975
9	1	9	0,762	6,9011	9	8	2		0,807	7,1019
9	1	10	0,763	6,9056	9	8	4		0,808	7,1063
9	2	0	0,764	6,9101	9	8	6		0,809	7,1107
9	2	2	0,765	6,9147	9	8	8		0,810	7,1151

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	9	8	9	0,811	7,1195		10	3	3	0,856	7,3144
	9	8	11	0,812	7,1239		10	3	5	0,857	7,3186
	9	9	1	0,813	7,1283		10	3	7	0,858	7,3229
	9	9	3	0,814	7,1327		10	3	8	0,859	7,3272
	9	9	4	0,815	7,1371		10	3	10	0,860	7,3314
	9	9	6	0,816	7,1414		10	4	0	0,861	7,3357
	9	9	8	0,817	7,1458		10	4	2	0,862	7,3400
	9	9	10	0,818	7,1502		10	4	3	0,863	7,3442
	9	9	11	0,819	7,1545		10	4	5	0,864	7,3485
	9	10	1	0,820	7,1589		10	4	7	0,865	7,3527
	9	10	3	0,821	7,1633		10	4	8	0,866	7,3570
	9	10	4	0,822	7,1676		10	4	10	0,867	7,3612
	9	10	6	0,823	7,1720		10	5	0	0,868	7,3655
	9	10	8	0,824	7,1764		10	5	2	0,869	7,3697
	9	10	10	0,825	7,1807		10	5	3	0,870	7,3739
	9	10	11	0,826	7,1851		10	5	5	0,871	7,3782
	9	11	1	0,827	7,1894		10	5	7	0,872	7,3824
	9	11	3	0,828	7,1937		10	5	9	0,873	7,3866
	9	11	5	0,829	7,1981		10	5	10	0,874	7,3909
	9	11	6	0,830	7,2024		10	6	0	0,875	7,3951
	9	11	8	0,831	7,2068		10	6	2	0,876	7,3993
	9	11	10	0,832	7,2111		10	6	3	0,877	7,4035
	9	11	11	0,833	7,2154		10	6	5	0,878	7,4078
	10	0	1	0,834	7,2198		10	6	7	0,879	7,4120
	10	0	3	0,835	7,2241		10	6	9	0,880	7,4162
	10	0	5	0,836	7,2284		10	6	10	0,881	7,4204
	10	0	6	0,837	7,2327		10	7	0	0,882	7,4246
	10	0	8	0,838	7,2371		10	7	2	0,883	7,4288
	10	0	10	0,839	7,2414		10	7	4	0,884	7,4330
	10	1	0	0,840	7,2457		10	7	5	0,885	7,4372
	10	1	1	0,841	7,2500		10	7	7	0,886	7,4414
	10	1	3	0,842	7,2543		10	7	9	0,887	7,4456
	10	1	5	0,843	7,2586		10	7	10	0,888	7,4498
	10	1	6	0,844	7,2629		10	8	0	0,889	7,4540
	10	1	8	0,845	7,2672		10	8	2	0,890	7,4582
	10	1	10	0,846	7,2715		10	8	4	0,891	7,4624
	10	2	0	0,847	7,2758		10	8	5	0,892	7,4666
	10	2	1	0,848	7,2801		10	8	7	0,893	7,4708
	10	2	3	0,849	7,2844		10	8	9	0,894	7,4750
	10	2	5	0,850	7,2887		10	8	11	0,895	7,4791
	10	2	7	0,851	7,2930		10	9	0	0,896	7,4833
	10	2	8	0,852	7,2973		10	9	2	0,897	7,4875
	10	2	10	0,853	7,3015		10	9	4	0,898	7,4917
	10	3	0	0,854	7,3058		10	9	5	0,899	7,4958
	10	3	1	0,855	7,3101		10	9	7	0,900	7,5000

Fallhöhe					Geschw.	Fallhöhe					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	10	9	9	0,901	7,5042		11	4	3	0,946	7,6893
	10	9	11	0,902	7,5083		11	4	4	0,947	7,6933
	10	10	0	0,903	7,5125		11	4	6	0,948	7,6974
	10	10	2	0,904	7,5166		11	4	8	0,949	7,7015
	10	10	4	0,905	7,5208		11	4	10	0,950	7,7055
	10	10	6	0,906	7,5250		11	4	11	0,951	7,7096
	10	10	7	0,907	7,5291		11	5	1	0,952	7,7136
	10	10	9	0,908	7,5333		11	5	3	0,953	7,7177
	10	10	11	0,909	7,5374		11	5	5	0,954	7,7217
	10	11	0	0,910	7,5416		11	5	6	0,955	7,7258
	10	11	2	0,911	7,5457		11	5	8	0,956	7,7298
	10	11	4	0,912	7,5498		11	5	10	0,957	7,7339
	10	11	6	0,913	7,5540		11	5	11	0,958	7,7379
	10	11	7	0,914	7,5581		11	6	1	0,959	7,7419
	10	11	9	0,915	7,5622		11	6	3	0,960	7,7460
	10	11	11	0,916	7,5664		11	6	5	0,961	7,7500
	11	0	1	0,917	7,5705		11	6	6	0,962	7,7540
	11	0	2	0,918	7,5746		11	6	8	0,963	7,7581
	11	0	4	0,919	7,5788		11	6	10	0,964	7,7621
	11	0	6	0,920	7,5829		11	7	0	0,965	7,7661
	11	0	7	0,921	7,5870		11	7	1	0,966	7,7701
	11	0	9	0,922	7,5911		11	7	3	0,967	7,7742
	11	0	11	0,923	7,5952		11	7	5	0,968	7,7782
	11	1	1	0,924	7,5993		11	7	6	0,969	7,7822
	11	1	2	0,925	7,6035		11	7	8	0,970	7,7862
	11	1	4	0,926	7,6076		11	7	10	0,971	7,7902
	11	1	6	0,927	7,6117		11	8	0	0,972	7,7942
	11	1	8	0,928	7,6158		11	8	1	0,973	7,7982
	11	1	9	0,929	7,6199		11	8	3	0,974	7,8022
	11	1	11	0,930	7,6240		11	8	5	0,975	7,8063
	11	2	1	0,931	7,6281		11	8	7	0,976	7,8102
	11	2	2	0,932	7,6322		11	8	8	0,977	7,8142
	11	2	4	0,933	7,6363		11	8	10	0,978	7,8182
	11	3	6	0,934	7,6404		11	9	0	0,979	7,8222
	11	2	8	0,935	7,6444		11	9	1	0,980	7,8262
	11	2	9	0,936	7,6485		11	9	3	0,981	7,8302
	11	2	11	0,937	7,6526		11	9	5	0,982	7,8342
	11	3	1	0,938	7,6567		11	9	7	0,983	7,8382
	11	3	3	0,939	7,6608		11	9	8	0,984	7,8422
	11	3		0,940	7,6649		11	9	10	0,985	7,8462
	11	3	6	0,941	7,6689		11	10	0	0,986	7,8502
	11	3	8	0,942	7,6730		11	10	2	0,987	7,8541
	11	3	10	0,943	7,6771		11	10	3	0,988	7,8581
	11	3	11	0,944	7,6811		11	10	5	0,989	7,8621
	11	4	1	0,945	7,6852		11	10	7	0,990	7,8661

Fallhöhe					Geschw.	Fallhöhe					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
	11	10	8	0,991	7,8700	1	4	3	10	1,36	9,2195
	11	10	10	0,992	7,8740	1	4	5	3	1,37	9,2534
	11	11	0	0,993	7,8780	1	4	6	9	1,38	9,2871
	11	11	2	0,994	7,8819	1	4	8	2	1,39	9,3207
	11	11	3	0,995	7,8859	1	4	9	7	1,40	9,3541
	11	11	5	0 996	7,8899	1	4	11	0	1,41	9,3875
	11	11	7	0 997	7,8938	1	5	0	6	1,42	9,4207
	11	11	9	0.998	7,8978	1	5	1	11	1,43	9,4538
	11	11	10	0,999	7,9017	1	5	3	4	1,44	9,4868
1	0	0	0	1,000	7,9057	1	5	4	10	1,45	9,5197
1	0	1	5	1,01	7,9451	1	5	6	3	1,46	9,5525
1	0	2	11	1,02	7,9844	1	5	7	8	1,47	9,5852
1	0	4	4	1,03	8,0234	1	5	9	1	1,48	9,6177
1	0	5	9	1 04	8,0622	1	5	10	7	1,49.	9.6502
1	0	7	2	1 05	8,1009	1	6	0	0	1,50	9,6825
1	0	8	8	1,06	8,1394	1	6	1	5	1,51	9,7147
1	0	10	1	1,07	8,1777	1	6	2	11	1,52	9,7468
1	0	11	6	1 08	8,2158	1	6	4	4	1,53	9,7788
1	1	1	0	1,09	8,2538	1	6	5	9	1,54	9,8107
1	1	2	5	1,10	8,2916	1	6	7	2	1,55	9,8425
1	1	3	10	1,11	8,3292	1	6	8	8	1,56	9,8742
1	1	5	3	1,12	8,3666	1	6	10	1	1,57	9,9058
1	1	6	9	1,13	8,4039	1	6	11	6	1,58	9,9373
1	1	8	2	1,14	8,4410	1	7	1	0	1,59	9,9687
1	1	9	7	1,15	8,4779	1	7	2	5	1,60	10,0000
1	1	11	0	1,16	8,5147	1	7	3	10	1,61	10,0312
1	2	0	6	1,17	8,5513	1	7	5	3	1,62	10,0623
1	2	1	11	1,18	8 5878	1	7	6	9	1,63	10,0933
1	2	3	4	1,19	8,6241	1	7	8	2	1,64	10,1242
1	2	4	10	1,20	8,6602	1	7	9	7	1,65	10,1550
1	2	6	3	1,21	8,6962	1	7	11	0	1,66	10,1858
1	2	7	8	1,22	8,7321	1	8	0	6	1,67	10,2164
1	2	9	1	1,23	8,7678	1	8	1	11	1,68	10,2470
1	2	10	7	1,24	8,8034	1	8	3	4	1,69	10,2774
1	3	0	0	1,25	8,8388	1	8	4	10	1,70	10,3078
1	3	1	5	1,26	8,8741	1	8	6	3	1,71	10,3380
1	3	2	11	1,27	8,9093	1	8	7	8	1,72	10,3682
1	3	4	4	1 28	8,9443	1	8	9	1	1,73	10,3983
1	3	5	9	1,29	8,9792	1	8	10	7	1,74	10,4283
1	3	7	2	1,30	9,0139	1	9	0	0	1,75	10,4533
1	3	8	8	1,31	9,0485	1	9	1	5	1,76	10,4881
1	3	10	1	1,32	9,0830	1	9	2	11	1,77	10,5178
1	3	11	6	1,33	9,1173	1	9	4	4	1,78	10,5475
1	4	1	0	1,34	9,1515	1	9	5	9	1,79	10,5771
1	4	2	5	1,35	9,1856	1	9	7	2	1,80	10,6066

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
1	9	8	8	1,81	10,6360
1	9	10	1	1,82	10,6654
1	9	11	6	1,83	10,6946
1	10	1	0	1,84	10,7238
1	10	2	5	1,85	10,7529
1	10	3	10	1,86	10,7819
1	10	5	3	1,87	10,8108
1	10	6	9	1,88	10,8397
1	10	8	2	1,89	10,8685
1	10	9	7	1,90	10,8972
1	10	11	0	1,91	10,9259
1	11	0	6	1,92	10,9545
1	11	1	11	1,93	10,9830
1	11	3	4	1,94	11,0114
1	11	4	10	1,95	11,0397
1	11	6	3	1,96	11,0680
1	11	7	8	1,97	11,0962
1	11	9	1	1,98	11,1243
1	11	10	7	1,99	11,1523
2	0	0	0	2,00	11,1803
2	0	1	5	2,01	11,2082
2	0	2	11	2,02	11,2361
2	0	4	4	2,03	11,2639
2	0	5	9	2,04	11,2916
2	0	7	2	2,05	11,3192
2	0	8	8	2,06	11,3468
2	0	10	1	2,07	11,3743
2	0	11	6	2,08	11,4018
2	1	1	0	2,09	11,4291
2	1	2	5	2,10	11,4564
2	1	3	10	2,11	11,4837
2	1	5	3	2,12	11,5109
2	1	6	9	2,13	11,5380
2	1	8	2	2,14	11,5650
2	1	9	7	2,15	11,5920
2	1	11	0	2,16	11,6190
2	2	0	6	2,17	11,6458
2	2	1	11	2,18	11,6726
2	2	3	4	2,19	11,6993
2	2	4	10	2,20	11,7260
2	2	6	3	2,21	11,7526
2	2	7	8	2,22	11,7792
2	2	9	1	2,23	11,8057
2	2	10	7	2,24	11,8322
2	3	0	0	2,25	11,8586
2	3	1	5	2,26	11,8849
2	3	2	11	2,27	11,9112
2	3	4	4	2,28	11,9373
2	3	5	9	2,29	11,9635
2	3	7	2	2,30	11,9896
2	3	8	8	2,31	12,0156
2	3	10	1	2,32	12,0416
2	3	11	6	2,33	12,0675
2	4	1	0	2,34	12,0934
2	4	2	5	2,35	12,1192
2	4	3	10	2,36	12,1450
2	4	5	3	2,37	12,1707
2	4	6	9	2,38	12,1963
2	4	8	2	2,39	12,2219
2	4	9	7	2,40	12,2474
2	4	11	0	2,41	12,2729
2	5	0	6	2,42	12,2984
2	5	1	11	2,43	12,3238
2	5	3	4	2,44	12,3491
2	5	4	10	2,45	12,3744
2	5	6	3	2,46	12,3996
2	5	7	8	2,47	12,4248
2	5	9	1	2,48	12,4499
2	5	10	7	2,49	12,4750
2	6	0	0	2,50	12,5000
2	6	1	5	2,51	12,5250
2	6	2	11	2,52	12,5499
2	6	4	4	2,53	12,5748
2	6	5	9	2,54	12,5996
2	6	7	2	2,55	12,6244
2	6	8	8	2,56	12,6491
2	6	10	1	2,57	12,6738
2	6	11	6	2,58	12,6984
2	7	1	0	2,59	12,7230
2	7	2	5	2,60	12,7475
2	7	3	10	2,61	12,7720
2	7	5	3	2,62	12,7965
2	7	6	9	2,63	12,8209
2	7	8	2	2,64	12,8452
2	7	9	7	2,65	12,8695
2	7	11	0	2,66	12,8938
2	8	0	6	2,67	12,9180
2	8	1	11	2,68	12,9422
2	8	3	4	2,69	12,9663
2	8	4	10	2,70	12,9904

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
2	8	6	3	2,71	13,0144	3	1	11	0	3,16	14,0535
2	8	7	8	2,72	13,0384	3	2	0	6	3,17	14,0757
2	8	9	1	2,73	13,0624	3	2	1	11	3,18	14,0979
2	8	10	7	2,74	13,0963	3	2	3	4	3,19	14,1200
2	9	0	0	2,75	13,1101	3	2	4	10	3,20	14,1421
2	9	1	5	2,76	13,1339	3	2	6	3	3,21	14,1642
2	9	2	11	2,77	13,1577	3	2	7	8	3,22	14,1863
2	9	4	4	2,78	13,1814	3	2	9	1	3,23	14,2083
2	9	5	9	2,79	13,2051	3	2	10	7	3,24	14,2302
2	9	7	2	2,80	13,2288	3	3	0	0	3,25	14,2522
2	9	8	8	2,81	13,2524	3	3	1	5	3,26	14,2741
2	9	10	1	2,82	13,2759	3	3	2	11	3,27	14,2960
2	9	11	6	2,83	13,2994	3	3	4	4	3,28	14,3178
2	10	1	0	2,84	13,3229	3	3	5	9	3,29	14,3396
2	10	2	5	2,85	13,3463	3	3	7	2	3,30	14,3614
2	10	3	10	2,86	13,3697	3	3	8	8	3,31	14,3832
2	10	5	3	2,87	13,3931	3	3	10	1	3,32	14,4049
2	10	6	9	2,88	13,4164	3	3	11	6	3,33	14,4266
2	10	8	2	2,89	13,4397	3	4	1	0	3,34	14,4482
2	10	9	7	2,90	13,4629	3	4	2	5	3,35	14,4698
2	10	11	0	2,91	13,4861	3	4	3	10	3,36	14,4914
2	11	0	6	2,92	13,5093	3	4	5	3	3,37	14,5129
2	11	1	11	2,93	13,5324	3	4	6	9	3,38	14,5344
2	11	3	4	2,94	13,5554	3	4	8	2	3,39	14,5559
2	11	4	10	2,95	13,5785	3	4	9	7	3,40	14,5774
2	11	6	3	2,96	13,6015	3	4	11	0	3,41	14,5988
2	11	7	8	2,97	13,6244	3	5	0	6	3,42	14,6202
2	11	9	1	2,98	13,6473	3	5	1	11	3,43	14,6416
2	11	10	7	2,99	13,6702	3	5	3	4	3,44	14,6629
3	0	0	0	3,00	13,6931	3	5	4	10	3,45	14,[illegible]842
3	0	1	5	3,01	13,7159	3	5	6	3	3,46	14,7054
3	0	2	11	3,02	13,7386	3	5	7	8	3,47	14,7267
3	0	4	4	3,03	13,7613	3	5	9	1	3,48	14,7479
3	0	5	9	3,04	13,7840	3	5	10	7	3,49	14,7691
3	0	7	2	3,05	13,8067	3	6	0	0	3,50	14,7902
3	0	8	8	3,06	13,8293	3	6	1	5	3,51	14,8113
3	0	10	1	3,07	13,8519	3	6	2	11	3,52	14,8324
3	0	11	6	3,08	13,8744	3	6	4	4	3,53	14,8535
3	1	1	0	3,09	13,8969	3	6	5	9	3,54	14,8745
3	1	2	5	3,10	13,9194	3	6	7	2	3,55	14,8955
3	1	3	10	3,11	13,9418	3	6	8	8	3,56	14,9164
3	1	5	3	3,12	13,9642	3	6	10	1	3,57	14,9374
3	1	6	9	3,13	13,9826	3	6	11	6	3,58	14,9583
3	1	8	2	3,14	14,0089	3	7	1	0	3,59	14,9792
3	1	9	7	3,15	14,0312	3	7	2	5	3,60	15,0000

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
3	7	3	10	3,61	15,0208	4	0	8	8	4,06	15,9295
3	7	5	3	3,62	15,0416	4	0	10	1	4,07	15,9491
3	7	6	9	3,63	15,0624	4	0	11	6	4,08	15,9687
3	7	8	2	3,64	15,0831	4	1	1	0	4,09	15,9882
3	7	9	7	3,65	15,1038	4	1	2	5	4,10	16,0078
3	7	11	0	3,66	15,1245	4	1	3	10	4,11	16,0273
3	8	0	6	3,67	15,1451	4	1	5	3	4,12	16,0468
3	8	1	11	3,68	15,1657	4	1	6	9	4,13	16,0662
3	8	3	4	3,69	15,1863	4	1	8	2	4,14	16,0857
3	8	4	10	3,70	15,2069	4	1	9	7	4,15	16,1051
3	8	6	3	3,71	15,2275	4	1	11	0	4,16	16,1245
3	8	7	8	3,72	15,2480	4	2	0	6	4,17	16,1439
3	8	9	1	3,73	15,2685	4	2	1	11	4,18	16,1632
3	8	10	7	3,74	15,2889	4	2	3	4	4,19	16,1825
3	9	0	0	3,75	15,3093	4	2	4	10	4,20	16,2018
3	9	1	5	3,76	15,3297	4	2	6	3	4,21	16,2211
3	9	2	11	3,77	15,3501	4	2	7	8	4,22	16,2404
3	9	4	4	3,78	15,3704	4	2	9	1	4,23	16,2596
3	9	5	9	3,79	15,3907	4	2	10	7	4,24	16,2788
3	9	7	2	3,80	15,4110	4	3	0	0	4,25	16,2980
3	9	8	8	3,81	15,4313	4	3	1	5	4,26	16,3171
3	9	10	1	3,82	15,4515	4	3	2	11	4,27	16,3363
3	9	11	6	3,83	15,4717	4	3	4	4	4,28	16,3554
3	10	1	0	3,84	15,4919	4	3	5	9	4,29	16,3745
3	10	2	5	3,85	15,5121	4	3	7	2	4,30	16,3936
3	10	3	10	3,86	15,5322	4	3	8	8	4,31	16,4126
3	10	5	3	3,87	15,5523	4	3	10	1	4,32	16,4317
3	10	6	9	3,88	15,5724	4	3	11	6	4,33	16,4507
3	10	8	2	3,89	15,5925	4	4	1	0	4,34	16,4697
3	10	9	7	3,90	15,6125	4	4	2	5	4,35	16,4886
3	10	11	0	3,91	15,6325	4	4	3	10	4,36	16,5076
3	11	0	6	3,92	15,6525	4	4	5	3	4,37	16,5265
3	11	1	11	3,93	15,6725	4	4	6	9	4,38	16,5454
3	11	3	4	3,94	15,6924	4	4	8	2	4,39	16,5642
3	11	4	10	3,95	15,7123	4	4	9	7	4,40	16,5831
3	11	6	3	3,96	15,7321	4	4	11	0	4,41	16,6019
3	11	7	8	3,97	15,7520	4	5	0	6	4,42	16,6208
3	11	9	1	3,98	15,7718	4	5	1	1	4,43	16,6395
3	11	10	7	3,99	15,7916	4	5	3	4	4,44	16,6583
4	0	0	0	4,00	15,8114	4	5	4	1	4,45	16,6771
4	0	1	5	4,01	15,8311	4	5	6	3	4,46	16,6958
4	0	2	11	4,02	15,8508	4	5	7	8	4,47	16,7145
4	0	4	4	4,03	15,8705	4	5	9	1	4,48	16,7332
4	0	5	9	4,04	15,8902	4	5	10	7	4,49	16,7519
4	0	7	2	4,05	15,9099	4	6	0	0	4,50	16,7705

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
4	6	1	5	4,51	16,7891	4	11	6	3	4,96	17,6068
4	6	2	11	4,52	16,8077	4	11	7	8	4,97	17,6245
4	6	4	4	4,53	16,8263	4	11	9	1	4,98	17,6423
4	6	5	9	4,54	16,8449	4	11	10	7	4,99	17,6600
4	6	7	2	4,55	16,8634	5	0	0	0	5,00	17,6776
4	6	8	8	4,56	16,8819	5	0	1	5	5,01	17,6953
4	6	10	1	4,57	16,9004	5	0	2	11	5,02	17,7130
4	6	11	6	4,58	16,9189	5	0	4	4	5,03	17,7306
4	7	1	0	4,59	16,9374	5	0	5	9	5,04	17,7482
4	7	2	5	4,60	16,9558	5	0	7	2	5,05	17,7658
4	7	3	10	4,61	16,9742	5	0	8	8	5,06	17,7834
4	7	5	3	4,62	16,9926	5	0	10	1	5,07	17,8009
4	7	6	9	4,63	17,0110	5	0	11	6	5,08	17,8185
4	7	8	2	4,64	17,0294	5	1	1	0	5,09	17,8360
4	7	9	7	4,65	17,0477	5	1	2	5	5,10	17,8535
4	7	11	0	4,66	17,0661	5	1	3	10	5,11	17,8710
4	8	0	6	4,67	17,0844	5	1	5	3	5,12	17,8885
4	8	1	11	4,68	17,1026	5	1	6	9	5,13	17,9060
4	8	3	4	4,69	17,1209	5	1	8	2	5,14	17,9234
4	8	4	10	4,70	17,1392	5	1	9	7	5,15	17,9408
4	8	6	3	4,71	17,1574	5	1	11	0	5,16	17,9583
4	8	7	8	4,72	17,1756	5	2	0	6	5,17	17,9757
4	8	9	1	4,73	17,1938	5	2	1	11	5,18	17,9930
4	8	10	7	4,74	17,2119	5	2	3	4	5,19	18,0104
4	9	0	0	4,75	17,2301	5	2	4	10	5,20	18,0278
4	9	1	5	4,76	17,2482	5	2	6	3	5,21	18,0451
4	9	2	11	4,77	17,2663	5	2	7	8	5,22	18,0624
4	9	4	4	4,78	17,2844	5	2	9	1	5,23	18,0797
4	9	5	9	4,79	17,3024	5	2	10	7	5,24	18,0970
4	9	7	2	4,80	17,3205	5	3	0	0	5,25	18,1142
4	9	8	8	4,81	17,3385	5	3	1	5	5,26	18,1314
4	9	10	1	4,82	17,3565	5	3	2	11	5,27	18,1487
4	9	11	6	4,83	17,3745	5	3	4	4	5,28	18,1659
4	10	1	0	4,84	17,3925	5	3	5	9	5,29	18,1831
4	10	2	5	4,85	17,4104	5	3	7	2	5,30	18,2003
4	10	3	10	4,86	17,4284	5	3	8	8	5,31	18,2174
4	10	5	3	4,87	17,4463	5	3	10	1	5,32	18,2346
4	10	6	9	4,88	17,4642	5	3	11	6	5,33	18,2517
4	10	8	2	4,89	17,4821	5	4	1	0	5,34	18,2688
4	10	9	7	4,90	17,5000	5	4	2	5	5,35	18,2859
4	11	11	0	4,91	17,5178	5	4	3	10	5,36	18,3030
4	11	0	6	4,92	17,5356	5	4	5	3	5,37	18,3201
4	11	1	11	4,93	17,5534	5	4	6	9	5,38	18,3371
4	11	3	4	4,94	17,5712	5	4	8	2	5,39	18,3541
4	11	4	10	4,95	17,5890	5	4	9	7	5,40	18,3711

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
6	3	8	8	6,31	19,8589	6	9	1	5	6,76	20,5548
6	3	10	1	6,32	19,8746	6	9	2	11	6,77	20,5700
6	3	11	6	6,33	19,8903	6	9	4	4	6,78	20,5852
6	4	1	0	6,34	19,9060	6	9	5	9	6,79	20,6003
6	4	2	5	6,35	19,9217	6	9	7	2	6,80	20,6155
6	4	3	10	6,36	19,9374	6	9	8	8	6,81	20,6306
6	4	5	3	6,37	19,9531	6	9	10	1	6,82	20,6458
6	4	6	9	6,38	19,9687	6	9	11	6	6,83	20,6609
6	4	8	2	6,39	19,9844	6	10	1	0	6,84	20,6760
6	4	9	7	6,40	20,0000	6	10	2	5	6,85	20,6911
6	4	11	0	6,41	20,0156	6	10	3	10	6,86	20,7062
6	5	0	6	6,42	20,0312	6	10	5	3	6,87	20,7213
6	5	1	11	6,43	20,0468	6	10	6	9	6,88	20,7364
6	5	3	4	6,44	20,0624	6	10	8	2	6,89	20,7515
6	5	4	10	6,45	20,0779	6	10	9	7	6,90	20,7665
6	5	6	3	6,46	20 0935	6	10	11	0	6,91	20,7816
6	5	7	8	6,47	20,1091	6	11	0	6	6,92	20,7966
6	5	9	1	6,48	20,1246	6	11	1	11	6,93	20,8117
6	5	10	7	6,49	20,1401	6	11	3	4	6,94	20,8267
6	6	0	0	6,50	20,1556	6	11	4	10	6,95	20,8417
6	6	1	5	6,51	20,1711	6	11	6	3	6,96	20,8567
6	6	2	11	6,52	20,1866	6	11	7	8	6,97	20,8717
6	6	4	4	6,53	20,2021	6	11	9	1	6,98	20,8866
6	6	5	9	6,54	20,2176	6	11	10	7	6,99	20,9016
6	6	7	2	6,55	20,2331	7	0	0	0	7,00	20,9165
6	6	8	8	6,56	20,2485	7	0	1	5	7,01	20,9315
6	6	10	1	6,57	20,2639	7	0	2	11	7,02	20,9464
6	6	11	6	6,58	20,2793	7	0	4	4	7,03	20,9613
6	7	1	0	6,59	20,2947	7	0	5	9	7,04	20,9762
6	7	2	5	6,60	20,3101	7	0	7	2	7,05	20,9911
6	7	3	10	6,61	20,3254	7	0	8	8	7,06	21,0060
6	7	5	3	6,62	20,3408	7	0	10	1	7,07	21,0208
6	7	6	9	6,63	20,3562	7	0	11	6	7,08	21,0357
6	7	8	2	6,64	20,3715	7	1	1	0	7,09	21,0505
6	7	9	7	6,65	20,3868	7	1	2	5	7,10	21,0654
6	7	11	0	6,66	20,4022	7	1	3	10	7,11	21,0802
6	8	0	6	6,67	20,4175	7	1	5	3	7,12	21,0950
6	8	1	11	6,68	20,4328	7	1	6	9	7,13	21,1098
6	8	3	4	6,69	20,4481	7	1	8	2	7,14	21,1246
6	8	4	10	6,70	20,4634	7	1	9	7	7,15	21,1394
6	8	6	3	6,71	20,4786	7	1	11	0	7,16	21,1542
6	8	7	8	6,72	20,4939	7	2	0	6	7,17	21,1689
6	8	9	1	6,73	20,5091	7	2	1	11	7,18	21,1837
6	8	10	7	6,74	20,5244	7	2	3	4	7,19	21,1985
6	9	0	0	6,75	20,5396	7	2	4	10	7,20	21,2132

Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
7	2	6	3	7,21	21,2279
7	2	7	8	7,22	21,2426
7	2	9	1	7,23	21,2573
7	2	10	7	7,24	21,2720
7	3	0	0	7,25	21,2867
7	3	1	5	7,26	21,3014
7	3	2	11	7,27	21,3161
7	3	4	4	7,28	21,3307
7	3	5	9	7,29	21,3453
7	3	7	2	7,30	21,3600
7	3	8	8	7,31	21,3746
7	3	10	1	7,32	21,3892
7	3	11	6	7,33	21,4038
7	4	1	0	7,34	21,4184
7	4	2	5	7,35	21,4330
7	4	3	10	7,36	21,4476
7	4	5	3	7,37	21,4622
7	4	6	9	7,38	21,4767
7	4	8	2	7,39	21,4913
7	4	9	7	7,40	21,5058
7	4	11	0	7,41	21,5204
7	5	0	6	7,42	21,5349
7	5	1	11	7,43	21,5494
7	5	3	4	7,44	21,5639
7	5	4	10	7,45	21,5784
7	5	6	3	7,46	21,5929
7	5	7	8	7,47	21,6073
7	5	9	1	7,48	21,6218
7	5	10	7	7,49	21,6362
7	6	0	0	7,50	21,6507
7	6	1	5	7,51	21,6651
7	6	2	11	7,52	21,6795
7	6	4	4	7,53	21,6939
7	6	5	9	7,54	21,7083
7	6	7	2	7,55	21,7227
7	6	8	8	7,56	21,7371
7	6	10	1	7,57	21,7515
7	6	11	6	7,58	21,7658
7	7	1	0	7,59	21,7802
7	7	2	5	7,60	21,7945
7	7	3	10	7,61	21,8088
7	7	5	3	7,62	21,8232
7	7	6	9	7,63	21,8375
7	7	8	2	7,64	21,8518
7	7	9	7	7,65	21,8661
7	7	11	0	7,66	21,8804
7	8	0	6	7,67	21,8946
7	8	1	11	7,68	21,9089
7	8	3	4	7,69	21,9242
7	8	4	10	7,70	21,9374
7	8	6	3	7,71	21,9516
7	8	7	8	7,72	21,9659
7	8	9	1	7,73	21,9801
7	8	10	7	7,74	21,9943
7	9	0	0	7,75	22,0085
7	9	1	5	7,76	22,0227
7	9	2	11	7,77	22,0369
7	9	4	4	7,78	22,0511
7	9	5	9	7,79	22,0652
7	9	7	2	7,80	22,0794
7	9	8	8	7,81	22,0935
7	9	10	1	7,82	22,1077
7	9	11	6	7,83	22,1218
7	10	1	0	7,84	22,1359
7	10	2	5	7,85	22,1500
7	10	3	10	7,86	22,1641
7	10	5	3	7,87	22,1782
7	10	6	9	7,88	22,1923
7	10	8	2	7,89	22,2064
7	10	9	7	7,90	22,2205
7	10	11	0	7,91	22,2346
7	11	0	6	7,92	22,2486
7	11	1	11	7,93	22,2626
7	11	3	4	7,94	22,2767
7	11	4	10	7,95	22,2907
7	11	6	3	7,96	22,3047
7	11	7	8	7,97	22,3187
7	11	9	1	7,98	22,3327
7	11	10	7	7,99	22,3467
8	0	0	0	8,00	22,3607
8	0	1	5	8,01	22,3747
8	0	2	11	8,02	22,3886
8	0	4	4	8,03	22,4026
8	0	5	9	8,04	22,4165
8	0	7	2	8,05	22,4305
8	0	8	8	8,06	22,4444
8	0	10	1	8,07	22,4583
8	0	11	6	8,08	22,4722
8	1	1	0	8,09	22,4861
8	1	2	5	8,10	22,5000

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
8	1	3	10	8,11	22,5139	8	6	8	8	8,56	23,1301
8	1	5	3	8,12	22,5278	8	6	10	1	8,57	23,1436
8	1	6	9	8,13	22,5416	8	6	11	6	8,58	23,1571
8	1	8	2	8,14	22,5555	8	7	1	0	8,59	23,1706
8	1	9	7	8,15	22,5694	8	7	2	5	8,60	23,1841
8	1	11	0	8,16	22,5832	8	7	3	10	8,61	23,1975
8	2	0	6	8,17	22,5970	8	7	5	3	8,62	23,2110
8	2	1	11	8,18	22,6108	8	7	6	9	8,63	23,2245
8	2	3	4	8,19	22,6247	8	7	8	2	8,64	23,2379
8	2	4	10	8,20	22,6385	8	7	9	7	8,65	23,2513
8	2	6	3	8,21	22,6523	8	7	11	0	8,66	23,2648
8	2	7	8	8,22	22,6661	8	8	0	6	8,67	23,2782
8	2	9	1	8,23	22,6798	8	8	1	11	8,68	23,2916
8	2	10	7	8,24	22,6936	8	8	3	4	8,69	23,3050
8	3	0	0	8,25	22,7074	8	8	4	10	8,70	23,3184
8	3	1	5	8,26	22,7211	8	8	6	3	8,71	23,3318
8	3	2	11	8,27	22,7349	8	8	7	8	8,72	23,3452
8	3	4	4	8,28	22,7486	8	8	9	1	8,73	23,3586
8	3	5	9	8,29	22,7624	8	8	10	7	8,74	23,3720
8	3	7	2	8,30	22,7761	8	9	0	0	8,75	23,3853
8	3	8	8	8,31	22,7898	8	9	1	5	8,76	23,3987
8	3	10	1	8,32	22,8035	8	9	2	11	8,77	23,4121
8	3	11	6	8,33	22,8172	8	9	4	4	8,78	23,4254
8	4	1	0	8,34	22,8309	8	9	5	9	8,79	23,4388
8	4	2	5	8,35	22,8446	8	9	7	2	8,80	23,4521
8	4	3	10	8,36	22,8583	8	9	8	8	8,81	23,4654
8	4	5	3	8,37	22,8719	8	9	10	1	8,82	23,4787
8	4	6	9	8,38	22,8856	8	9	11	6	8,83	23,4920
8	4	8	2	8,39	22,8993	8	10	1	0	8,84	23,5053
8	4	9	7	8,40	22,9129	8	10	2	5	8,85	23,5186
8	4	11	0	8,41	22,9265	8	10	3	10	8,86	23,5319
8	5	0	6	8,42	22,9402	8	10	5	3	8,87	23,5452
8	5	1	11	8,43	22,9538	8	10	6	9	8,88	23,5584
8	5	3	4	8,44	22,9674	8	10	8	2	8,89	23,5717
8	5	4	10	8,45	22,9810	8	10	9	7	8,90	23,5849
8	5	6	3	8,46	22,9946	8	10	11	0	8,91	23,5982
8	5	7	8	8,47	23,0081	8	11	0	6	8,92	23,6114
8	5	9	1	8,48	23,0217	8	11	1	11	8,93	23,6247
8	5	10	7	8,49	23,0353	8	11	3	4	8,94	23,6379
8	6	0	0	8,50	23,0489	8	11	4	10	8,95	23,6511
8	6	1	5	8,51	23,0624	8	11	6	3	8,96	23,6643
8	6	2	11	8,52	23,0760	8	11	7	8	8,97	23,6775
8	6	4	4	8,53	23,0895	8	11	9	1	8,98	23,6907
8	6	5	9	8,54	23,1031	8	11	10	7	8,99	23,7039
8	6	7	2	8,55	23,1166	9	0	0	0	9,00	23,7171

Fallhöhe.					Geschw.	Fallhöhe.					Geschw.
F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.	F.	Z.	L.	S.	Fuß.	Fuß.
9	10	11	0	9,91	24,8873	9	11	6	3	9,96	24,9500
9	11	0	6	9,92	24,8998	9	11	7	8	9,97	24,9625
9	11	1	11	9,93	24,9124	9	11	9	1	9,98	24,9750
9	11	3	4	9,94	24,9249	9	11	10	7	9,99	24,9875
9	11	4	10	9,95	24,9374	10	0	0	0	10,00	25,0000

Erste Abtheilung.

Die Mechanik fester Körper.

Einleitung.

1. §.

Wenn ein Körper sich bewegt, oder sich zu bewegen strebt, so muß eine Ursache vorhanden seyn, welche die Bewegung oder das Bestreben zur Bewegung hervor bringt. Diese Ursache nennt man Kraft (Vis, *Force*), obgleich ganz allgemein jedes Vermögen zu wirken mit dem Namen Kraft belegt wird. Hier ist aber nur von den zuerst erwähnten Kräften die Rede.

Die Kräfte selbst kennt man nur aus ihren Wirkungen, welche darin bestehen, daß sie einen Körper schnell oder langsam bewegen, oder gegen einen andern Körper, welcher die Bewegung zu hindern strebt, stärker oder schwächer pressen; und nur durch dergleichen Wirkungen ist man im Stande von der Größe einer Kraft zu urtheilen. Aus diesem Grunde erlaubt man sich auch, den Ausdruck Kraft zu brauchen, wenn man eigentlich nur von Wirkung spricht.

Diejenige Wissenschaft, welche von den Bewegungen der Körper und den Wirkungen der Kräfte handelt, heißt die **Mechanik** (Mechanica); wird sie auf feste Körper eingeschränkt, so entsteht die **Geomechanik** oder **Mechanik fester Körper**. (Mechanica corporum rigidorum, *Mécanique des corps solides*).

Anmerk. Wenn lediglich von Bewegung ohne Rücksicht auf Kraft die Rede ist, so entstehet die **Phoronomie** (Phoronomia). Die Lehre von den bewegenden Kräften, heißt die **Dynamik** (Dynamica).

2. §.

Befindet sich ein Körper in Ruhe, so kann man nicht einsehen daß er ohne eine Ursache seinen Ort verändern oder sich bewegen sollte; oder mit andern Worten, es muß eine Kraft auf ihn wirken, welche ihn in Bewegung setzt. Und wenn ein Körper einmal in Bewegung ist, und auf seinem Wege nirgends Hindernisse antrift, die auf seine Bewegung einen Einfluß haben; so läßt es sich nicht denken, daß ohne Ursache eine Veränderung in seiner Bewegung entstehen sollte, und er muß daher mit derselben Richtung und Geschwindigkeit ohne Ende fortgehen.

Dieses Gesetz, nach welchem Körper ihren Zustand behalten, heißt das **Gesetz der Trägheit** (lex inertiae), oder weil sich Trägheit mehr auf Ruhe als auf Bewegung beziehet, ihr **Behar-**

rungsvermögen (Beharrungszustand, oder Beharrlichkeit). Die Trägheit ist daher keine Kraft, weil sie für sich allein keine Bewegung hervorbringen kann.

Hat eine Kraft einen Körper in Bewegung gesetzt, so bedarf es, in so fern keine Hindernisse vorhanden sind, welche die Bewegung aufhalten, keiner fernern Einwirkung der Kraft zur Unterhaltung der Bewegung, sondern der Körper wird wegen seiner Trägheit oder seines Beharrungsvermögens die Bewegung fortsetzen.

Anmerk. Daß dieses nicht bei einem horizontal geworfenen Körpet auf unserer Erde Statt findet, wird sich in der Folge erklären lassen, weil außer der Kraft, welche den Körper horizontal fortschleudert, noch andere Kräfte auf ihn wirken und die mitgetheilte Bewegung ändern.

3. §.

Dasjenige, wodurch die Bewegung eines Körpers ganz oder zum Theil aufgehoben wird, nennt man Widerstand (Resistentia). Man kann daher den Widerstand als eine entgegengesetzte Kraft oder als Gegenwirkung (Reactio) ansehen, welche der Wirkung gleich und entgegengesetzt ist.

Wenn eine Kraft einen ruhenden Körper zu bewegen strebt und ein Widerstand die Bewegung verhindert, so heißt dasjenige, was der widerstehende Körper leidet, Druck (*Pressio*, *Pressement*), welcher

sich allemal mit einem Gewichte (Pondus, *Poids*) vergleichen läßt. Ist hingegen ein Körper schon durch eine Kraft bewegt, und er trift plötzlich ein Hinderniß, so heißt diese Wirkung Stoß (Percussio, *Choc*).

Anmerk. Maschinen, die sich nach einerlei Richtung umdrehen, bleiben vermöge der Trägheit der Materie in Bewegung, und würden sie ohne Aufhören fortsetzen, wenn kein Widerstand vorhanden wäre.

Erstes Kapitel.

Von der gleichförmigen Bewegung.

4. §.

Bewegt sich ein Körper in einer geraden Linie, so ist diese die **Richtung** (Directio) seiner Bewegung; ist der Weg aber eine krumme Linie, so ist die Berührungslinie in demjenigen Punkt des Weges, wo sich der Körper befindet, seine Richtung.

Durchläuft ein Körper in gleichen Zeiten gleiche Räume, so sagt man: seine Bewegung ist **gleichförmig** (Motus uniformis s. aequabilis, *Mouvement uniforme*); welches der Fall bei jedem in Bewegung befindlichen Körper ist, wenn auf denselben keine Kräfte wirken.

Um von der Bewegung eines Körpers zu urtheilen, muß man den Raum kennen, welchen er in einer bestimmten Zeit durchläuft. Je größer dieser Raum für einerlei Zeit ist, desto größer ist seine Geschwindigkeit, und man pflegt gewöhnlich den in einer Sekunde durchlaufenen Raum als **Maß der Geschwindigkeit** anzunehmen. Daher nennt man auch den Raum, durch welchen sich ein Körper in einer Sekunde bewegt, seine **Geschwindigkeit** (Celeritas, Velocitas, *Vitesse*).

Bewegen sich zwei Körper gleichförmig in einerlei geraden Linie, so kann man die Bewegung dieser Körper in Bezug auf einander untersuchen und fragen, wie viel sie sich in jeder Sekunde genähert oder von einander entfernt haben. Dieser Raum wird alsdann die **relative Ge-**

schwindigkeit genannt, und ist mit der absoluten Geschwindigkeit oder dem Raume nicht zu verwechseln, welchen der Körper wirklich in jeder Sekunde durchlaufen hat.

Anmerk. Haben zwei Körper gleiche Geschwindigkeit, indem sie sich nach einerlei Richtung bewegen, so ist ihre relative Geschwindigkeit = 0, obgleich ihre absolute sehr groß seyn kann.

5. §.

Man setze daß jetzt und in der Folge jede Zeit durch Sekunden ausgedrückt werde, und daß

R den Raum bezeichnet, welchen ein Körper in der Zeit
T mit der Geschwindigkeit
C durchläuft, so verhält sich

$$1 : T = C : R$$

woraus nachstehende drei Hauptsätze folgen:

$$\text{I.} \quad R = CT.$$

$$\text{II.} \quad C = \frac{R}{T}.$$

$$\text{III.} \quad T = \frac{R}{C}.$$

1. Beispiel. Ein Körper hat sich mit einer Geschwindigkeit von 5 Fuß während 46 Sekunden bewegt, wie groß ist der in dieser Zeit durchlaufene Raum?

$$5 \cdot 46 = 230 \text{ Fuß.}$$

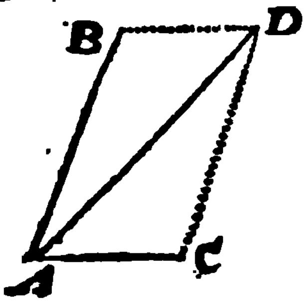
2. Beispiel. Wenn in der Zeit von 3 Minuten 200 Fuß von einem Körper durchlaufen werden, wie groß ist seine Geschwindigkeit?

$$\frac{200}{180} = 1\tfrac{1}{9} \text{ Fuß.}$$

3. Beispiel. Wie viel Zeit gebraucht ein Körper, um mit $2\frac{1}{2}$ Fuß Geschwindigkeit einen Raum von 360 Fuß zu durchlaufen?

$$\frac{360}{2\frac{1}{2}} = 144 \text{ Sekunden} = 2\tfrac{2}{5} \text{ Minuten.}$$

6. §.



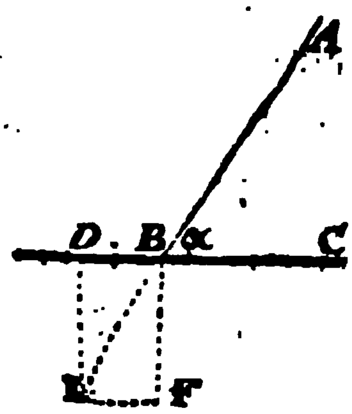
Wenn ein Körper in A nach der Richtung AB eine Bewegung erhält, deren Geschwindigkeit durch die Linie AB, und auch zugleicher Zeit nach einer andern Richtung AC unter dem Winkel BAC eine andere Bewegung, deren Geschwindigkeit durch die Linie AC ausgedrückt ist, so müßte er nach Verlauf einer Sekunde einen Weg AB nach der Richtung AB und zugleich einen Weg AC nach dieser Richtung durchlaufen haben.

Man zeichne das Parallelogramm ABDC, so ist D der Ort, wo sich der Körper am Ende der Sekunde befindet. Denn, wenn er nur die Geschwindigkeit AB hätte, so müßte er sich in B befinden, wenn er nicht durch die Bewegung nach AC, von seiner Richtung nach AB abgelenkt würde. Aber in einer Sekunde wird er um den Weg AC = BD von AB abgelenkt, daher kann nur D der gesuchte Ort seyn. Weil nun diese Schlüsse von jeder kleineren und größeren Zeit gelten, so ist AD die Richtung und **mittlere Geschwindigkeit**, welche aus den beiden **Seiten-Geschwindigkeiten** AB und AC zusammengesetzt ist.

Umgekehrt kann man sich jede Geschwindigkeit wieder in Seiten-Geschwindigkeiten zerlegt vorstellen.

Anmerk. Was in der Statik das Parallelogramm der Kräfte ist, ist hier das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, und die hierher gehörigen Rechnungen werden auf eine ähnliche Art ausgeführt.

7. §.



Bewegt sich ein Körper nach der Richtung AB mit der Geschwindigkeit C, und trift in B ein Hinderniß CD unter einem Winkel ABC = α; so wird er durch diese plötzliche Ablenkung von seiner ursprünglichen Richtung einen Theil seiner Geschwindigkeit verlieren. Man nehme BE = C und zeichne das Rechteck BEDF, so wird die auf

CD senkrechte Geschwindigkeit BF, vom Hinderniß BC aufgehoben, und der Körper behält nur noch, nach der Richtung BD, die Geschwindigkeit

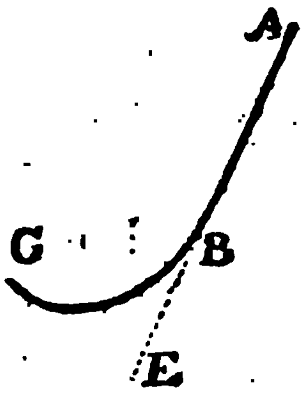
$$BD = C \operatorname{Cos} \alpha$$

Weil $\operatorname{Cos} \alpha = 1 - \text{Sin.vers. } \alpha$, so ist

$$BD = C - C \text{ Sin.vers. } \alpha$$

folglich hat der Körper durch die Ablenkung von seiner Bahn die Geschwindigkeit C Sin.vers. α verloren.

8. §.



Trift der Körper in seiner Bahn auf ein Hinderniß, welches ihn nöthigt die krumme Linie BG, die seine vorherige Richtung AB in B tangentirt, zu durchlaufen, so wird in diesem Falle keine Verminderung der Geschwindigkeit Statt finden, weil $\alpha = 0$, also Sin.vers. $\alpha = 0$ ist.

Zweites Kapitel.

Von der beschleunigten Bewegung und dem freien Falle der Körper.

9. §.

Wenn ein Körper sich so bewegt, daß er in allen auch noch so kleinen gleich großen Zeittheilchen gleich viel Zusatz an Geschwindigkeit erhält, so heißt dieses eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (Motus uniformiter acceleratus, *Mouvement uniformément accéléré*); wäre die Zunahme an Geschwindigkeit in gleichen Zeiten nicht gleich groß, eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung (Motus inaequabiliter acceleratus, *Mouv. inégal. accéléré*).

Ist hingegen die Bewegung eines Körpers so beschaffen, daß er in gleichen Zeiten gleich viel an seiner Geschwindigkeit verliert, so ist dieses eine gleichförmig verminderte Bewegung (Motus unif. retardatus, *Mouv. unif. retardé.*

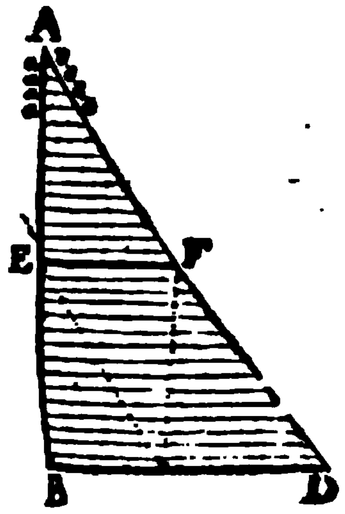
Weil bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ein Körper in gleichen Zeiten gleiche Zusätze an Geschwindigkeit erhält, so müssen sich auch die vom Anfang der Bewegung verflossenen Zeiten, wie die erlangten Geschwindigkeiten verhalten.

10. §.

Eine Kraft, welche fortwährend und überall gleich stark auf einen Körper wirkt, er mag ruhen, sich schnell oder langsam bewegen, heißt eine beständige oder absolute Kraft (Vis constans, *Force constante*). Wenn hingegen eine Kraft anders in einen ruhenden, und anders in einen verschiedentlich bewegten Körper wirkt, so heißt sie eine relative oder veränderliche Kraft (Vis variabilis, *Force variable*).

Eine jede beständige Kraft, welche auf einen bewegten Körper wirkt, verursacht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, weil sie ihn, er mag sich langsam oder schnell bewegen, immer mit gleicher Stärke fortzutreiben strebt, und ihm dadurch in gleichen Zeiten gleichen Zusatz an Geschwindigkeit mittheilt.

11. §.



Wenn ein Körper aus der Ruhe durch eine beständige Kraft getrieben, in der Zeit T den Weg S durchläuft, und am Ende der Zeit die Geschwindigkeit C erlangt hat, mit welcher er, wenn die Kraft nicht mehr auf ihn wirkte, vermöge seiner Trägheit in jeder folgenden Sekunde den Weg C durchlaufen würde, so muß er nach Verlauf der Zeit $\frac{1}{2}$ T, eine Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$ C besitzen. (9. §.)

Wird durch die Linie AB die Zeit T und durch BD die Geschwindigkeit C bezeichnet, so kann man sich die Zeit AB in lauter gleiche Theile Aa, aa, aa ꝛc. getheilt vorstellen, welche so klein als möglich angenommen werden müssen. Zieht man alsdenn AD, und durch alle Punkte A, a, a, ꝛc. Linien mit BD parallel, so bezeichnen die Linien ad, ad, ad ꝛc. die Geschwindigkeiten nach Verlauf der Zeiten Aa, Aa, Aa ꝛc. Für AE $= \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}$ T ist die Geschwindigkeit EF $= \frac{1}{2}$ C.

In der ersten Hälfte der Zeit ist die Summe sämmtlicher Geschwindigkeiten, der dritte Theil von der Summe in der zweiten Hälfte der Zeit T, weil in der dreimal größern Fläche EBDF, die Summe sämmtlicher Parallellinien dreimal so groß, als in der Fläche AEF ist. Der Körper kann aber nur vermöge dieser Geschwindigkeiten den Raum S durchlaufen, daher muß er auch in der ersten Hälfte der Zeit, den Raum $\frac{1}{4}$ S und in der zweiten Hälfte den Raum $\frac{3}{4}$ S durchlaufen haben.

An Ende der ersten Zeithälfte ist die erlangte Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$ C, und mit derselben würde der Körper, wenn die beständige Kraft nicht mehr auf ihn wirkte, allein wegen der Trägheit, in der zweiten Hälfte der Zeit, den Weg $\frac{1}{2}$ C . $\frac{1}{2}$ T $= \frac{1}{4}$ CT durchlaufen (5. §. I.) Weil aber die Kraft fortfährt zu wirken, und ihm eben solche Zusätze an Geschwindigkeit wie in der ersten Zeithälfte mittheilt, so muß auch der Weg, welchen er außer der erlangten Geschwindigkeit durchläuft, sich noch um eben so viel vermehren, als der Weg beträgt, den er in der ersten Hälfte zurücklegte. Nun ist der Weg in der ersten Zeithälfte $= \frac{1}{4}$ S, daher in der zweiten $\frac{1}{4}$ CT $+ \frac{1}{4}$ S, folglich der ganze Weg in der Zeit T

$$S = \frac{1}{4} S + \frac{1}{4} CT + \frac{1}{4} S \text{ oder}$$
$$S = \frac{1}{2} CT.$$

d. h. ein gleichförmig beschleunigter Körper erhält während der Bewegung durch den Raum S eine solche Geschwindigkeit, daß, wenn er sich mit derselben ohne Einwirkung der

beständigen Kraft eben so lange fortbewegt, er einen doppelt so großen Raum durchlaufen würde *).

12. §.

Für eine andere Zeit t sey der durchlaufene Raum s und die erlangte Geschwindigkeit c, so ist ebenfalls

$s = \frac{1}{2}\, ct$. Aber auch
$S = \frac{1}{2}\, CT$ daher
$s : S = ct : CT$. Nun verhält sich 9. §.
$t : T = c : C$ daher

I. $s : S = t^2 : T^2$ oder
II. $s : S = c^2 : C^2$

d. h. die von einem Körper mit gleichförmig beschleunigter Bewegung durchlaufenen Räume verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten; oder wie die Quadrate von den am Ende der Zeiten erlangten Geschwindigkeiten.

13. §.

Wirkt eine beständige Kraft auf einen unterstützten Körper, so wird derselbe durch sein Bestreben zur Bewegung einen Druck gegen die Unterlage verursachen, und nimmt man die Unterlage weg, so muß der Körper in Bewegung kommen.

Jeder Körper, mit welchem wir Versuche anstellen, drückt gegen seine Unterlage, und wenn diese weggenommen wird, so fällt er. Die Ursache dieses Drucks und der Be-

*) Dieser Satz kann vermittelst der höhern Analysis in aller Strenge erwiesen werden.

Hat nämlich der Körper in der ersten Sekunde die Geschwindigkeit k erlangt, so ist seine Geschwindigkeit nach t Sekunden $= kt = c$. Aber in der unendlich kleinen Zeit dt, kann der dazu gehörige unendlich kleine Raum ds als gleichförmig durchlaufen angesehen werden, es ist daher (5. §.) $ds = c dt = k t dt$; und wenn man integrirt

$s = \int k t dt = \frac{1}{2} k t^2 = \frac{1}{2} ct$, wo keine constante Größe hinzugefügt wird, weil für $t = 0$ auch $s = 0$ wird, oder weil Zeit, Geschwindigkeit und Weg zugleich anfangen.

wegung ist eine Kraft, welche die innersten Theile der Körper durchdringt und die wir die Schwere (Gravitas, *Gravité*) nennen. Da nun kein Grund vorhanden ist, weshalb die Schwere nicht auf jedes einzelne Theilchen der Materie zu allen Zeiten gleich stark wirken sollte, so ist für die Körper nahe an der Oberfläche der Erde die Schwere eine beständige Kraft.

Wenn man zwei einzelne gleiche Theile eines Körpers nimmt, so werden solche gegen eine Unterlage doppelt so stark drücken als eins derselben, bei der Bewegung aber wird die Schwere eins wie das andere beschleunigen, daher fällt ein Körper von größerer Masse, wenn nichts seine Bewegung hindert, eben so schnell, als ein Körper von weit geringerer Masse.

Anmerk. Daß in der freien Luft ein Goldstück schneller als eine Feder fällt, daran ist die Luft schuld, welche die Bewegung der Feder mehr verzögert. Dagegen sind im luftleeren Raume die Zeiten des Falles gleich.

Vormals glaubte man, daß sich die Geschwindigkeiten fallender Körper wie die Gewichte derselben verhielten, bis Galilei diese Unrichtigkeit widerlegte.

14. §.

In so fern man die Schwere als eine beständige Kraft ansehen kann, so gelten auch von ihr die vorhin erwiesenen Sätze. Nun hat man aus der Erfahrung mit dem Pendel (84. §.) den Raum, welchen ein Körper nahe an der Erd-Oberfläche in der ersten Sekunde frei fällt, $15\frac{5}{8}$ rheinländ. oder preuß. Fuß gefunden, woraus sich die folgenden Sätze für den freien Fall der Körper (Descensus corporum gravium, *Chûte des corps graves*) ableiten lassen, wenn man unter

g g die Zahl $15\frac{5}{8}$ verstehet.

Anmerk. Näher an dem Aequator wird g kleiner, und weiter nach den Polen hin größer, diese Unterschiede sind aber für unsere Gegenden so klein, daß sie hier sehr wohl bei Seite gesetzt werden können. Die verschiedenen Werthe von g betreffend, sehe man Gehler Physikalisches Wörterbuch, 3ter Theil Art. Pendel.

15. §.

Man setze die Höhe, von welcher ein Körper frei herunter fällt $= h$, die Zeit des Falles $= t$ und die am Ende h
dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit $= c$, so ist (11. §.) t
die Fallhöhe c

$$\text{I.} \quad h = \tfrac{1}{2}\, ct$$

Nach 12. §. I. verhält sich

$$1 : t^2 = g : h \quad \text{daher}$$

$$\text{II.} \quad h = gt^2 = 15\tfrac{5}{8}\, t^2 = 15{,}625\, t^2.$$

Aus I. folgt $t = \frac{2h}{c}$ also $t^2 = \frac{4h^2}{c^2}$, setzt man diesen Ausdruck statt t^2 in II. so findet man

$$\text{III.} \quad h = \frac{c^2}{4g} = 0{,}016\, c^2.$$

1. Beispiel. Wenn ein Körper während 4 Sekunden gefallen ist, so beträgt der durchlaufene Raum

$$h = 15\tfrac{5}{8} \,.\, 4^2 = 250 \text{ Fuß}.$$

2. Beispiel. Am Ende seines Falles hat ein Körper eine Geschwindigkeit von 10 Fuß erlangt, wie groß war seine Fallhöhe?

$$h = 0{,}016 \,.\, 10^2 = 1{,}6 \text{ Fuß}.$$

16. §.

Nach Verlauf einer Sekunde ist die erlangte Geschwindigkeit eines Körpers $= 2g$, (11. §.) es verhält sich daher (9. §.)

$$1 : t = 2g : c$$

und man findet die Geschwindigkeit

$$\text{I.} \quad c = 2gt = 31\tfrac{1}{4}\, t.$$

Aus 15. §. I. findet man ferner

$$\text{II.} \quad c = \frac{2h}{t}$$

und nach 15. §. III.

$$\text{III.} \quad c = 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{(15\tfrac{5}{8} \,.\, h)} \text{ oder}$$
$$= 7{,}9\sqrt{h} \text{ beinahe.}$$

1. Beispiel. Wie viel Geschwindigkeit hat ein Körper erlangt, welcher während 3 Sekunden gefallen ist?

$$c = 31\tfrac{1}{4} \,.\, 3 = 93\tfrac{3}{4} \text{ Fuß}.$$

2. Beispiel. Wenn ein Körper durch einen Raum von 12 Fuß frei herunter gefallen ist, so findet man seine erlangte Geschwindigkeit

$$c = 7{,}9 \sqrt{12} = 27{,}36 \text{ Fuß.}$$

17. §.

Zur Bestimmung der Zeit t findet man aus 16. §. II.

$$\text{I.} \quad t = \frac{2h}{c}$$

aus 16. §. I.

$$\text{II.} \quad t = \frac{c}{2g} = 0{,}032\, c$$

und aus 15. §. II.

$$\text{III.} \quad t = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{h}{15\frac{5}{8}}} \text{ oder}$$

$$= 0{,}253 \sqrt{h} \text{ beinahe.}$$

18. §.

Wenn man bei einem frei fallenden Körper, für jede Sekunde, die erlangte Geschwindigkeit, den durchlaufenen Weg, und die Zunahme des Weges für jede Sekunde übersehen will, so kann solches mittelst nachstehender Tafel geschehen, die nach Gefallen fortgesetzt werden kann.

Zeit in Sekund.	erlangte Geschwind.	durchlauf. Weg.	Zunahme desselben.
1	1. 2 g	1 g	1 g
2	2. 2 g	4 g	3 g
3	3. 2 g	9 g	5 g
4	4. 2 g	16 g	7 g
5	5. 2 g	25 g	9 g
6	6. 2 g	36 g	11 g
7	7. 2 g	49 g	13 g
8	8. 2 g	64 g	15 g
9	9. 2 g	81 g	17 g
10	10. 2 g	100 g	19 g

Man sieht hieraus, daß die Zunahmen des Weges in gleichen auf einander folgenden Zeiten nach den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 2c. fortgehen. Daß die am Ende der zweiten Sekunde erlangte Geschwindig-

keit eben so groß als die Fallhöhe ist. Daß die Fallhöhe in 4 Sekunden doppelt, in 6 Sekunden dreimal so groß, als die erlangte Geschwindigkeit ist. Daß die in gleich großen auf einander folgenden Zeiten durchlaufenen Räume unter sich gleiche Differenz haben; u. s. w.

19. §.

Wenn ein frei fallender Körper im Anfang der Zeit u schon eine Geschwindigkeit c erlangt hat, so wird ihm die Schwere während dieser Zeit noch die Geschwindigkeit 2gu mittheilen, und am Ende der Zeit u besitzt derselbe die Geschwindigkeit

$$\text{I.}\quad v = c + 2gu.$$

Vermöge seiner anfänglichen Geschwindigkeit durchläuft der Körper den Weg cu, und wegen Einwirkung der Schwere in der Zeit u den Weg gu^2 (15. §. II.). Daher ist der ganze durchlaufene Raum h′ in der Zeit u

$$\text{II.}\quad h' = cu + gu^2.$$

Hätte der Körper die Geschwindigkeit c durch den freien Fall von der Höhe h erhalten, so wäre $h = \frac{c^2}{4g}$ (15. §.) und weil nun die Geschwindigkeit v der ganzen Fallhöhe h + h′ entspricht, so ist

$$\text{III.}\quad v = 2\sqrt{g}\sqrt{(h + h')}$$
$$= 2\sqrt{g}\sqrt{\left(\frac{c^2}{4g} + h'\right)}$$
$$= \sqrt{(c^2 + 4gh')}.$$

Hieraus erhält man ferner

$$\text{IV.}\quad h' = \frac{v^2 - c^2}{4g} = \frac{v + c}{2}\,u = vu - gu^2.$$

Drittes Kapitel.

Von der Bahn geworfener Körper.

20. §.

Vorausgesetzt daß außer der Kraft, welche dem geworfenen Körper die erste Geschwindigkeit mittheilt, und außer der Schwere, ferner keine andere Kraft noch sonst ein Hinderniß auf den Körper wirkt, so läßt sich einsehen, daß ein mit der Geschwindigkeit c vertikal aufwärts geworfener Körper keine größere Höhe h erreichen kann, als diejenige ist, von welcher er bei dem freien Fall herunter fallen müßte, um die Geschwindigkeit c zu erlangen. Denn während des Steigens raubt ihm die Schwere als eine unveränderlich wirkende Kraft, in jedem Zeittheilchen eben so viel Geschwindigkeit, wie er durch den freien Fall erhalten hat. Die Schwere wirkt daher hier als eine gleichförmig verzögernde Kraft, und die Geschwindigkeit des Körpers nimmt eben so ab, wie sie beim Fallen zunahm, weshalb derselbe in eben der Zeit diejenige Höhe erreichen muß, die er beim Fallen durchlaufen würde. Es ist daher auch hier

$$h = \frac{c^2}{4g}$$

und alle die 15. §. bis 19. abgeleiteten Sätze gelten auf eine ähnliche Art für das vertikale Steigen, wie bei dem freien Falle der Körper.

Hieraus folgt:

I. Daß ein Körper um eine gewisse lothrechte Höhe zu erreichen mit eben der Geschwindigkeit steigen muß, welche er durch den freien Fall von dieser Höhe erlangt hätte.

II. Daß eben so viel Zeit zum Steigen auf eine gewisse Höhe erfordert wird, als zum freien Falle von dieser Höhe nöthig ist.

21. §.

Ein Körper der mit der Geschwindigkeit c zu steigen anfängt, erreicht die Höhe $h = \frac{c^2}{4g}$.

Ist er in der Zeit u nur bis auf die Höhe h' gelangt, so hat er in dieser Zeit die Geschwindigkeit $2gu$ verloren (16. §. I.), und seine Geschwindigkeit v ist nach Verlauf der Zeit u

$$\text{I.} \quad v = c - 2gu.$$

Mit dieser Geschwindigkeit würde er noch bis zur Höhe $\frac{v^2}{4g}$ steigen können (20. §.). Zieht man diese Höhe von der ganzen Höhe h ab, so erhält man

$$h' = \frac{c^2}{4g} - \frac{v^2}{4g}$$

oder wenn $c - 2gu$ statt v gesetzt und die Größen, welche sich aufheben, weggelassen werden, so findet man die Höhe, welche ein Körper in der Zeit u mit der anfänglichen Geschwindigkeit c vertikal steigt,

$$\text{II.} \quad h' = cu - gu^2.$$

Beispiel. Ein Körper steigt mit einer Geschwindigkeit von 60 Fuß vertikal, wie hoch wird er in Zeit von 2 Sekunden gelangen?

$h' = 60 \,.\, 2 - 15\frac{5}{8} \,.\, 4 = 57\frac{1}{2}$ Fuß.

In der Zeit von 3 Sekunden würde er nur noch

$60 \,.\, 3 - 15\frac{5}{8} \,.\, 9 = 39\frac{3}{8}$ Fuß

hoch seyn, weil er schon seine größte Höhe

$h = \frac{c^2}{4g} = 0{,}016 \,.\, 60^2 = 57{,}6$ Fuß

in der Zeit

$t = \frac{c}{2g} = 0{,}032 \,.\, 60 = 1{,}92$ Sekunden

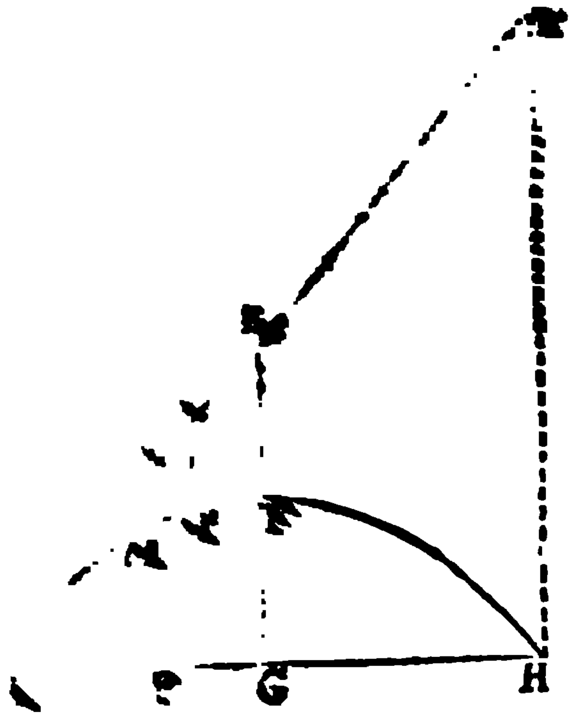
erreicht, und überhaupt auf das Steigen und Fallen nicht mehr als 3,84 Sekunden zubringen kann.

Wenn daher die Frage entsteht, wie hoch dieser Körper nach 4 Sekunden gestiegen ist, so findet man

$h' = 60 \,.\, 4 - 15\frac{5}{8} \,.\, 16 = -10$ Fuß

welches eine negative Größe ist und anzeigt, daß sich der Körper, wenn er durch kein Hinderniß aufgehalten wird, nach dieser Zeit 10 Fuß niedriger befindet, als im Anfange der Bewegung.

2. §.



Einem Körper werde in A nach der Richtung AT unter einem gegen den Horizont AH spitzen **Winkel** HAT $= \alpha$, die Geschwindigkeit c mitgetheilt, so müßte er, wenn die Schwere nicht auf ihn wirkte, in der Zeit t' den Weg $ct' =$ AN zurücklegen und sich in N befinden. Während der Zeit t' hat aber die Schwere auf ihn gewirkt und ihn um den Weg NM $= gt't'$ [illegible] herunter getrieben (15. §.) und er muß sich daher nach Verlauf der Zeit t' im Punkt M befinden, da alsdenn AN $= ct'$ und NM $= gt't'$ ist.

Hieraus erhält man

$$t' = \frac{AN}{c} \text{ daher}$$

$$NM = \frac{g}{c^2}\, AN^2$$

Auf gleiche Art wird gefunden

$$N'M' = \frac{g}{c^2} \cdot (AN')^2$$

Nun gehört die vorstehende Gleichung zu einer Parabel, welche in A von der Linie AT tangentirt wird und deren Axe mit den Linien NM, N'M' parallel läuft, es muß daher die Linie AMM', in welcher sich der geworfene Körper bewegt, eine **Parabel** seyn *), die den Horizont AH wieder in irgend einem Punkt H schneidet.

Die Weite AH, wo der Körper in seiner Bahn die Horizontallinie durch A wieder schneidet, heißt die **Wurfweite** (Amplitudo jactus, *Portée*); theilt man diese in zwei gleiche Theile in G und errichtet die Linie GE senkrecht, so liegt in der Mitte F derselben (nach bekannten Lehren von den Eigenschaften der Parabel) der Scheitel der

---

*) Diese Eigenschaft ist zuerst von Gallilei erwiesen worden.

Parabel, und es ist FG die **größte Höhe** (Ascensus maximus), welche der Körper erreichen kann.

23. §.

Man setze die Wurfweite AH $= w$, die größte dazu gehörige Höhe $= h$, und die ganze Zeit, in welcher der Körper von A bis H gelangt $= t$. Nun ist

$$TH = AT \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$$

oder weil $TH = 2 \cdot EG = 4h$ (11. §.) und

$AT = ct$ ist, so wird

$$4h = ct\,\mathrm{Sin}\,\alpha \text{ oder}$$

$$h = \frac{ct\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{4}$$

Ferner ist $TH = gt^2 = 4h$ also

$$h = \frac{gt^2}{4}$$

und man erhält

$$\frac{gt^2}{4} = \frac{ct\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{4}$$

und hieraus die Zeit, in welcher der Körper wieder den Horizont in H erreicht.

$$t = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{g}$$

24. §.

Nun ist ferner

$$AH = AT \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha \text{ oder}$$

$$w = ct\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$

und wenn für t sein gefundener Werth gesetzt wird, so findet man die **Wurfweite**

$$w = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{g}$$

25. §.

Weil $h = \frac{gt^2}{4}$ so erhält man, wenn ebenfalls anstatt t dessen Werth (23. §.) gesetzt wird, die **größte Höhe**, welche der Körper erreicht

$$h = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2}{4g} \text{ *)}.$$

---

*) Wollte man eine allgemeine Vergleichung für jede Weite

26. §.

In der Trigonometrie wird bewiesen, daß

$$\text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\alpha = \tfrac{1}{2}\ \text{Sin}\ 2\alpha \text{ ist,}$$

man erhält daher für die **Wurfweite**

$$w = \frac{c^2}{2g}\ \text{Sin}\ 2\alpha$$

und es verhalten sich bei unveränderten Geschwindigkeiten und verschiedenen Richtungswinkeln, **die Wurfweiten, wie die Sinusse der doppelten Richtungswinkel.**

27. §.

Ferner ist $\text{Sin}\ 2\alpha = \text{Sin}(180^\circ - 2\alpha) = \text{Sin}\ 2(90^\circ - \alpha)$ daher

$$w = \frac{c^2}{2g}\ \text{Sin}\ 2\alpha = \frac{c^2}{2g}\ \text{Sin}\ 2\ (90^\circ - \alpha)$$

folglich sind bei gleichen Geschwindigkeiten **die Wurfweiten einander gleich, wenn sich die Richtungswinkel zu 90 Grad ergänzen**, oder wenn der eine Winkel so viel unter 45 Grad, als der andere darüber ist.

Ein Körper unter einem Winkel von 32 Grad geworfen, wird eben so weit gehen als mit derselben Geschwindigkeit unter 58 Grad.

$AP = x$ und der dazu gehörigen Höhe $PM = y$ haben, so setzt man die Zeit, in welcher der Körper bis zum Punkt M kommt $= t'$, so ist

$$NP = AN\ \text{Sin}\ \alpha = ct'\ \text{Sin}\ \alpha, \text{ daher weil}$$
$$PM = NP - NM \text{ so ist}$$
$$y = ct'\ \text{Sin}\ \alpha - g(t')^2$$

Aber $x = AN.\ \text{Cos}\ \alpha = ct'\ \text{Cos}\ \alpha$ also

$$t' = \frac{x}{c\ \text{Cos}\ \alpha}$$

Setzt man diesen Werth in die vorstehende Gleichung statt t', so findet man, nach gehöriger Abkürzung, allgemein die **Höhe**

$$y = x\ \text{Tgt}\ \alpha - \frac{g x^2}{c^2\ \text{Cos}^2\ \alpha}$$

28. §.

Bei unveränderter Geschwindigkeit wird die Wurfweite $w = \frac{c^2}{g} \operatorname{Sin} 2\alpha$ am größten, wenn $\operatorname{Sin} 2\alpha$ den größtmöglichen Werth erhält. Da nun der größte Sinus dem Winkel von 90 Grad zugehört, so muß für diesen Fall $2\alpha = 90$ also $\alpha = 45$ Grad genommen werden. Die größte Wurfweite wird daher unter einem Richtungswinkel von 45 Grad erhalten.

Alsdann ist

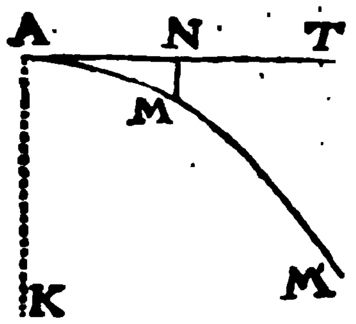
$$w = \frac{c^2}{2g} \operatorname{Sin} 90^\circ = \frac{c^2}{2g}$$

und die größte Höhe, welche der Körper bei dieser Weite erreicht (25. §.)

$$h = \frac{c^2 (\operatorname{Sin} 45^\circ)^2}{4g} = \frac{c^2 (\sqrt{\frac{1}{2}})^2}{4g} = \frac{c^2}{8g}$$

daher ist die größte horizontale Wurfweite viermal so groß als die größte Höhe, welche der Körper unter einem Richtungswinkel von 45 Grad erreicht, und doppelt so groß, als die vertikale Höhe beim lothrechten Aufsteigen mit eben derselben Geschwindigkeit (20. §.).

29. §.



Fällt die Richtung des Wurfs in die Horizontallinie, so ist AT horizontal, und man findet (22. §.)

$$h = \frac{g}{c^2} w^2$$

Dieses ist die gewöhnliche Gleichung für die Parabel, deren Scheitel in A liegt, und wo NM die Abscisse und AN die dazu gehörige Ordinate ist.

Mehreres über die Bewegung schwerer geworfener Körper findet man in Jens Kraft Mechanik, aus der lateinischen mit Zusätzen vermehrten Uebersetzung des Herrn J. Tetens, ins Teutsche übersetzt von J. C. A. Steingrüber. Dresden 1787, 12te und 13te Vorlesung.

Viertes Kapitel.

Von den Wirkungen der Kräfte.

30. §.

Die Wirkung, welche eine Kraft in einer Masse von bestimmter Größe hervorbringt, kann nach den Umständen sehr verschieden seyn, weil man auf die Bewegung, welche von der Kraft verursacht wird, auf den Druck der Masse gegen einen langsamer bewegten oder ruhenden, weichen oder harten Körper in einer bestimmten Zeit, auf die Totalsumme aller Pressungen u. d. gl. Rücksicht nehmen kann.

Die Größe der Kraft als Ursache der Wirkung anzugeben ist unmöglich, nur der Erfolg oder die Wirkung, welche eine Kraft unter diesen oder jenen Umständen hervorbringt, kann man bestimmen und mit andern ähnlichen Erfolgen vergleichen. Es läßt sich daher auch das Maaß der Wirkung nicht unbedingt als Maaß der Kraft annehmen, sondern wenn von einer Kraft die Rede ist, so muß jedesmal genau angegeben werden, was als Größe der Wirkung betrachtet und ausgemessen werden soll. Hieraus ist es einleuchtend, daß in der Mechanik von verschiedenen Kräften die Rede seyn kann, ob es gleich nicht rathsam ist, dieselben ohne Noth zu vervielfältigen; auch sieht man hieraus, in wie fern man ohne eine Verwirrung zu befürchten, die Wirkung Kraft nennen kann.

Wenn es nun gleich nicht möglich ist, die bei einer gewissen Wirkung angewandte Kraft unmittelbar zu messen, so kann man doch die Größe derselben dergestalt, in Vergleichung mit andern ähnlichen Kräften, nach der Wirkung schätzen, daß wenn eine Wirkung zweimal so groß als eine andere ist, auch die unter denselben Umständen angewandte Kraft doppelt so groß angenommen werden kann.

31. §.

Wenn auf zwei nicht schwere, blos träge Massen M, M', welche beide eine gleich große Menge materieller Theile besitzen, oder welches einerlei ist, die gleich groß sind, beständige Kräfte wirken, so daß zur Masse M die Kraft P, und zur Masse M' die Kraft p gehört, und der Druck der ruhenden Masse M gegen einen Widerstand, welcher die Bewegung hindert, ist doppelt so groß, als der von M' bewirkte Druck, so sagt man, daß die Kraft P doppelt so groß als die Kraft p sei.

Werden zwei ungleiche Massen M, m, wovon M = 2 m ist, von gleichen Kräften gegen einen unbeweglichen Widerstand gepreßt, so ist zwar in beiden Fällen der Druck gegen den Widerstand gleich groß, aber weil die Kraft, welche auf die Masse m wirkt, nur unter halb so viel materielle Theile vertheilt wird, so muß jedes einzelne Theilchen dieser Masse doppelt so stark drücken, also doppelt so viel Kraft besitzen, als ein einzelnes eben so großes Theilchen der Masse M.

Man unterscheidet daher das ganze Vermögen oder die gesammte Kraft einer Masse, von demjenigen, welches jedem ihrer einzelnen Theile zugehört, und pflegt die ganze Gewalt, welche in eine Masse wirkt, und die, wenn sich die Masse nicht bewegt, mit dem Druck gegen einen Widerstand im Verhältniß steht, die bewegende Kraft (Vis motrix, *Force motrice*), dagegen die Gewalt, welche jedes einzelne Theilchen der Masse besitzt, die beschleunigende oder Elementar-Kraft (Vis acceleratrix, *Force accélératrice*) dieser Masse zu nennen. Hiernach kann man bei schweren Körpern, das Gewicht als bewegende, die Schwere selbst aber, als beschleunigende Kraft ansehen.

Anmerk. Man pflegt auch noch die Kräfte in lebendige (vivae, *vivès*), oder solche, die mit wirklicher Bewegung verbunden sind, und in todte (mortuae, *mortes*) oder drückende Kräfte, die Bewegung hervorzubringen streben ohne welche zu erzeugen, einzutheilen. Diese Vervielfältigung der Kräfte ist aber ohne Nutzen.

32. §.

Wenn man sich vorstellt, daß die Masse M aus einer gewissen Menge einzelner oder Elementartheile e bestehe, und daß die bewegende Kraft der Masse M = P ist, so wird auf jeden einzelnen Theil e, ein gewisser Theil F von der Kraft P kommen, und es verhält sich

$M : e = P : F$, daher findet man

$$F = \frac{e}{M} P$$

Weil nun F die Kraft ist, welche jedes einzelne Theilchen der Masse M besitzt, so folgt hieraus, daß F als beschleunigende Kraft der Masse M angesehen werden kann.

Ist ferner der Masse m bewegende Kraft = p, und die auf jedes einzelne eben so große Theilchen e der Masse m wirkende Kraft = f, so erhält man wie vorher

$$f = \frac{e}{m} p$$

es verhält sich daher

$$F : f = \frac{P}{M} : \frac{p}{m}$$

d. h. **die beschleunigenden Kräfte zweier Massen verhalten sich wie die bewegenden Kräfte derselben und umgekehrt wie die Massen.**

Auch verhält sich

$$P : p = FM : fm$$

d. h. **die bewegenden Kräfte zweier Massen verhalten sich wie diese Massen multiplizirt mit ihren beschleunigenden Kräften.**

Sind die Massen einander gleich, so verhalten sich **die bewegenden Kräfte wie die beschleunigenden.**

Das Elementartheilchen e ist eine gemeinschaftliche Einheit der Massen M, m, daher kann man auch, wenn e = 1 gesetzt wird, durch $\frac{P}{M}$ die beschleunigende Kraft der Masse M bezeichnen und

$$F = \frac{P}{M}$$

setzen, welches um so mehr erlaubt ist, da man die Größe der Kräfte nur aus dem Verhältniß kennt, welches sie ge-

geneinander haben; eben so wie man anstatt der bewegenden Kraft einer Masse, den Druck derselben gegen einen unbeweglichen Widerstand in Rechnung bringen kann.

33. §.

Wenn nach den Bezeichnungen im vorigen §. die beschleunigende Kraft $F = \frac{P}{M}$ die Masse M in der ersten Sekunde durch den Weg G gleichförmig beschleunigt bewegt, und die beschleunigende Kraft $f = \frac{p}{m}$ die Masse m in eben der Zeit durch den Weg g; und es ist $G = 2g$, so muß auch $F = 2f$ seyn.

Jedes einzelne Theilchen e der Masse M wird gegen einen Widerstand mit der Kraft F gepreßt, und wenn dieser weggenommen wird, so durchläuft es in einer Sekunde den Weg G. Man setze, daß auf jedes einzelne Theilchen der Masse M in entgegengesetzter Richtung von der Kraft F, eine andere = f angebracht werde, so wird die einzelne Masse e so bewegt, als wenn nur die Kraft $F - f$ auf sie wirkte. Nun treibt die Kraft F die Masse e durch den Weg $G = 2g$, wenn die Kraft f solche nach entgegengesetzter Richtung durch den Weg g treibt; es kann daher die Masse e sich nur durch den Weg $2g - g = g$ bewegen. Aber die Kraft f treibt e in eben der Zeit durch den Weg g, und wenn zwei beschleunigende Kräfte gleiche Massen in gleichen Zeiten durch gleiche Räume treiben, so ist man berechtigt anzunehmen, daß die Kräfte einander gleich sind. Es ist daher $F - f = f$ also

$$F = 2f.$$

Diese Schlüsse gelten eben so für den dreifachen, vierfachen und überhaupt für den vielfachen Weg, daher verhalten sich die beschleunigenden Kräfte zweier Massen, wie die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege derselben.

34. §.

Man pflegt daher auch den Weg, welchen eine Masse in der ersten Sekunde gleichförmig beschleunigt durchläuft,

ihre **Beschleunigung** (Acceleratio) zu nennen. Für die Schwere (nahe an der Erdoberfläche) ist diese Beschleunigung $g = 15\frac{1}{8}$ Fuß.

P Wenn also eine bewegende Kraft P in die Masse M
M wirkt und derselben eine Beschleunigung G mittheilt, und
G man bezeichnet die beschleunigende Kraft dieser Masse durch
F F; wenn sich ferner eben so die Größen p, m, g, f auf
p m unsere Schwere beziehen, so verhält sich
g f

$$F : f = \frac{P}{M} : \frac{p}{m}$$

und nach dem vorigen §.

$$\frac{P}{M} : \frac{p}{m} = G : g$$

daher findet man

$$G = g \frac{m}{M} \frac{P}{p}$$

Setzt man die Masse M = m, so wird

$$G = g \frac{P}{p}$$

Nun ist aber p die bewegende Kraft der Schwere, welche in die Masse M wirkt, und weil man nur von der Größe dieser Kraft urtheilen kann, wenn der Druck bekannt ist, welchen eine Masse von der Schwere getrieben, gegen einen Widerstand ausübt, so kann man statt p das Gewicht der
N Masse M setzen. Ist dieses = N, und wird die Kraft P ebenfalls durch ein Gewicht ausgedrückt, so erhält man

$$G = g \cdot \frac{P}{N}$$

d. h. **die Beschleunigung einer Masse wird gefunden**, wenn der Druck, welchen die bewegende Kraft dieser Masse ausübt, durch das Gewicht der Masse dividirt und mit $g = 15\frac{1}{8}$ Fuß multiplizirt wird.

Aus der vorhin gefundenen Proportion erhält man ferner

$$P : p = GM : gm$$

d. h. **die bewegenden Kräfte zweier Massen verhalten sich wie diese Massen multiplizirt mit ihren Beschleunigungen.**

35. §.

Nach 11. und 12. §. läßt sich für jede gegebene Zeit T der durchlaufene Raum S und die erlangte Geschwindigkeit C einer Masse finden, welche von einer andern beständigen Kraft wie von der Schwere getrieben wird. Wäre G die Beschleunigung dieser Masse, so ist

$$\text{I.} \quad S = G T^2 \text{ und}$$

$$\text{II.} \quad C = 2 G T.$$

auch erhält man auf eine ähnliche Art wie 15 — 17. §. den durchlaufenen **Raum**

$$\text{III.} \quad S = \tfrac{1}{2} C T = \frac{C^2}{4G}$$

die erlangte **Geschwindigkeit**

$$\text{IV.} \quad C = \frac{2S}{T} = 2\sqrt{[GS]}$$

die verflossene **Zeit**

$$\text{V.} \quad T = \frac{2S}{C} = \frac{C}{2G} = \sqrt{\frac{S}{G}}$$

und wenn man $G = g \dfrac{P}{N}$ setzt

$$\text{VI.} \quad S = g\, T^2 \frac{P}{N} = \frac{C^2}{4g} \frac{N}{P}$$

$$\text{VII.} \quad C = 2 g T \frac{P}{N} = 2\sqrt{[gS]}\, \sqrt{\frac{P}{N}}$$

$$\text{VIII.} \quad T = \frac{C}{2g} \frac{N}{P} = \sqrt{\frac{S}{g}}\, \sqrt{\frac{N}{P}}$$

auch findet man hieraus die **bewegende Kraft**

$$\text{IX.} \quad P = \frac{C^2}{4gS} N = \frac{C}{2gT} N = \frac{S}{g T^2} N.$$

Ferner folgt noch, daß sich bei verschiedenen bewegenden Kräften und Massen, die **beschleunigenden Kräfte** wie die **in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume**, oder wie die **am Ende dieser Zeiten erlangten Geschwindigkeiten verhalten.**

Beispiel. Wie groß muß die bewegende Kraft P seyn, um eine träge Masse von 100 Pfund in 15 Sekunden durch einen Raum von 60 Fuß zu führen?

Hier ist $N = 100$, $T = 15$ und $S = 60$ daher die **bewegende Kraft**

$$P = \frac{60 \,.\, 100}{15\frac{5}{8} \,.\, 15^2} = 1{,}707 \text{ Pfund.}$$

36. §.

Besitzt die Masse N schon die Geschwindigkeit C bevor die bewegende Kraft P zu wirken anfängt, so wird sie wegen ihres Beharrungsvermögens in der gleich darauf folgenden Zeit T den Raum CT durchlaufen. Wirkt aber in dieser Zeit noch die bewegende Kraft P, nach eben der Richtung, in welcher sich die Masse bewegt, so wird wegen dieser, der Weg GT^2 zurückgelegt, so daß der ganze Raum S′ welcher mit der Anfangsgeschwindigkeit C und wegen Einwirkung der Kraft P durchlaufen wird

$$S' = CT + GT^2 \text{ ist,}$$

oder wenn man $g \frac{P}{N}$ statt G setzt

$$S' = CT + gT^2 \frac{P}{N}$$

Wirkt die bewegende Kraft P der bewegten Masse gerade entgegen, so ist

$$S' = CT - gT^2 \frac{P}{N}$$

Die Geschwindigkeit der Masse N am Ende der Zeit T sey v, so erhält man ferner wenn die bewegende Kraft P der Masse N gerade entgegen wirkt (21. §.)

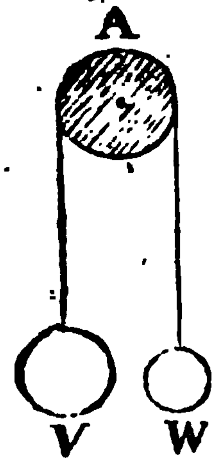
$$v = C - 2GT \text{ oder}$$

$$v = C - 2gT\frac{P}{N}$$

Die vorstehenden Sätze sind zur richtigen Beurtheilung des Ganges einer Maschine unentbehrlich, wenn man nicht allein bei dem Zustande des Gleichgewichts stehen bleiben will. Denn sobald irgend mehr Kraft bei einer Maschine angewandt wird, als das Gleichgewicht erfordert, so entsteht eine beschleunigte Bewegung, bei welcher es nicht gleichgültig ist, in wie viel Zeit diese Bewegung erfolgt.

37. §.

Obgleich die Anwendung der vorstehenden Sätze vorzüglich in die Maschinenlehre gehört, so kann doch ein Beispiel vieles zur Erläuterung derselben beitragen.



Man setze daß mittelst eines Fadens über eine Rolle A, zwei Gewichte V und W hängen, wovon $V > W$ ist, und wenn man die Masse der Rolle, Steifigkeit des Fadens und Frikzion bei Seite setzt, so wird das größere Gewicht V sinken und das kleinere W aufwärts ziehen. Daß das Gewicht V sich nicht wie ein frei fallender Körper bewegen kann, ist leicht einzusehen, weil es von dem Gewicht W daran verhindert wird. Nun ist die Kraft, mit welcher V sinkt oder die **Ueberwucht** (Praepondium) $= V - W$ und das Gewicht der gesammten Masse welche bewegt wird $= V + W$, daher 34. §.

$$P = V - W$$
$$N = V + W$$

und man findet die Beschleunigung G, mit welcher sich diese Massen bewegen

$$G = g\,\frac{V - W}{V + W}.$$

Wäre $V = 5$ und $W = 3$ ℔, so ist der Raum, welchen die Gewichte in der ersten Sekunde durchlaufen

$$G = 15\tfrac{1}{8} \cdot \frac{5-3}{5+3} = 3\tfrac{29}{32} \text{ Fuß.}$$

In 8 Sekunden hätten die Gewichte einen Raum

$$S = 3\tfrac{29}{32} \cdot 8^2 = 250 \text{ Fuß}$$

durchlaufen, und ihre erlangte Geschwindigkeit wäre

$$C = 2 \cdot 3\tfrac{29}{32} \cdot 8 = 62\tfrac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

Anmerk. Zu dergleichen Versuchen kann die **Atwoodsche** Maschine dienen, welche alles leistet, was nur in dergleichen Fällen zu erwarten ist. Man findet nähere Nachricht von ihr in J. G. **Geißler**, Beschreibung und Geschichte der neuesten und vorzüglichsten Instrumente und Kunstwerke. 6ter Th. Zittau und Leipzig 1796. S. 5—18.

Mehreres über Ueberwucht findet man in: Versuch einer Theorie von der Ueberwucht, aufgesetzt und gegen zuverlässige Experimente gehalten, von C. G. Schober. Leipzig 1751.

38. §.

Sind P, p die bewegenden Kräfte, durch welche die Massen M, m in verschiedenen Zeiten T, t die Geschwindigkeiten C, c erlangt haben, so ist 35. §.

$$C = 2gT\frac{P}{N} \text{ und } c = 2gt\frac{p}{n}$$

und es verhält sich, wenn statt der Gewichte N, n die Massen M, m gesetzt werden

$$C : c = T\frac{P}{M} : t\frac{p}{m}$$

oder wenn man die Zeiten gleich annimmt, also $T = t$ setzt, so verhält sich

$$CM : cm = P : p$$

oder die bewegenden Kräfte zweier Massen verhalten sich wie diese Massen, multiplizirt mit ihren in gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten.

Aus 35. §. IX. folgt ferner

$$C^2 = 4gS\frac{P}{M} \text{ und } c^2 = 4gs\frac{p}{m}$$

und wenn man die durchlaufenen Räume gleich groß annimmt, also $S = s$ setzt, so verhält sich

$$C^2 : c^2 = \frac{P}{M} : \frac{p}{m} \text{ oder}$$

$$C^2M : c^2m = P : p$$

d. h. die bewegenden Kräfte zweier Massen verhalten sich wie die Quadrate der bei gleichen zurückgelegten Wegen erlangten Geschwindigkeiten, multiplizirt mit den Massen.

Die erste Vergleichung

$$P : p = MC : mc$$

nennt man das Cartesianische, und

$$P : p = MC^2 : mc^2$$

das Leibnitzische Kräftenmaaß; bei ersterem sind die in gleichen Zeiten, bei letzterem aber, die nach

gleichen durchlaufenen Räumen erlangten Geschwindigkeiten zum Grunde gelegt.

1. Anmerk. Man könnte leicht in Versuchung gerathen und aus den vorstehenden Proportionen folgern, daß sich nun auch verhalte

$$P : p = Mc : mc = Mc^2 : mc^2$$

welches, so gestellt, ungereimt wäre. Es ist aber hiebei zu bedenken, daß die Geschwindigkeiten, welche am Ende gleicher Zeiten durch die Einwirkung einer beständigen Kraft erlangt werden, etwas anders sind, als die Geschwindigkeiten am Ende gleicher durchlaufener Räume, und daß C in der ersten Vergleichung etwas anders bedeutet, als in der zweiten, welches sogleich einleuchtend wird, wenn man in einem Falle C, c' statt C, c setzt. Auch kann man leicht beweisen, daß sich die erlangten Geschwindigkeiten am Ende gleicher Zeiten wie die Quadrate der erlangten Geschwindigkeiten bei gleichen durchlaufenen Räumen verhalten.

Mehreres über die Kräfte, welche gleichförmig beschleunigte Bewegungen bewirken, über die ungleichförmig beschleunigte Bewegung, und über das Maß der Kräfte, findet man in

A. G. Kästner, Anfangsgründe der höhern Mechanik, welche von der Bewegung fester Körper besonders die praktischen Lehren enthalten. Zweite sehr verbesserte und vermehrte Auflage. Götting. 1793.

W. J. G. Karsten, Lehrbegriff der gesammten Mathematik. Der vierte Theil: Die Mechanik fester Körper. Greifswalde 1769.

Ferner in der angeführten Mechanik von J. Kraft mit Zusätzen von Herrn Etatsrath Tetens; und in

G. Vega Vorlesungen über die Mathematik. 3ter Bd. welcher die Mechanik der festen Körper enthält. Wien 1788.

2. Anmerk. Um wenigstens die Fundamentalgleichungen für die Bewegung solcher Massen, welche ungleichförmig beschleunigt werden, zu entwickeln, dient folgende Betrachtung.

Eine bewegende Kraft wirke zwar fortwährend in eine Masse nach einerlei Richtung, aber nicht immer mit gleicher Stärke, so entsteht daraus eine veränderliche Bewegung, deren Gesetze sich aus der gleichförmig beschleunigten Bewegung leicht ableiten lassen. Für eine unendlich kleine Zeit dt kann man annehmen, daß die veränderliche Kraft P die Masse M durch einen unendlich kleinen Raum ds gleichförmig bewege. Die Geschwindigkeit y für diesen Augenblick ist alsdann (5. §. 11.)

$$\text{I.} \quad y = \frac{ds}{dt}$$

In der unendlich kleinen Zeit dt läßt sich die Kraft P und Masse M als unveränderlich annehmen, alsdann ist die der Masse M in der Zeit dt von der Kraft P mitgetheilte unendlich kleine Geschwindigkeit $= dy$; und man findet (35. VII.)

$$\text{II.} \quad dy = \frac{2gP}{M}\, dt$$

Wird I. und II. miteinander verbunden, so ist

$$\text{III.} \quad 2y\,dy = \frac{4gP}{M}\, ds$$

Es sey u die Höhe, welche der Geschwindigkeit y für den freien Fall eines Körpers zugehört, so ist (15. §. III.) $y^2 = 4gu$ also $2y\,dy = 4g\,du$ daher

$$\text{IV.} \quad du = \frac{P\,ds}{M}$$

Die Werthe für dy und du sind positiv, wenn die Kraft nach derselben Richtung wirkt, wohin sich der Körper bewegt; negativ, wenn eine verzögerte Bewegung entsteht.

Aus I. folgt, $dy = d\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dds}{dt}$, weil die Zeitelemente dt unveränderlich angenommen sind. Diesen Ausdruck mit II. verbunden gibt

$$\text{V.} \quad dds = \frac{2gP}{M}\, dt^2.$$

Die vorstehenden Ausdrücke geben ferner

$$\text{VI.} \quad P = \frac{dy}{dt}\,\frac{M}{2g} = \frac{2y\,dy}{ds}\,\frac{M}{4g} = \frac{du}{ds}\,M = \frac{dds}{dt^2}\,\frac{M}{2g};$$

und wenn man die beschleunigende Kraft oder $\frac{P}{M} = f$ setzt, so erhält man

$$\text{VII.} \quad f = \frac{dy}{2g\,dt} = \frac{2y\,dy}{4g\,ds} = \frac{du}{ds} = \frac{dds}{2g\,dt^2}.$$

Fünftes Kapitel.

Vom Stoße der Körper.

---

39. §.

Trift ein bewegter Körper einen andern dergestalt, daß die Richtungen, in welchen sich die Schwerpunkte beider Körper bewegen, in einerlei geraden Linie liegen, und zugleich die aneinander stoßenden Flächen auf dieser Linie senkrecht sind, so sagt man, der Stoß (Percussio s. Conflictus,

Choc) ist **gerade** oder **central** (directus), sonst **schief** oder **eccentrisch** (obliquus.)

Die stoßenden Körper können von verschiedener Beschaffenheit seyn. Sie heißen **hart**, wenn sich ihre Gestalt durch den Druck oder Stoß nicht ändern läßt; **weich**, wenn sie eine andere Gestalt annehmen und behalten; **elastisch**, wenn sich zwar die Gestalt ändert, aber nachher wieder so herstellt, wie sie vor dem Stoße war.

40. §.

Man denke sich, daß von zwei gleichen Massen, die eine eine größere Geschwindigkeit habe als die andere, so besitzt auch die erstere in dem Verhältniß mehr Bewegung. Werden aber ungleiche Massen mit gleicher Geschwindigkeit bewegt, so besitzt die größere Masse in dem Verhältniß mehr Bewegung, als sie mehr materielle Theile wie die kleinere Masse hat. Es verhalten sich daher bei zwei ungleichen Massen, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, die Summen der Bewegungen aller materiellen Theile dieser Massen oder die **Größen der Bewegungen** (Quantitates motus, *Quantité de mouvement*) wie die Producte aus den Massen in ihre Geschwindigkeiten.

Man setze, daß sich die Massen M, m mit den Geschwindigkeiten C, c bewegen, und die Größe ihrer Bewegungen durch K, k ausgedrückt werde, daß ferner einer dritten Masse $M' = M$, Geschwindigkeit c, und Größe der Bewegung K' sei, so verhält sich

$$\left.\begin{array}{l} K : K' = C : c \\ K' : k = M : m \end{array}\right\} \text{daher}$$
$$K : K = CM : cm$$

oder wenn N, n die Gewichte der Massen M, m sind

$$K : k = CN : cn.$$

41. §.

Bewegen sich die Massen M, m zweier harten unelastischen Körper mit den Geschwindigkeiten C, c und es ist die Größe der Bewegung $CM = cm$, so ist in der einen Masse so viel Bewegung wie in der andern, und wenn beide Kör-

per central in entgegengesetzter Richtung aneinander stoßen oder sich begegnen, so kann keine Bewegung erfolgen, beide müssen ruhen. Hieraus ist es einleuchtend, in wie fern man unter der Größe der Bewegung die Kraft des bewegten Körpers verstehen kann.

42. §.

Ist hingegen für zwei harte unelastische Körper $CM > cm$ und beide stoßen central aneinander, indem sie sich begegnen, so muß die Größe der Bewegung mc einen Theil der Bewegung MC aufheben. Der Ueberrest $MC - mc$ vertheilt sich alsdann in beide Massen $M + m$, welche sich mit irgend einer Geschwindigkeit v nach der Richtung der Masse M fort bewegen werden.

Die Größe der Bewegung dieser Massen kann aber nur dem Ueberreste der Bewegung nach dem Stoße gleich seyn, also

$$v\,(M + m) = CM - cm \text{ folglich}$$

die Geschwindigkeit nach dem Stoße

$$v = \frac{CM - cm}{M + m}$$

Bewegen sich beide Körper nach einerlei Richtung, oder folgen einander, und der schnellere stößt den langsamern, so ist die Größe der Bewegung nach dem Stoße $= CM + cm$, und wenn die Geschwindigkeit nach dem Stoße ebenfalls v gesetzt wird, so hat die Masse $M + m$ die Bewegung $MC + mc$ daher ist

$$v\,(M + m) = CM + cm \text{ oder}$$

$$v = \frac{CM + cm}{M + m}$$

Man findet daher allgemein die Geschwindigkeit nach dem Stoße für harte Körper

$$v = \frac{CM \mp cm}{M + m}$$

wo das obere Zeichen für begegnende, das untere für einander folgende Körper gilt.

Beispiel. Ein Körper, dessen Masse 12 Pfund beträgt, bewegt sich mit 7 Fuß Geschwindigkeit, in=

dem ihn ein anderer von 20 Pfund mit 6 Fuß Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung stößt, man sucht die Geschwindigkeit nach dem Stoße. Hier ist

$$v = \frac{6.20 - 7.12}{20 + 12} = 1\tfrac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

43. §.

Begegnen sich zwei Körper M, m einander, so verliert der erste den Theil

$(C - v)$ M von seiner Bewegung;

der zweite m erhält, um sich in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit v zu bewegen, den Theil

$(c + v)$ m zu seiner Bewegung.

Folgen die Körper M, m einander, so verliert M den Theil

$(C - v)$ M von seiner Bewegung,

und m erhält den Theil

$(v - c)$ m zu seiner Bewegung.

44. §.

Wenn die Masse M sich mit der Geschwindigkeit C gegen die ruhende Masse m bewegt, so ist $c = 0$ also $mc = 0$. Die Geschwindigkeit C muß sich nach dem Stoße in beide Massen vertheilen, welche sich alsdann zusammen mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{CM}{M + m}$$

fortbewegen.

Es muß daher eine jede harte bewegte Masse eine ruhende in Bewegung setzen, nur daß die ruhende immer weniger Geschwindigkeit erhält, wenn ihre Masse größer ist, so daß, wenn der bewegte Körper gegen den ruhenden nur sehr klein ist, schon eine beträchtliche Geschwindigkeit dazu gehört, wenn die Bewegung merklich werden soll.

Beispiel. Ein Körper, welcher 1 Pfund wiegt, bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 10 Fuß gegen eine ruhende 1200 Pfund schwere Masse,

wie groß ist die Geschwindigkeit beider nach dem Stoße?

$$v = \frac{10 \cdot 1}{1 + 1200} = \frac{10}{1201} \text{ Fuß.}$$
$$= \tfrac{1}{10} \text{ Zoll beinahe.}$$

45. §.

Stoßen zwei elastische Körper, deren Massen M, m sind, mit den Geschwindigkeiten C, c central aneinander indem sie sich begegnen, so erleiden beide eine Aenderung in ihrer Gestalt, welche sich nach vollendetem Stoße wieder herstellt.

Beide Körper müssen, so bald sie sich berühren, wechselseitig so lange auf die Veränderung ihrer Gestalt wirken, oder sich so lange zusammenpressen, bis sie einerlei Geschwindigkeit durch die Mittheilung der Bewegung erlangt haben. Diese Geschwindigkeit, im Augenblick der größten
x Zusammenpressung, sei x und $MC > mc$, so würden sich beide Körper, wenn die Elasticität nicht wirkte, nach der Richtung des Körpers M mit dieser Geschwindigkeit fortbewegen. Alsdenn ist

$$x = \frac{CM - cm}{M + m}$$

Da sich beide Körper begegnen, so hat M den Theil

$$(C - x)\, M$$

an seiner Bewegung verloren, und m den Theil

$$(c + x)\, m$$

zu seiner Bewegung erhalten. In dem Augenblick der größten Zusammenpressung suchen aber beide Körper vermöge ihrer Elasticität, ihre Figur wieder herzustellen, wozu eben so viel Kraft angewandt werden muß, als dazu gehört diese Figur zu ändern. Nun hat der Körper M die Bewegung xM; durch die Wiederherstellung der Theile in m, welche nach einer seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung geschieht, und wozu die Bewegung $(C - x)\, M$ angewandt werden mußte, behält daher derselbe nur noch die Bewegung

$$xM - (C - x)\, M = (2x - C)\, M.$$

Der Körper m hat die Bewegung xm; durch die Wiederherstellung der Theile in M, wozu die Bewegung $(c+x)m$ verwandt worden, erhält derselbe die Bewegung

$$xm+(c+x)m=(2x+c)m.$$

Man setze die Geschwindigkeiten der Körper M, m mit welchen sie sich nach der letzten Berührung fortbewegen y, z; so ist, wenn sich die Körper begegnen, y z

$$yM=(2x-C)M$$
$$zm=(2x+c)m$$

Folgen die Körper einander, so findet man durch ähnliche Betrachtungen

$$yM=(2x-C)M$$
$$zm=(2x-c)m$$
$$\text{wo } x=\frac{CM+cm}{M+m} \text{ ist.}$$

Setzt man statt x die gefundenen Werthe in obige Ausdrücke, so erhält man allgemein die Geschwindigkeiten mit welchen sich elastische Körper nach der letzten Berührung fortbewegen

$$y=\frac{C(M-m\mp 2mc}{M+m}$$
$$z=\frac{\pm c(M-m)+2MC}{M+m}$$

wo das obere Zeichen für begegnende, und das untere für einander folgende Körper gilt.

Beide Geschwindigkeiten y und z sind so bestimmt worden, daß man voraussetzte, die Körper bewegen sich nach dem Stoße nach eben der Richtung, welche M vor dem Stoße hatte. So oft also die Geschwindigkeiten einen positiven Werth erhalten, gehen die Körper nach derselben Richtung die M hatte, dahingegen zeigt ein negativer Werth an, daß die Richtung entgegengesetzt ist.

46. §.

Begegnen sich zwei gleiche elastische Massen mit verschiedener Geschwindigkeit, so ist $M=m$ also der Masse M Geschwindigkeit nach dem Stoße

$$y=\frac{-2mc}{2m}=-c$$

und der Masse m Geschwindigkeit

$$z = \frac{2MC}{2M} = C$$

d. h. gleiche elastische Körper, die einander begegnen, kehren von einander mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

47. §.

Ist der Körper m in Ruhe und beide Massen einander gleich, so wird $c = 0$ und $M = m$. Nach dem Stoße ist alsdann für M

$$y = 0 \text{ und für } m$$

$$z = \frac{2MC}{2M} = C,$$

d. h. wenn eine elastische Masse, an eine gleiche ruhende stößt, so bekömmt die ruhende die Geschwindigkeit der anstoßenden, und die anstoßende bleibt stehen.

48. §.

Sind die Bewegungen CM und cm einander gleich und die Körper begegnen sich, so findet man

$$y = -C \text{ und}$$

$$z = c.$$

d. h. bei gleicher Größe der Bewegung kehren elastische Körper mit ihrer Geschwindigkeit wieder zurück.

49. §.

Wenn ein harter Körper gegen eine weiche ruhende Masse stößt, welche dem Eindringen gleich stark widerstehet, und ihm in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten raubt, so bewirkt dieses eine gleichförmig verzögerte Bewegung, und der in der weichen Masse durchlaufene Raum, oder die Tiefe des Lochs, muß sich auf eine ähnliche Art wie beim Steigen der Körper, wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhalten, mit welcher der Körper einzudringen anfängt. Aber unter übrigens gleichen Umstän-

den wird ein fallender Körper von größerem Gewichte auch verhältnißmäßig tiefer eindringen, daher verhalten sich bei einerlei Figur der eindringenden Körper, die Tiefen der Löcher, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten multiplizirt mit den Gewichten.

Dieser Satz findet seine Anwendung bei den Rammen.

Der obige Lehrsatz kann auch auf folgende Art bewiesen werden. Es sey

N das Gewicht des eindringenden Körpers
P die Kraft, welche die Geschwindigkeit desselben gleichförmig vermindert
C die anfängliche Geschwindigkeit
S die ganze Tiefe des Lochs
v die Geschwindigkeit am Ende der Zeit T und
S' die Tiefe des Lochs am Ende der Zeit T,

so ist 36. §.

$$S' = CT - gT^2 \frac{P}{N} \text{ und}$$

$$v = C - 2gT \frac{P}{N} \text{ also}$$

$$T = \frac{C - v}{2g} \cdot \frac{N}{P}$$

diesen Werth in die erste Gleichung gesetzt gibt

$$S' = \frac{C^2 - v^2}{4g} \cdot \frac{N}{P}$$

für $v = 0$ wird $S' = S$ daher

$$S = \frac{C^2}{4g} \frac{N}{P}$$

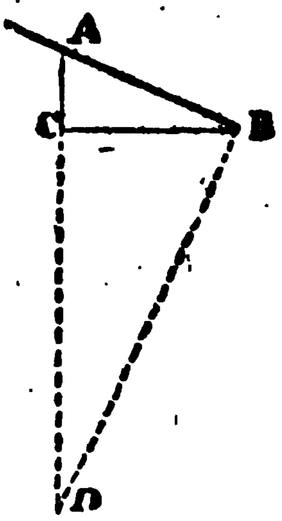
woraus sich der obige Satz leicht folgern läßt.

Sechstes Kapitel.

Vom freien Falle schwerer Körper auf einer schiefen Ebene.

50. §.

Auf der schiefen Ebene AB, welche unter dem Winkel



ABC $= \alpha$ gegen den Horizont geneigt ist, befindet sich ein schwerer Körper in A, dessen Gewicht $=$ P ist, und welcher sich ungehindert von A bis B bewegen kann; man sucht die Zeit T in welcher der Weg AB $=$ S durchlaufen wird.

Das respektive Gewicht oder die Gewalt, mit welcher der Körper nach der Richtung AB getrieben wird, ist $= P \text{ Sin } \alpha$, und weil auf der ganzen schiefen Ebene das respektive Gewicht unverändert bleibt, so ist $P \text{ Sin } \alpha$ die bewegende Kraft, welche den Körper von A bis B gleichförmig beschleunigt beweget. Man findet daher die Beschleunigung G desselben (34. §.)

$$G = g \frac{P \text{ Sin } \alpha}{P} = g \text{ Sin } \alpha.$$

und hieraus die Zeit (35. §.)

$$\text{I.} \quad T = \sqrt{\frac{S}{g \text{ Sin } \alpha}}$$

Die am Ende der Zeit T in B erlangte Geschwindigkeit C ist nach demselben §.

$$\text{II.} \quad C = 2gT \text{ Sin } \alpha = 2\sqrt{(gS \text{ Sin } \alpha)}$$

und der durchlaufene Raum AB oder

$$\text{III.} \quad S = gT^2 \text{ Sin } \alpha$$

es verhalten sich also bei der schiefen Ebene, die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten; und die verflossenen Zeiten, wie die erlangten Geschwindigkeiten.

Hieraus folgt ferner, weil

$$G = g \text{ Sin } \alpha = g \frac{AC}{AB}$$

daß sich bei der schiefen Ebene die Beschleunigungen, wie die Höhen der schiefen Ebenen dividirt durch ihre Längen verhalten.

Eben so verhalten sich auch die beschleunigenden Kräfte (33 §.)

51. §.

Wenn der Körper in der Vertikallinie AD frei herabfiele, so wäre seine in der Zeit T erlangte Geschwindigkeit $= 2gT$ (16. §.); auf der schiefen Ebene erhält derselbe in eben der Zeit die Geschwindigkeit $2gT \text{ Sin } \alpha$, daher verhalten sich diese Geschwindigkeiten wie

$$1 : \text{Sin } \alpha = AB : AC,$$

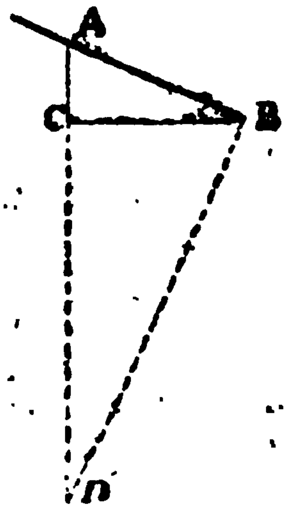
d. h. die Geschwindigkeit, welche ein Körper durch den freien vertikalen Fall erhält, verhält sich zu derjenigen, welche er durch den Fall auf einer schiefen Ebene in derselben Zeit erlangt, wie die Länge der Ebene zu ihrer Höhe.

52. §.

In der Zeit T fällt der Körper vertikal von der Höhe $h = gT^2$ (15. §.) und in eben der Zeit durchläuft er auf der schiefen Ebene den Raum $S = gT^2 \text{ Sin } \alpha$, und es verhält sich daher

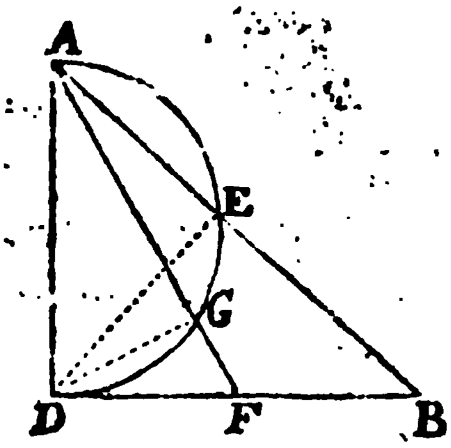
$$h : S = 1 : \text{Sin } \alpha = AB : AC$$

d. i. der vertikal durchlaufene Raum verhält sich zu dem auf der schiefen Ebene in derselben Zeit zurückgelegten Wege, wie die Länge der schiefen Ebene zur Höhe.



Gesetzt daß ein Körper auf der schiefen Ebene den Weg AB durchlaufen habe, so findet man den in eben der Zeit durchlaufenen vertikalen Weg AD, wenn aus B auf AB eine senkrechte Linie BD gezogen wird, bis solche die verlängerte AC schneidet. Denn

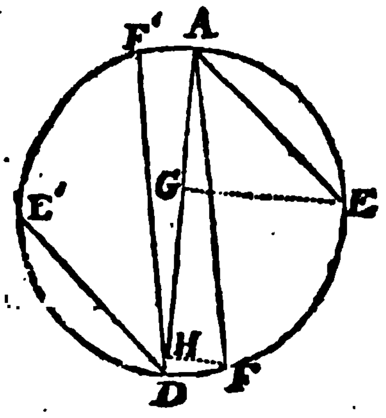
$$AD : AB = AB : AC.$$



Umgekehrt, wenn ein Körper in der Zeit T den vertikalen Weg AD durchlaufen hat, so findet man für diese Zeit den Weg AE auf der schiefen Ebene AB, wenn man DE auf AB senkrecht zieht, oder über AD einen Halbkreis beschreibt, welcher AB in E schneidet.

Dasselbe würde für jede andere schiefe Ebene AF gelten, wo AG der gesuchte Weg ist.

53. §.



Aus dem Vorhergehenden ergibt sich ferner der von Galilei erfundene Satz: daß ein Körper jede Sehne AE, AF im Halbkreise in eben der Zeit durchläuft, darin er durch den vertikalen Durchmesser AD frei fallen würde, d. h. die Sehnen werden gleichzeitig oder isochron durchlaufen.

Eben dasselbe gilt von den untern Sehnen DE′, DF′; weil sich allemal eine parallele Sehne AE, AF angeben läßt, welche mit der aus D gezogenen einerlei Neigung und Länge hat.

Es werden daher alle Sehnen, welche durch die Endpunkte des vertikalen Durchmessers eines Kreises gehen, in gleichen Zeiten durchlaufen.

54. §.

Die in D, F, E erlangten Geschwindigkeiten, bezeichne man mit c, c', c'', so verhält sich (51. §.)

$$\left.\begin{array}{l} c : c' = AF : AH = AD : AF \\ c'' : c = AG : AE = AE : AD \end{array}\right\} \text{folglich}$$

$$c'' : c' = AE : AF$$

also verhalten sich die in gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten, wie die Sehnen, oder wie die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume.

55. §.

Die Zeit des Falles durch AD, AB (in der zweiten Figur S. 44) sey t, t', so ist die Zeit durch AE = t (53. §.). Aber (50. §.)

$$t^2 : (t')^2 = AE : AB = \frac{AD^2}{AB} : AB = AD^2 : AB^2$$

$$\text{daher } t : t' = AD : AB$$

es verhält sich daher die Zeit des vertikalen Falles durch die Höhe der schiefen Ebene, zur Zeit des Falles durch die Länge derselben, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Setzt man die Zeiten, in welchen die Körper die Räume AD, AB, AF durchlaufen = t, t', t'' so verhält sich

$$t' : t = AB : AD, \text{ eben so}$$
$$t : t'' = AD : AF \text{ folglich}$$
$$t' : t'' = AB : AF$$

d. h. wenn Körper auf verschiedenen schiefen Ebenen von gleicher Höhe herunterfallen, so verhalten sich die verflossenen Zeiten, wie die Längen der Ebenen.

56. §.

Die durch den Fall von A in D erlangte Geschwindigkeit sei c, und durch den Fall auf der schiefen Ebene AB = C, so ist (50. §.)

$$C = 2\sqrt{(g \cdot AB \cdot \text{Sin}\,\alpha)}$$

Aber $\sin \alpha = \frac{AD}{AB}$, daher

$$C = 2\sqrt{\left(g \cdot AB \frac{AD}{AB}\right)} = 2\sqrt{(g \cdot AD)}.$$

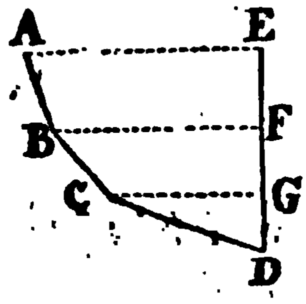
Durch den freien Fall in der Vertikale AD erhält der Körper eine Geschwindigkeit (16. §.)

$$c = 2\sqrt{(g \cdot AD)}$$

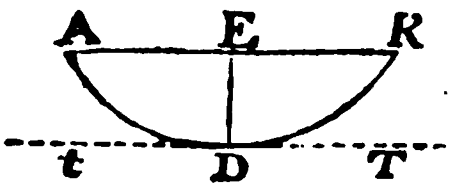
daher ist $c = C$, oder
die erlangte Geschwindigkeit eines durch die Höhe einer schiefen Ebene vertikal gefallenen Körpers ist eben so groß, als diejenige, welche der Körper durch den Fall längs der schiefen Ebene erhält.

Wenn umgekehrt ein Körper längs einer schiefen Ebene BA mit der Geschwindigkeit C zu steigen anfängt, so wird er in eben der Zeit seine größte Höhe erreichen, darin er beim Herunterfallen auf der schiefen Ebene die Geschwindigkeit C erlanget hätte. Auch wird der beim Herunterfallen durchlaufene Weg eben so groß seyn, wie beim Hinaufsteigen, welches man auf eine ähnliche Art wie bei dem vertikalen Steigen der Körper beweiset.

57. §.



Wenn AB, BC, CD mehrere unter verschiedenen Winkeln mit einander verbundene schiefe Ebenen sind, deren vertikale Höhen durch die Linien EF, FG, GD bezeichnet werden, so wird ein Körper, welcher von A bis B fällt, in B eben die Geschwindigkeit erlangen, welche er durch den freien Fall in der Vertikale EF erhält. Verlöre der Körper durch die Veränderung seiner Richtung in den Ecken B, C, nichts von seiner Geschwindigkeit, so würde die durch den Fall in der gebrochenen Linie ABCD in D erlangte Geschwindigkeit eben so groß seyn, als wenn er von der zugehörigen vertikalen Höhe ED frei herabgefallen wäre.



Durch die Bewegung in einer krummen Linie verliert ein Körper nichts von seiner Geschwindigkeit (8. §.), wenn daher ADK eine krumme Linie ist, welche sich in einer vertikalen Ebene befindet, und man zieht die horizontale Tangente tT, mit ihrer parallel die Ordinate AK, und durch den Berührungspunkt D die Vertikale DE, so wird ein Körper, welcher auf der krummen Linie AD frei herunter fällt, in D eine eben so große Geschwindigkeit nach der Richtung DT erhalten, als wenn er durch die Vertikale ED frei herabgefallen wäre. Mit dieser in D erlangten Geschwindigkeit wird er fortfahren sich zu bewegen, und auf der Linie DK einen Weg durchlaufen, welcher der Höhe DE zugehört, bis er im höchsten Punkte K seine Geschwindigkeit gänzlich verloren hat. In eben der Zeit muß der Körper wieder von K bis D herunter fallen, darin er gestiegen ist, und diese wechselseitige Bewegung des Körpers würde ohne Ende fortdauern, wenn er bei seiner Bewegung keine Hindernisse fände.

Sind beide Bogen AD, DK einander gleich, so fällt der Körper in eben der Zeit von A nach D, darin er von D nach K steigt, und umgekehrt.

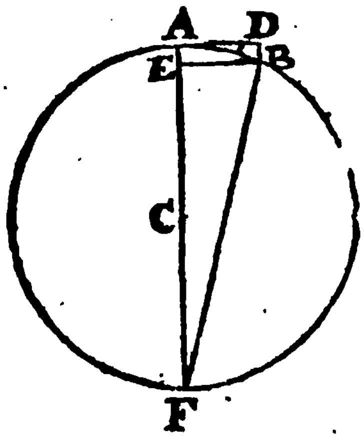
58. §.

Wenn der Bogen ADK eine Cycloide oder Radlinie ist, so läßt sich mit Hülfe der höhern Geometrie beweisen, daß unter allen möglichen Linien, welche zwischen A und D enthalten seyn können, der Körper in dieser Linie in der kürzesten Zeit von A bis D fällt. Auch hat diese Linie die Eigenschaft, daß ein Körper in eben der Zeit in D anlangt, er mag aus A oder aus einer niedrigern Stelle in der Linie AD seine Bewegung anfangen, weshalb man sie tautochronisch nennt.

Siebentes Kapitel.

Von der Kreisbewegung.

59. §.



Wenn sich ein Körper M, dessen Masse M man nur als träge annimmt, welches der Fall seyn würde, wenn solche auf einer ebenen horizontalen Tafel befindlich wäre, in einem Kreise ABF, dessen Halbmesser AC = r ist, mit der Geschwindigkeit c herum bewegt, so würde er, vermöge seiner Trägheit, in jedem Punkte A seine Bewegung nach der Tangente AD fortsetzen, wenn ihn nicht eine Kraft von der geraden Richtung ablenkte und nach dem Mittelpunkt C triebe. Diese **Centralkraft** nennt man auch die **Normal-**, **Centripetal-** oder **Annäherungskraft** (Vis centripeta, *Force centripède*), und man sieht, daß der Körper bei der Kreisbewegung ein beständiges Bestreben äußert, sich vom Mittelpunkte C zu entfernen, welches die **Schwung-**, **Flieh-** oder **Centrifugalkraft** (Vis centrifuga, *Force centrifuge*) genannt wird. Sie ist der Centripetalkraft entgegengesetzt und muß ihr gleich seyn.

Ist der Körper M mittelst eines Fadens in C befestiget, so ist die Gewalt, mit welcher der Körper M bei der Umdrehung den Faden spannt, die Schwungkraft. Sie wird empfunden, wenn man eine an einem Faden befestigte Bleikugel horizontal herum schwingt.

60. §.

Man nehme den Bogen AB so klein wie möglich an, so daß man sich denken kann, er falle mit seiner Sehne zusammen. Durchläuft nun der Körper M den Weg AB

in der Zeit t, so ist, wenn der Halbmesser $AC = r$ gesetzt wird

$$AE = \frac{AB^2}{2r}$$

Aber $AB = ct$ (5. §.) daher

$$AE = \frac{c^2 t^2}{2r}$$

Damit aber der Körper M den Weg AB durchlaufen kann, so muß er in der sehr kleinen Zeit t von einer Kraft V durch den Weg AE getrieben werden, und weil man in dieser sehr kleinen Zeit die Beschleunigung der Kraft V durch den Weg AE als gleichförmig ansehen kann, so ist, wenn M das Gewicht einer schweren Masse bezeichnet, die eben so viele materielle Theile hat, als die blos träge Masse M,

$$AE = g t^2 \frac{V}{M} \text{ (35. §.) oder}$$

$$g t^2 \frac{V}{M} = \frac{c^2 t^2}{2r}$$

daher findet man die Schwungkraft

$$\text{I.} \quad V = \frac{c^2}{2gr} M$$

Hieraus folgt:

$$V : M = 2\frac{c^2}{4g} : r$$

d. i. die Schwungkraft verhält sich zum Gewicht der umlaufenden Masse, wie die doppelte Fallhöhe, welche der Geschwindigkeit der Masse zugehört, zum Halbmesser.

Die Zeit eines Umlaufs sei $= T$, und die Zahl $3,14159.. = \pi$, so ist

$$2\pi r = cT; \text{ (5. §. I.) oder } c^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \text{ daher}$$

$$\text{II.} \quad V = \frac{4\pi^2 r^2}{2grT^2} M = \frac{2\pi^2 r}{gT^2} M.$$

Beispiel. Stellt man sich die Masse eines Körpers, der 12 Loth wiegt, in einem Punkte vereinigt vor, und setzt, daß sich der Körper auf einer horizontalen Fläche, an einem 2 Fuß langen Faden, mit einer Geschwindigkeit von 5 Fuß im

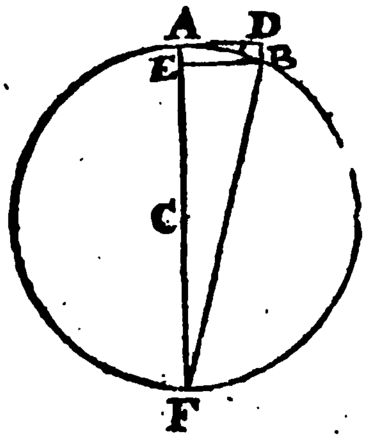
D

Siebentes Kapitel.

Von der Kreisbewegung.

59. §.

Wenn sich ein Körper M, dessen Masse M man nur als träge annimmt, welches der Fall seyn würde, wenn solche auf einer ebenen horizontalen Tafel befindlich wäre, in einem Kreise ABF, dessen Halbmesser AC = r ist, mit der Geschwindigkeit c herum bewegt, so würde er, vermöge seiner Trägheit, in jedem Punkte A seine Bewegung nach der Tangente AD fortsetzen, wenn



ihn nicht eine Kraft von der geraden Richtung ablenkte und nach dem Mittelpunkt C triebe. Diese Centralkraft nennt man auch die Normal-, Centripetal- oder Annäherungskraft (Vis centripeta, *Force centripède*), und man sieht, daß der Körper bei der Kreisbewegung ein beständiges Bestreben äußert, sich vom Mittelpunkte C zu entfernen, welches die Schwung-, Flieh- oder Centrifugalkraft (Vis centrifuga, *Force centrifuge*) genannt wird. Sie ist der Centripetalkraft entgegengesetzt und muß ihr gleich seyn.

Ist der Körper M mittelst eines Fadens in C befestiget, so ist die Gewalt, mit welcher der Körper M bei der Umdrehung den Faden spannt, die Schwungkraft. Sie wird empfunden, wenn man eine an einem Faden befestigte Bleikugel horizontal herum schwingt.

60. §.

Man nehme den Bogen AB so klein wie möglich an, so daß man sich denken kann, er falle mit seiner Sehne zusammen. Durchläuft nun der Körper M den Weg AB

in der Zeit t, so ist, wenn der Halbmesser AC $= r$ gesetzt wird

$$AE = \frac{AB^2}{2r}$$

Aber AB $= ct$ (5. §.) daher

$$AE = \frac{c^2 t^2}{2r}$$

Damit aber der Körper M den Weg AB durchlaufen kann, so muß er in der sehr kleinen Zeit t von einer Kraft V durch den Weg AE getrieben werden, und weil man in dieser sehr kleinen Zeit die Beschleunigung der Kraft V durch den Weg AE als gleichförmig ansehen kann, so ist, wenn M das Gewicht einer schweren Masse bezeichnet, die eben so viele materielle Theile hat, als die blos träge Masse M,

$$AE = gt^2 \frac{V}{M} \text{ (35. §.) oder}$$

$$gt^2 \frac{V}{M} = \frac{c^2 t^2}{2r}$$

daher findet man die Schwungkraft

$$\text{I.} \quad V = \frac{c^2}{2gr} M$$

Hieraus folgt:

$$V : M = 2\frac{c^2}{4g} : r$$

d. i. die Schwungkraft verhält sich zum Gewicht der umlaufenden Masse, wie die doppelte Fallhöhe, welche der Geschwindigkeit der Masse zugehört, zum Halbmesser.

Die Zeit eines Umlaufs sei $= T$, und die Zahl $3{,}14159.. = \pi$, so ist

$$2\pi r = cT; \text{ (5. §. I.) oder } c^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \text{ daher}$$

$$\text{II.} \quad V = \frac{4\pi^2 r^2}{2grT^2} M = \frac{2\pi^2 r}{gT^2} M.$$

Beispiel. Stellt man sich die Masse eines Körpers, der 12 Loth wiegt, in einem Punkte vereinigt vor, und setzt, daß sich der Körper auf einer horizontalen Fläche, an einem 2 Fuß langen Faden, mit einer Geschwindigkeit von 5 Fuß im

D

Kreise herum bewegt, so findet man nach I. die Schwungkraft

$$V = \frac{25 \,.\, 12}{2 \,.\, 15\tfrac{5}{8} \,.\, 2} = 4\tfrac{4}{5} \text{ Loth.}$$

Anmerk. Wenn man einen Stein in einen Tonnenband oder Reifen legt, den Band am entgegengesetzten Ende, wo der Stein liegt, anfaßt und im Kreise schnell herum schwingt, so bleibt der Stein vermöge seiner Schwungkraft im Bande liegen, ohne herunter zu fallen.

Das zwischen zwei horizontalen Mühlsteinen durch das Läuferauge in der Mitte einfallende Getreide, wird durch die Schwungkraft, welche es wegen der Umdrehung zwischen beiden Steinen erhält, nach dem Umfange derselben oder gegen den Lauft bewegt.

Ein dünner Läufer zerberstet und fällt neben dem Bodensteine nieder, vermöge seiner Schwungkraft.

Räder, deren Masse nicht gleichförmig am Umfange vertheilt ist, drücken die Wellzapfen vermöge der Schwungkraft.

61. §.

An der Stange AC, welche sich um die Axe C frei drehen kann, befinde sich in A eine blos träge Masse M, in B die träge Masse M'. Die Stange AC sei ohne Masse, und auf AC senkrecht wirke die bewegende Kraft P in die Masse M, so findet man den auf M' entstehenden Druck P', wenn CA = a und CB = b gesetzt wird

$$P' = \frac{aP}{b}$$

welcher als bewegende Kraft die Masse M' beschleunigt.

Soll nun durch die Bewegung beider Massen die Stange AC in gleichen Zeiten um einerlei Winkel gedreht werden, so müssen sich die beschleunigenden Kräfte wie die Wege der Massen in einerlei Zeit (33. §.) also wie ihre Entfernungen vom Umdrehungspunkte C verhalten, daher

$$\frac{P}{M} : \frac{P'}{M'} = a : b \text{ aber nach oben}$$
$$P' : P = a : b \text{ daher}$$
$$M' : M = a^2 : b^2 \text{ oder}$$
$$a^2 M = b^2 M'$$

d. h. **wenn zwei an einer Stange befindliche Massen, vermöge ihrer beschleunigenden Kräfte in gleicher Zeit um einerlei Winkel geführt werden sollen, so müssen sie sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe verhalten, oder die Produkte $a^2 M$ und $b^2 M'$ müssen einander gleich seyn.**

Weil hienach keine Masse, wegen der einwirkenden bewegenden Kraft, durch die erhaltene Beschleunigung die Stange schneller drehen oder der Masse voreilen kann, so lassen sich solche in Absicht der Umdrehung als **gleichgültig** ansehen, und man nennt deshalb die Produkte $a^2 M$, $b^2 M'$ **Momente der Trägheit, Momente der Massen** oder **Drehungsmomente** (Momenta inertiae, (*Moment d'inertie.*)

Wenn C die Geschwindigkeit der Masse M ist, und C' die Geschwindigkeit der Masse M', so ist

$$C : C' = a : b \text{ daher}$$
$$M' : M = C^2 : (C')^2 \text{ folglich}$$
$$MC^2 = M' (C')^2$$

oder **die Momente der Trägheit zweier Massen sind einander gleich, wenn die Produkte aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten gleich sind,** daher man auch diese Produkte **Momente der Trägheit** zu nennen pflegt, und als solche in Rechnung bringen kann.

62. §.

Wird die Masse M' aus B weggenommen, und eine andere m in einer Entfernung CD $= \beta$ angebracht, und es ist

$$\beta^2 m = b^2 M'$$

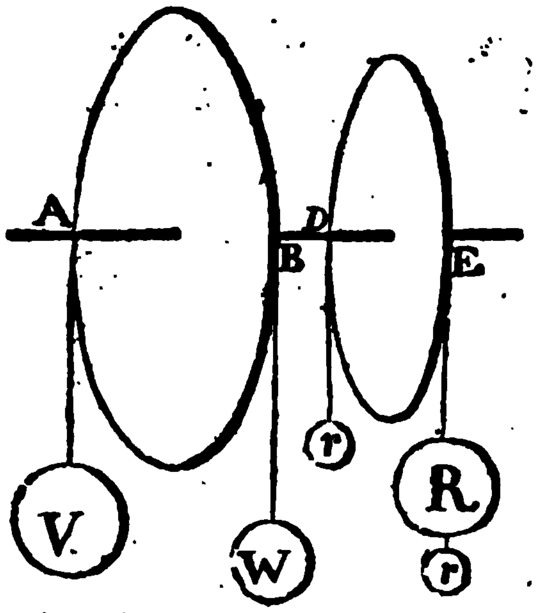
so wird die beschleunigende Kraft der Masse m noch eben so auf die Bewegung der Stange wirken, wie die beschleunigende Kraft der Masse M′ in B, vorausgesetzt, daß die bewegende Kraft unverändert bleibt. Auch sieht man ein, wie statt einer Masse M′ eine andere gegebene m′ gesetzt werden kann, wenn m n

$$\beta^2 = b^2 \frac{M'}{m} \text{ nimmt;}$$

oder wenn die Entfernung β gegeben ist, so läßt sich die Masse

$$m = \frac{b^2}{\beta^2} M' \text{ finden.}$$

Die Beschleunigung, mit welcher sich jeder Punkt der Stange AC umdreht, bleibt alsdann offenbar dieselbe, wenn die bewegende Kraft, welche auf M wirkt, unverändert bleibt.



Um die Anwendung hiervon auf einen besondern Fall zu zeigen, so setze man, daß an der Axe AE zwei kreisförmige Scheiben AB, DE befestiget sind, deren Masse man hier nicht in Betrachtung ziehet. Die Halbmesser der Scheiben AB, DE sind a, b, und in A hängt ein Gewicht V von 7 Pfund, in B ein Gewicht W von 3 Pfund, beide an einerlei Halbmesser a. Die bewegende Kraft ist alsdann.

$$V - W = 4 \text{ Pfund}$$

und man findet die Beschleunigung, mit welcher das Gewicht V sinken wird (37. §.)

$$G = 15\tfrac{5}{8}\,\frac{7-3}{7+3} = 6\tfrac{1}{4} \text{ Fuß.}$$

Soll nun das Gewicht W weggenommen und ein anderes am Halbmesser b in E aufgehangen werden, jedoch so, daß die Beschleunigung, mit welcher das Gewicht V sinkt, dieselbe bleibt, so muß auch die bewegende Kraft V — W unverändert bleiben. Man setze a = 3, b = 2

Fuß, so wird erfordert, wenn W weggenommen ist, daß bei unveränderter bewegender Kraft, in E ein Gewicht

$$R = \frac{aW}{b} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4\tfrac{1}{2} \text{ Pfund}$$

aufgehängt werde.

Hiedurch ist zwar die Bedingung erfüllt, daß die bewegende Kraft nicht geändert ist, aber die Momente der Massen

$$b^2 R \text{ und } a^2 W \text{ oder}$$
$$4 \cdot 4\tfrac{1}{2} \text{ und } 9 \cdot 3$$

sind ungleich, daher würde (61. §.) die Scheibe DE für sich betrachtet, in einerlei Zeit nicht eben so oft umlaufen wie die Scheibe AB. Damit dieses aber erfolgt, so setze man die am Umfang der Scheibe DE erforderliche Masse $= M$, so ist

$$M = \frac{a^2}{b^2} W = \frac{9}{4} \cdot 3 = 6\tfrac{3}{4} \text{ Pfund Masse.}$$

Es ist aber schon $R = 4\frac{1}{2}$, daher fehlen noch

$$M - R = 6\tfrac{3}{4} - 4\tfrac{1}{2} = 2\tfrac{1}{4} \text{ Pfund Masse}$$

die am Umfang der Scheibe DE so angebracht werden müssen, daß hiedurch die bewegende Kraft an A nicht geändert wird, welches offenbar dadurch geschehen kann, daß man auf beiden Seiten an einem Faden ein Gewicht $r = \frac{1}{2}(M - R) = 1\frac{1}{8}$ Pfund aufhängt.

Alsdann ist die bewegende Kraft unverändert geblieben, und weil

$$a^2 W = b^2 M = b^2 (R + 2r)$$

so ist auch die Beschleunigung dieselbe, weil statt der Masse W an a, die ihr gleichgültige M an b gebracht worden.

Hieraus folgt: daß eine Kraft den von ihr angegriffenen Punkt in einerlei beschleunigte Bewegung setzt, wenn

1. die statischen Momente der Gewichte und
2. die Momente der Massen dieselben bleiben, man mag übrigens die Gewichte oder Massen ändern wie man will.

Auch sieht man hieraus, was es heißt, eine Masse auf irgend einen Punkt reduziren; dies geschieht mittelst der Momente der Massen auf eine ähnliche Art, wie in der Statik Gewichte oder Kräfte mittelst der statischen Momente reduzirt werden.

Diese wichtigen Lehren und die damit verwandten Untersuchungen auf eine eigene vorzügliche Art entwickelt, findet man im zweiten Kapitel von

K. C. Langsdorf, Handbuch der Maschinenlehre für Praktiker und akademische Lehrer. Erster Band. mit K. Altenburg 1797.

63. §.

Befinden sich an einem Hebel mehrere blos träge Massen A, B, C, D... in Entfernungen a, b, c, d... vom Umdrehungspunkte, und in irgend einer Entferuung k von diesem Punkte ist eine bewegende Kraft P angebracht, welche immer in senkrechter Richtung auf den Hebel wirkt, so kann man nach Beschleunigung G des von der Kraft angegriffenen Punktes fragen, um darnach die Bewegung jeder einzelnen Masse und des ganzen Hebels zu beurtheilen.

Es kommt zuerst darauf an, in der Entfernung k eine Masse M anzugeben, welche sämmtlichen Massen A, B, C... in den Entfernungen a, b, c... gleichgültig ist, oder mit andern Worten, die Massen A, B, C... nach der Lehre vom Moment der Trägheit auf die Entfernung k zu reduziren. Nun findet man

$$M = \frac{a^2 A + b^2 B + c^2 C + \ldots}{k^2}$$

daher die gesuchte Beschleunigung (34. §.)

$$G = g \frac{P}{M} \text{ oder}$$

$$G = \frac{g k^2 P}{a^2 A + b^2 B + c^2 C + d^2 D + \ldots}$$

Sobald für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit eines Punkts in der Entfernung k bekannt ist, so kann hienach leicht die Geschwindigkeit für jede andere Entfernung gefunden werden.

Auch sieht man ein, daß hier anstatt der Entfernungen a, b, c ... die Geschwindigkeiten der Massen A, B, C ... für irgend einen Zeitpunkt in Rechnung gebracht werden konnten.

Sind mehrere Kräfte P P′ P″ ......, welche in den Entfernungen k k′ k″ ...... vom Umdrehungspunkte, in einerlei Ebene senkrecht auf den Hebel wirken; befinden sich ferner die Massen A B C ...... in Entfernungen a b c ...... vom Umdrehungspunkte, so ist die Größe der bewegenden Kraft in der Entfernung x vom Umdrehungspunkte, welche aus der Wirkung sämmtlicher Kräfte entspringt

$$= \frac{kP}{x} + \frac{k'P'}{x} + \frac{k''P''}{x} + \ldots\ldots$$

Werden sämmtliche Massen A B C ..... auf die Entfernung x reduzirt, so ist ihre Summe

$$= \frac{a^2 A}{x^2} + \frac{b^2 B}{x^2} + \frac{c^2 C}{x^2} + \ldots\ldots$$

und wenn die Beschleunigung des Punkts, welcher auf die Weite x vom Umdrehungspunkte absteht = G ist, so wird

$$G = g\,\frac{\frac{kP}{x} + \frac{k'P'}{x} + \ldots\ldots}{\frac{a^2 A}{x^2} + \frac{b^2 B}{x^2} + \ldots\ldots} \quad \text{oder}$$

$$G = gx\,\frac{kP + k'P' + k''P'' + \ldots\ldots}{a^2 A + b^2 B + c^2 C + \ldots\ldots}$$

d. h. man findet die Beschleunigung eines Punkts in einem System, welches von mehrern Kräften angegriffen ist, wenn man die Summe der statischen Momente der Kräfte, durch die Summe von den Momenten der Trägheit der Massen dividirt und den Quotienten mit der Entfernung x und mit g multiplizirt.

64. §.

In den vorhergehenden Untersuchungen war vorausgesetzt, daß die Massen in einem einzigen Punkte vereinigt wären, oder daß alle körperliche Theile der Massen als gleichweit vom Umdrehungspunkte angesehen werden konnten. Weil es aber sehr wichtig ist, das Moment der

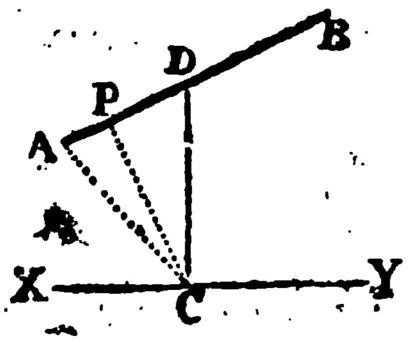
Trägheit eines jeden Körpers zu kennen, um mittelst desselben den Gang einer Maschine zu beurtheilen, so müßte man, um dieses Moment für einen Körper von bestimmter Figur und gegebener Entfernung von der Umdrehungsaxe zu finden, für jedes Elementartheilchen desselben das Moment der Trägheit suchen, da denn die Summe aller dieser Momente das Moment der Trägheit des ganzen Körpers gäbe. Man kann das Moment der Trägheit eines Körpers, dessen Masse M ist, durch $z^2 M$ bezeichnen, und die höhere Analysis lehrt die Summe von den Momenten der einzelnen Elementartheilchen der Masse ohne eine mühsame Summation finden. Die folgenden §. §. enthalten Versuche, für die vorzüglichsten Fälle in der Ausübung, die Momente der Trägheit ohne Beihülfe der höhern Analysis anzugeben.

Sobald das Moment der Masse $z^2 M$ eines Körpers, welcher sich um eine gegebene Axe dreht, bekannt ist, so läßt sich daraus allemal mittelst der bewegenden Kraft P und ihrer Entfernung k von der Axe, die Beschleunigung G des angegriffenen Punkts finden, vorausgesetzt, daß die Richtung der Kraft P senkrecht auf einem geraden Hebelsarm sei, der mit der Axe, um welche die Masse gedreht werden soll, verbunden ist. Man erhält alsdann

$$G = \frac{g\, k^2\, P}{z^2 M}$$

und es wird angenommen, daß außer der Masse M keine weiter in Bewegung gesetzt werden darf.

65. §.



Auf der Axe XY sei der Hebelsarm CD senkrecht, und am Ende desselben in D befinde sich ein dünner prismatischer Stab AD senkrecht auf CD. Die Axe dieses Stabes liege in einer Ebene, welche auf der Axe XY senkrecht steht, so daß er bei der Bewegung um XY nach der Seite (in latus) schwinge; man soll das Moment der

Trägheit des Stabes AD finden, wenn die Axe XY und der Arm CD ohne Masse angenommen wird.

Es sei $CD = a$, die Länge des Stabes $AD = b$, der senkrechte Querschnitt desselben $= f$, so ist sein körperlicher Inhalt $= fb$, und wenn seine Masse $= M$ gesetzt wird, so läßt sich hier $M = fb$ annehmen. Man theile die Länge des Stabes AD in n gleiche Theile, wo n eine sehr große Zahl seyn kann, so ist die Länge eines jeden dieser Theilchen $= \frac{1}{n} b$ und die Masse desselben $= \frac{1}{n} M$ und man findet das Moment der Trägheit von dem ersten dieser Theilchen, welches zunächst bei D liegt

$$= (CD)^2 \frac{1}{n} M = a^2 \frac{1}{n} M.$$

Das zweite Theilchen ist um $\frac{1}{n} b$ von D entfernt, daher sein Abstand die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreiecks, dessen Katheten a und $\frac{1}{n} b$ sind. Dies gibt das Moment der Trägheit des zweiten Theilchens

$$= [a^2 + (\frac{1}{n} b)^2] \frac{1}{n} M$$

Eben so für das dritte

$$[a^2 + (\frac{2}{n} b)^2] \frac{1}{2} M$$

für das vierte

$$[a^2 + (\frac{3}{n} b)^2] \frac{1}{n} M$$

und für das $n$te oder letzte

$$[a^2 + (\frac{n-1}{n} b)^2] \frac{1}{n} M$$

Die Summe dieser Momente der Trägheit für die einzelnen Theile der Masse M geben das Moment der Trägheit für den ganzen Stab, oder $z^2 M$, und es kommt darauf an, diese Summe zu finden. Nimmt man die einzelnen Theile zusammen, so erhält man folgende Reihe, welche $z^2 M$ um so viel genauer gibt, je größer n angenommen wird

$$z^2 M$$

$$= \frac{1}{n} M \left[na^2 + \left(\frac{1}{n} b\right)^2 + \left(\frac{2}{n} b\right)^2 + \left(\frac{3}{n} b\right)^2 + \ldots \left(\frac{n-1}{n} b\right)^2 \right]$$

$$= M a^2 + M \frac{b^2}{n^3} \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2 \right]$$

Nun ist, nach bekannten Regeln, die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis x

$$= \tfrac{1}{6}\, x\, (x+1)\, (2x+1)$$

daher im vorliegenden Fall die Summe aller Quadrate in der Parenthese

$$= \tfrac{1}{6}\, (n-1)\, n\, (2n-1)$$

Nimmt man nun für n eine außerordentlich große Zahl an, wie es nach der vorhergehenden Berechnung erfordert wird, so kann man ohne Nachtheil eine Einheit mehr oder weniger bei der großen Zahl n weglassen, und man erhält für die Summe der Quadrate

$$\frac{2n^3}{6} = \tfrac{1}{3}\, n^3 \text{ daher}$$

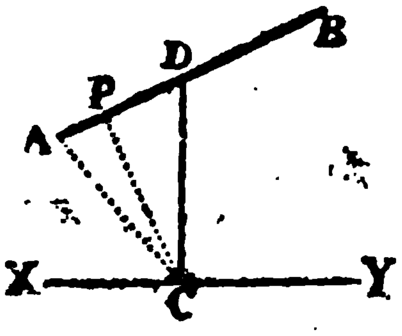
$$z^2 M = M a^2 + M \frac{b^2}{n^3} \tfrac{1}{3}\, n^3$$

$$= M a^2 + \tfrac{1}{3} M b^2$$

oder das Moment der Trägheit einer dünnen prismatischen Stange, deren Länge b und Masse M ist, welche am Ende eines Hebelarms a (dessen Masse bei Seite gesetzt wird) rechtwinklicht angebracht ist, und die sich nach der Seite um eine Axe schwingt, findet man

$$z^2 M = (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2) M.$$

66. §.



Wäre die dünne Stange AB nicht an ihrem Ende, sondern zwischen beiden Enden bei D so angebracht, daß CD auf AB rechtwinklicht stehet, so kann man nach dem vorigen §. das Moment der Trägheit von AD und DB suchen, beide zusammen addiren, so erhält man das Moment der Trägheit von der ganzen Stange AB.

Es sei die genze Länge $AB = l$, die Entfernung $CD = a$, $AD = b$, der senkrechte Querschnitt der Stange $= f$, so ist die Masse $AD = fb$ daher das Moment der Trägheit von AD

$$= (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2)\, fb$$

Ferner ist die Masse von $DB = f(l - b)$ daher das Moment der Trägheit von DB

$$= [a^2 + \tfrac{1}{3} (l - b)^2]\, f(l - b)$$

beide zusammengenommen geben das Moment der Trägheit für die Stange AB

$$= (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2)\, fb + [a^2 + \tfrac{1}{3} (l - b)^2]\, f(l - b)$$

$$= (a^2 + b^2 - bl + \tfrac{1}{3} l^2)\, fl.$$

Wird die Masse der ganzen Stange $AB = M$ gesetzt, so ist $M = fl$, und man findet das Moment der Trägheit für die Stange AB, welche nach der Seite schwingt

$$z^2 M = (a^2 + b^2 - bl + \tfrac{1}{3} l^2)\, M. \text{ *)}$$

---

*) Mittelst der Integralrechnung findet man die Ausdrücke der beiden vorhergehenden §. §. auf folgende Art. Es sei P ein willkührlicher Punkt in AB; $AP = x$; und die Masse von $AP = M' = fx$, so ist das Differential derselben $dM' = f dx$, und das Moment der Trägheit eines solchen Elements in $P = PC^2\, dM' = [a^2 + (b - x)^2]\, f dx$, also das Integral oder Moment der Trägheit für die Masse von A bis P

$$\int PC^2\, dM' = f\int [a^2\, dx + (b - x)^2\, dx]$$

$$= f\left(a^2 x + b^2 x - bx^2 + \frac{x^3}{3}\right)$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $x = 0$ das Moment der Trägheit verschwindet.

Für $x = l$ erhält man das Moment der Trägheit für die ganze Stange AB

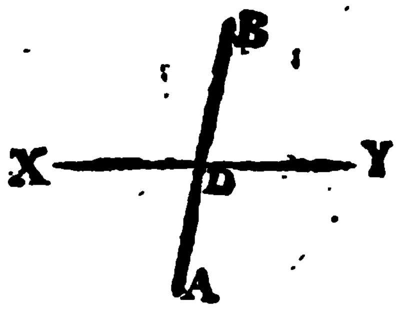
$$= fl\,(a^2 + b^2 - bl + \tfrac{1}{3} l^2)$$

und für $b = 0$

$$= fl\,(a^2 + \tfrac{1}{3} l^2)$$

wie 65. §.

67. §.



Ist die dünne prismatische Stange AB unmittelbar an der Umdrehungsaxe XY befestiget, so wird $CD = a = 0$, der Punkt D in der vorhergehenden Figur fällt in C, und man findet für diesen Fall, wo die Stange unter einem rechten Winkel unmittelbar an der Axe befestiget ist und auf beiden Seiten der Axe über stehet, das Moment der Trägheit

I. $z^2 M = (b^2 - bl + \frac{1}{3} l^2) M$.

Ist die Stange in ihrer Mitte befestiget, also $AD = DB$ oder $b = \frac{1}{2} l$, so erhält man, wenn $\frac{1}{2} l$ statt b gesetzt wird, das Moment der Trägheit für diesen Fall

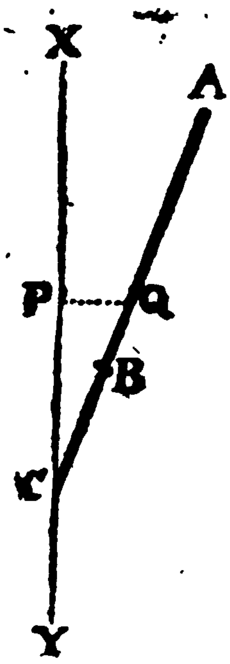
II. $z^2 M = \frac{1}{12} l^2 M$.

Hätte die Stange nur einen Arm $AD = b$, so wäre $DB = 0$ also $l = b$; setzt man daher in der ersten Gleichung dieses §. b statt l, so ist in diesem Falle das Moment der Trägheit

III. $z^2 M = \frac{1}{3} b^2 M$

wo M die jedesmalige Masse der bewegten Stange bezeichnet.

68. §.



Schwingt eine dünne prismatische Stange nach der Fläche (in plano), welches der Fall ist, wenn sich die Axe derselben mit der Umdrehungsaxe in einerlei Ebene befindet, so kann man sich vorstellen, daß die gerade Stange AC in C mit der Umdrehungsaxe XY unter dem Winkel $ACX = \alpha$ verbunden sei. Man setze die Länge der Stange $AC = l$, ihre Masse $= M$ und theile AC in eine sehr große Anzahl gleicher Theile $= n$, so ist die Länge jedes Theilchen $= \frac{1}{n} l$ und die Masse $= \frac{1}{n} M$.

Für irgend ein Theilchen in Q erhält man den Abstand PQ von der Umdrehungsaxe $=$ CQ Sin α, daher das Moment der Trägheit des ersten Theilchens

$$= \left(\frac{1}{n}\, l \,\mathrm{Sin}\, \alpha\right)^2 \frac{1}{n} M$$

des zweiten

$$\left(\frac{2}{n}\, l \,\mathrm{Sin}\, \alpha\right)^2 \frac{1}{n} M$$

des dritten

$$\left(\frac{3}{n}\, l \,\mathrm{Sin}\, \alpha\right)^2 \frac{1}{n} M$$

und des nten oder letzten

$$= \left(\frac{n}{n}\, l \,\mathrm{Sin}\, \alpha\right)^2 \frac{1}{n} M$$

Die Summe dieser einzelnen Momente gibt das Moment der Trägheit der ganzen Stange AC

$$z^2 M = \frac{l^2 \,\mathrm{Sin}\, \alpha^2 \, M}{n^3} \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots n^2\right]$$

oder weil diese letzte Summe von den Quadraten der natürlichen Zahlen

$$= \tfrac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$$

so erhält man bei einer außerordentlich großen Zahl n, welche durch Hinzufügung einer Einheit wenig vermehrt oder vermindert wird, diese Summe

$$\tfrac{2}{6}\, n^3 = \tfrac{1}{3}\, n^3$$

daher ist für eine dünne prismatische Stange AC, welche unter einem Winkel α gegen die Umdrehungsaxe geneigt ist, das Moment der Trägheit

$$z^2 M = \tfrac{1}{3}\, l^2 \,\mathrm{Sin}\, \alpha^2 \, M$$

Weil Sin $30^\circ = \frac{1}{2}$; Sin $45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und Sin $60^\circ = \frac{3}{4}$ ist, so erhält man

$$z^2 M = \tfrac{1}{12}\, l^2 M \text{ für } \alpha = 30 \text{ Grad,}$$
$$= \tfrac{1}{6}\, l^2 M \text{ für } \alpha = 45 \text{ Grad,}$$
$$= \tfrac{1}{4}\, l^2 M \text{ für } \alpha = 60 \text{ Grad.}$$

Für $\alpha = 90^\circ$ wird $z^2 M = \frac{1}{3}\, l^2 M$ wie 67. §. III.

69. §.

Wenn von der dünnen prismatischen Stange AC ein Theil BC, welcher der Umdrehungsaxe am nächsten ist, keine Masse hat, so setze man BC = a, AB = b, und die Masse der Stange AB = M. Wäre BC eine Stange von eben der Art, deren Masse = N wäre, so fände man das Moment der Trägheit von der ganzen Stange AC

$$= \frac{1}{3} (a+b)^2 \text{ Sin } \alpha^2 \ (N+M)$$
$$= \frac{1}{3} (a^2+2ab+b^2) \text{ Sin } \alpha^2 \ (N+M)$$

von dem Theil BC

$$= \frac{1}{3} . a^2 . \text{Sin } \alpha^2 \ . \ N$$

das letztere vom erstern abgezogen, gibt, wenn $N = \frac{aM}{b}$ gesetzt wird, das **Moment der Trägheit für die Stange AB**

$$z^2 M = (a^2+ab+\tfrac{1}{3}b^2) \text{ Sin } \alpha^2 M \text{ *)}$$

Für $\alpha = 90°$ wird Sin $\alpha = 1$ daher

$$z^2 M = (a^2+ab+\tfrac{1}{3}b^2) M.$$

Anmerk. Es wäre noch übrig die Momente der Trägheit für prismatische Stangen von ansehnlicher Dicke zu bestimmen, wenn man nicht annehmen kann, daß alle Punkte in ihren senkrechten Querschnitten gleich weit von der Umdrehungsaxe abstehen. In vielen Fällen, wo nicht die äußerste Genauigkeit erfordert wird, können aber die obigen Bestimmungen hinreichen.

---

*) Die höhere Analysis lehrt dies Moment auf folgende Art finden. Man setze die Länge BQ = x, die dazu gehörige Masse = M', den senkrechten Querschnitt der Stange = f, so ist dM' = fdx, und das Moment der Trägheit für eine so unendlich kleine Masse in Q

$$PQ^2 \, dM' = (a+x)^2 \text{ Sin } \alpha^2 . f dx \text{ also}$$
$$\int PQ^2 \, dM' = f \text{Sin} \alpha^2 \int (a^2 dx + 2ax dx + x^2 dx)$$
$$= f \text{Sin} \alpha^2 \left(a^2 x + ax^2 + \frac{x^3}{3}\right)$$

wo keine constante Größe hinzu kommt.

Für x = b wird das Moment der Trägheit

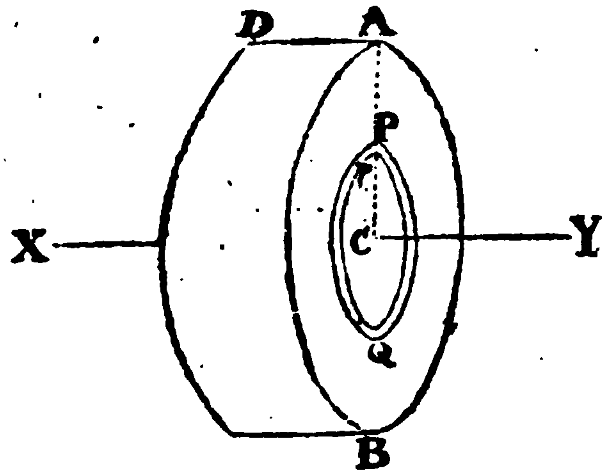
$$= (a^2 + ab + \tfrac{1}{3} b^2) \text{ Sin} \alpha^2 \ . \ fb$$

und für a = o

$$= \tfrac{1}{3} b^2 \text{ Sin } \alpha^2 \ fb$$

wie 68. §.

70. §.



Das Moment der Trägheit einer Welle oder cylindrischen Scheibe, welche sich um ihre Axe dreht, kann man dadurch finden, daß man den Halbmesser $AC = r$ in eine sehr große Anzahl von n gleichen Theilen eintheilt, und durch diese Punkte concentrische Kreise aus dem Mittelpunkt C beschreibt. Ist nun die Länge $AD = 1$, so kann man das Moment der Trägheit für die einzelnen Massen suchen, welche die Fläche zwischen zwei zunächst gelegenen concentrischen Kreisen zur Grundfläche, und die Länge 1 zur Höhe haben, da denn die Summe aller dieser Momente, das Moment der Trägheit des ganzen Körpers gibt.

Für $CP = x$ ist der Umfang $PQP = 2\pi x$ und wenn $Pp = \frac{1}{n} r$ ist, so erhält man für den Halbmesser x den Flächenraum zwischen den beiden zunächst bei P gelegenen concentrischen Kreisen $= 2\pi x \cdot \frac{1}{n} r$ und den körperlichen Inhalt $= 2\pi x \frac{1}{n} r l$ also das Moment der Trägheit dieser dünnen ringförmigen Masse

$$= x^2 \cdot 2\pi x \frac{1}{n} r l = \frac{2\pi r l}{n} x^3$$

Auf diese Art können sämmtliche Momente der Trägheit bestimmt werden, welche man desto genauer findet, je größer die Zahl n angenommen wird, oder je näher die concentrischen Kreise aneinander kommen. Werden nun alle Momente der Trägheit vom Mittelpunkt C an, für jeden Halbmesser $\frac{1}{n} r$, $\frac{2}{n} r$, $\frac{3}{n} r$, u. s. w. berechnet, so findet man

$$\frac{2\pi r l}{n}\left(\frac{1}{n}r\right)^3 + \frac{2\pi r l}{n}\left(\frac{2}{n}r\right)^3 + \frac{2\pi r l}{n}\left(\frac{3}{n}r\right)^3$$
$$+\frac{2\pi r l}{n}\left(\frac{4}{n}r\right)^3 + \ldots . \frac{2\pi r l}{n}\left(\frac{n}{n}r\right)^3$$
$$= \frac{2\pi l r^4}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots . n^3)$$

Die Summe von den Würfeln der natürlichen Zahlen von 1 bis n, ist nach bekannten Regeln $= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$, oder für eine sehr große Zahl $n = \frac{1}{4} n^2 n^2 = \frac{1}{4} n^4$, daher ist das **Moment der Trägheit eines Cylinders, welcher sich um seine Axe dreht**

$$z^2 M = \tfrac{1}{2}\pi l r^4$$

oder wenn die Masse des Cylinders $\pi r^2 l = M$ gesetzt wird

$$z^2 M = \tfrac{1}{2} r^2 M. \text{ *)}$$

71. §.

Das Moment der Trägheit eines **hohlen Cylinders** oder eines prismatischen **ringförmigen Körpers**, welcher sich um seine Axe dreht, und dessen äußerer Halbmesser $= R$ und der innere $= r$ gesetzt wird, findet man, wenn zuvor das Moment der Trägheit für den vollen Cylinder gesucht, und davon das Moment des fehlenden abgezogen wird.

Das Moment der Trägheit für einen Cylinder von dem Halbmesser R ist

$$= \tfrac{1}{2}\pi l R^4$$

und für den Halbmesser r

$$= \tfrac{1}{2}\pi l r^4$$

---

*) Für $CP = x$ sei die Masse des dazu gehörigen Cylinders $PQ = \pi x^2 l = M'$, so ist $dM' = 2\pi l x dx$, und das Moment der Trägheit für dieses Element

$$x^2 dM' = x^2 . 2\pi l x dx \text{ daher}$$
$$\int x^2 dM' = 2\pi l \int x^3 dx = \tfrac{1}{2}\pi l x^4$$

wo keine Constante hinzu kommt.

Für $x = r$ wird

$$z^2 M = \tfrac{1}{2}\pi l r^4 = \tfrac{1}{2} r^2 M \text{ wie oben.}$$

daher das Moment der Trägheit des ausgehöhlten Cylinders oder

$$z^2 M = \tfrac{1}{2}\pi l\,(R^4 - r^4)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi l\,(R^2 - r^2)\,(R^2 + r^2)$$

Ist M die Masse des hohlen Cylinders, so wird $M = \pi l\,(R^2 - r^2)$ daher auch

$$z^2 M = \tfrac{1}{2}\,(R^2 + r^2)\,M.$$

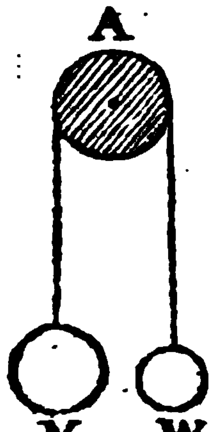
Beispiel. Ein Läufer, welcher 4000 Pfund wiegt, hat, bei einem Durchmesser von 4 Fuß, ein 9 Zoll weites Läuferauge, man sucht sein Moment der Trägheit

$$z^2 M = \tfrac{1}{2}\,(4 + \tfrac{9}{64})\;4000 = 8281\tfrac{1}{4}.$$

Eben so lassen sich die Momente der Trägheit für die Felgen oder Kränze der Räder finden.

72. §.

Es wird nun leicht seyn, mit Hülfe der vorigen §. §. die Momente der Trägheit für verschiedene Körper so genau zu bestimmen, als es in der Ausübung verlangt wird, weshalb hier noch einige Fälle, bei welchen die Momente der Trägheit zu wissen nöthig sind, angeführt werden sollen.



Ueber eine massive Rolle hängen zwei Gewichte $V > W$, man soll die Bewegung des Gewichts V mit Rücksicht auf die Masse der Rolle und auf die Reibung bestimmen.

Die Masse der Rolle sei M, ihr Halbmesser $= r$, so ist ihr Moment der Trägheit $= \tfrac{1}{2} r^2 M$. Wird die Masse M auf den Halbmesser r reduzirt r (63. §.), so erhält man die an r gleichgültige Masse

$$= \frac{\tfrac{1}{2} r^2 M}{r^2} = \tfrac{1}{2} M.$$

Wegen der Reibung am Bolzen der Rolle, und zur Ueberwältigung der Steifigkeit der Seile, sei am Halbmesser r eine Kraft F erforderlich, so ist die bewegende Kraft oder die Ueberwucht

$$= V - W - F;$$

die am Halbmesser r zu bewegende Masse, (wenn die Masse des Bolzens nicht in Rechnung kommt)

$$= V + W + \tfrac{1}{2} M$$

daher 34. §. die Beschleunigung des Gewichts V

$$G = g \frac{V - W - F}{V + W + \frac{1}{2} M}$$

Wäre statt des Gewichts V eine Kraft V angebracht, deren Masse V′ ist, so wäre

$$G = g \frac{V - W - F}{V' + W + \frac{1}{2} M}$$

73. §.

Bei den Untersuchungen über die Frikzion der Körper unterscheidet man die Frikzion nach vorhergegangener Ruhe, oder im Anfange der Bewegung, von der Frikzion während der Bewegung, da letztere beträchtlich kleiner als erstere ist. Versuche über die Frikzion im Anfange der Bewegung lassen sich leicht anstellen, wie solches aus der Statik bekannt ist. Soll aber die Frikzion an einem Zapfen während der Bewegung durch Versuche bestimmt werden, so kann solches mit Hülfe des vorstehenden §. geschehen.

Mit Beibehaltung der eingeführten Bezeichnung, sei

m das Gewicht des Bolzens oder Zapfens, an welchem die Rolle der Scheibe befestiget ist,

r der Halbmesser der Scheibe, und

ϱ der Halbmesser des Zapfens, an dessen Umfang die Frikzion f gesucht wird,

so ist die Beschleunigung des Gewichts V

$$G = g \frac{V - W - F}{V + W + \frac{1}{2} M + \frac{\frac{1}{2}\varrho^2 m}{r^2}}$$

Wenn ferner aus Beobachtungen der Raum s bekannt ist, welcher in der Zeit t von dem Gewichte V durchlaufen worden, so erhält man (35. §. I.)

$$G = \frac{s}{t^2}$$

nun ist ferner mit Beiseitesetzung der Steifigkeit der Schnur

$$F = \frac{f\varrho}{r}.$$

und wenn

μ der Bruch ist, welcher das Verhältniß der Frikzion zum Druck bezeichnet, so ist

$$f = \mu\,(V+W+M+m)$$

daher

$$\frac{s}{t^2} = g\,\frac{V - W - \mu\frac{\varrho}{r}(V+W+M+m)}{V+W+\frac{1}{2}M+\frac{\frac{1}{2}\varrho^2 m}{r^2}}$$

und hieraus das Verhältniß der Frikzion zum Druck während der Bewegung oder

$$\mu = \frac{V - W - \frac{s}{g t^2}\left(V+W+\frac{1}{2}M+\frac{\frac{1}{2}\varrho^2 m}{r^2}\right)}{\frac{\varrho}{r}(V+W+M+m)},$$

Wird allein die Frikzion am Zapfen gesucht, so ist

$$f = \frac{r}{\varrho}\left[V - W - \frac{s}{g t^2}\left(V+W+\frac{1}{2}M+\frac{\frac{1}{2}\varrho^2 m}{r^2}\right)\right]$$

Wäre die Rolle durchbohrt und der Zapfen unbeweglich, so ist nahe genug

$$f = \frac{r}{\varrho}\left[V - W - \frac{s}{g t^2}\left(V+W+\frac{1}{2}M\right)\right].$$

74. §.

Hängt die Last W nicht frei herab, sondern liegt auf einer horizontalen Ebene und wird mittelst des Gewichts V längs dieser Ebene fortgezogen, so kann die Frage entstehen, wie groß die von W herrührende Frikzion während der Bewegung ist. Man setze, daß F die Frikzion, und F' die auf den Umfang der Rolle reduzirte Frikzion zwischen dem Bolzen und der Rolle, nebst der Steifigkeit der Seile bezeichne, die hier als bekannt angesehen werden kann, so ist

$$G = g\,\frac{V - F' - F}{V+W+\frac{1}{2}M} \text{ oder}$$

$$F = V - F' - \frac{G}{g}\left(V+W+\frac{1}{2}M\right)$$

daher die von der Last W entstehende Frikzion auf einer horizontalen Ebene, oder

$$F = V - F' - \frac{s}{g\,t^2}(V + W + \tfrac{1}{2}M)$$

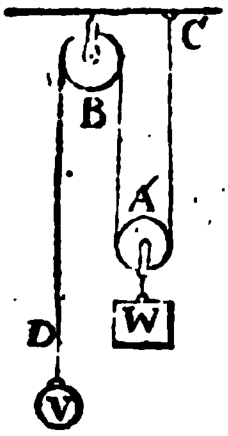
Beispiel. Bei einem Versuche mit Eichenholz sei
$V = 160$; $W = 1647$; $F' = 10$; $M = 14$ ℔; $s = 4$ Fuß
und $t = 17$ Sekunden, so ist die Frikzion

$$F = 160 - 10 - \frac{4}{15\tfrac{5}{8}\,.\,17^2}(160 + 1647 + 7) = 148{,}4$$

also das Verhältniß der Frikzion zum Druck, oder

$$\mu = \frac{F}{W} = \frac{148{,}4}{1647} = 0{,}0901.$$

75. §.



Mittelst zweier Rollen A, B und eines in C befestigten Seils, soll eine Last W durch eine Kraft V, deren Masse V′ ist, bewegt werden; es ist $V > \frac{1}{2}W$, man sucht die Beschleunigung des Gewichts V.

Das Gewicht der beweglichen Rolle A und der ganzen Zurüstung, durch welche die Last W mit ihr verbunden ist, sei N, das Gewicht der Scheibe bei $B = M$, so wird es hier dienlich seyn, bei Bestimmung der Momente der Trägheit, die Quadrate der Geschwindigkeit in Rechnung zu bringen, mit welchen die Massen bewegt werden (61. §.). Ist für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit der Masse $V' = c$, so ist ihr Moment der Trägheit $= c^2 V'$. Das Ende des Halbmessers der Rolle B hat die Geschwindigkeit c, daher ist das Moment der Trägheit dieser Rolle $= \frac{1}{2}c^2 M$. Die Massen $W + N$ erhalten die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}.c$, also ist ihr Moment der Trägheit $\frac{1}{4}c^2(W + N)$. Reducirt man nun sämmtliche Massen auf die Geschwindigkeit c des Gewichts V, so ist die gesammte reducirte Masse =

$$\frac{c^2 V' + \frac{1}{2}c^2 M + \frac{1}{4}c^2(W + N)}{c^2} = V' + \tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{4}(W + N).$$

Zur Ueberwältigung der Reibung an den Rollen und wegen der Steifigkeit der Seile, werde in D eine Kraft F

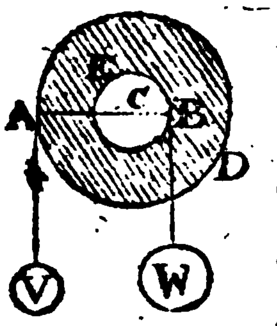
erfordert, so erhält man die bewegende Kraft oder die Ueberwucht

$$V - \tfrac{1}{2}(W + N) - F$$

daher die Beschleunigung des Gewichts V, oder

$$G = g\,\frac{V - \frac{1}{2}(W + N) - F}{V' + \frac{1}{2}M + \frac{1}{4}(W + N)}$$

76. §.



An einer Welle befinden sich zwei Räder AD, BE. Am ersten Rade, dessen Halbmesser $AC = a$ ist, wirkt eine Kraft V, deren Masse V' ist; am andern Rade, dessen Halbmesser $BC = b$, hängt die Last W, und es ist $aV > bW$, man sucht die Beschleunigung der Masse V'.

Das Moment der Trägheit von der Welle und beiden Rädern sei $= z^2 M$, so findet man, wenn sämmtliche Massen auf den Halbmesser a reducirt werden, die Summe derselben

$$\frac{a^2 V' + b^2 W + z^2 M}{a^2} = V' + \frac{b^2}{a^2} W + \frac{z^2}{a^2} M.$$

Die bewegende Kraft oder die Ueberwucht ist

$$= V - \frac{b}{a} W - F;$$

wenn F die auf den Punkt A statisch reduzirte Reibung ist; daher findet man die Beschleunigung der Masse V'

$$G = g\,\frac{V - \frac{b}{a} W - F}{V' + \frac{b^2}{a^2} W + \frac{z^2}{a^2} M}$$

$$= g\,a\,\frac{a(V - F) - bW}{a^2 V' + b^2 W + z^2 M}$$

Die Beschleunigung der Last W sei G', so verhält sich

$$G : G' = a : b$$

dies gibt $G = \frac{a}{b} G'$ daher

$$G' = g\,b\,\frac{a(V - F) - bW}{a^2 V' + b^2 W + z^2 M}$$

77. §.

Die Einrichtung des Rades an der Welle, und die Bewegung dieser ganzen Maschine ist unter übrigens gleichen Umständen vortheilhafter, je größer die Beschleunigung der zu hebenden Last W ist. Bleibt alles übrige unverändert, und man vergrößert oder verkleinert den Halbmesser a des Rades, so wird dadurch die Beschleunigung G′ der Last W verändert, und es gibt einen Werth für a, bei welchem diese Beschleunigung am größten wird, vorausgesetzt, daß durch diese Veränderung das Moment der Trägheit des Rades und der Welle nicht merklich geändert werde.

Für die größte Beschleunigung der Last, ist der **Halbmesser des Rades**

$$a = \frac{bW}{V-F} + \sqrt{\left[\frac{b^2W^2}{(V-F)^2} + \frac{b^2W + z^2M}{V'}\right]} \; *).$$

---

*) Nimmt man (76. §.) $a = x$ veränderlich und setzt

$x(V-F) - bW = Y$ und

$x^2V' + b^2W + z^2M = X$ so ist

$dY = (V-F)\,dx$ und

$dX = 2xV'\,dx.$

Nun soll $\frac{Y}{X}$ ein Maximum werden, dies gibt

$$d\left[\frac{Y}{X}\right] = \frac{XdY - YdX}{X^2} = 0 \text{ also}$$

$$XdY - YdX = 0, \text{ oder}$$

$$(x^2V' + b^2W + z^2M)(V-F) - [x(V-F) - bW]\,2xV' = 0$$

$$\text{oder } x^2 - 2x\frac{bW}{V-F} - \frac{b^2W + z^2M}{V'} = 0 \text{ daher}$$

$$x = \frac{bW}{V-F} \pm \sqrt{\left[\frac{b^2W^2}{(V-F)^2} + \frac{b^2W + z^2M}{V'}\right]}$$

wo hier das positive Zeichen vor der Wurzel genommen wird, weil nach der entgegengesetzten Lage des Halbmessers nicht gefragt wird, um daselbst die Kraft anzubringen. Noch ist zu bemerken, daß in den Fällen, wo $V' = 0$ ist, das Moment der Trägheit z^2M ebenfalls als eine veränderliche Größe behandelt werden muß, weil sonst für $V' = 0$, $x = \infty$ wird.

Beispiel. Es sei $V = V' = 10$; $F = 2$; $W = 40$; $r^2 M = 70$; $b = 1$; so findet man den vortheilhaftesten **Halbmesser** des Rades, für die größte Beschleunigung der Last W

$$a = \frac{1 \,.\, 40}{10 - 2} + \sqrt{\left[\frac{1600}{8 \,.\, 8} + \frac{40 + 70}{10}\right]} = 11.$$

Für diesen Fall ist nach 76. §. die **Beschleunigung** der **Last**

$$G' = 0{,}03636 \,.\, g.$$

Wenn $a = 10$, so ist

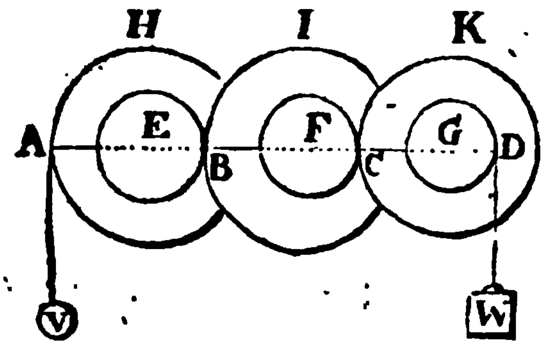
$$G' = 0{,}03603 \,.\, g$$

und für $a = 12$

$$G' = 0{,}03612 \,.\, g$$

also in beiden Fällen kleiner.

78. §.



An einem **Räderwerke** befinde sich am ersten Rade in A die Kraft V, deren Masse V' ist, und am letzten in D die Last W; man sucht die Beschleunigung der Masse V', wenn die Kraft V die Last überwiegt.

Man setze die Halbmesser der Räder

$$AE = a,\ BF = b,\ CG = c$$

die Halbmesser der Getriebe

$$EB = \alpha,\ FC = \beta,\ GD = \gamma$$

die Momente der Trägheit von der ersten Welle und dem daran befindlichen Rade und Getriebe H, E . $= n^2\ N$
vom zweiten I, F . . . . $= m^2\ M$
vom letzten K, G . . . . $= r^2\ R$
so sind wiederum sämmtliche Massen auf den Punkt A am Halbmesser a zu reduciren.

Für die ersten Räder H, E und ihre Welle hat man das Moment der Trägheit $n^2 N$, dieses auf den Punkt A gebracht gibt . . . . $\frac{n^2}{a^2}\ N$

Für die Räder I, F ist das Moment der Trägheit . . . . $= m^2\ M$
dieses auf den Punkt B reduzirt gibt $\frac{m^2}{b^2}\ M$, also das Mo-

ment der Trägheit für den Halbmesser EB $= \alpha^2 \frac{m^2}{b^2} M$,

und auf den Punkt A reduzirt . . . . $\frac{\alpha^2 m^2}{a^2 b^2} M$

Die Masse der letzten Räder K, G wird eben so auf A reduzirt, und man erhält auf eine ähnliche Art $\frac{\alpha^2 \beta^2 r^2}{a^2 b^2 c^2} R$

Dasselbe gilt von der Last W am Halbmesser γ $\frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{a^2 b^2 c^2} W$

Die Summe aller auf den Punkt A reduzirten Massen ist daher =

$$V' + \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{a^2 b^2 c^2} W + \frac{n^2}{a^2} N + \frac{\alpha^2 m^2}{a^2 b^2} M + \frac{\alpha^2 \beta^2 r^2}{a^2 b^2 c^2} R$$

Die zur Ueberwältigung der gesammten Reibung an A erforderliche Kraft sei F, so findet man die bewegende Kraft

$$= V - \frac{\alpha\beta\gamma}{a\,b\,c} W - F$$

und hieraus die Beschleunigung des Gewichts V oder

$$G = g \frac{V - \frac{\alpha\beta\gamma}{a\,b\,c} W - F}{V' + \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{a^2 b^2 c^2} W + \frac{n^2}{a^2} N + \frac{\alpha^2 m^2}{a^2 b^2} M + \frac{\alpha^2 \beta^2 r^2}{a^2 b^2 c^2} R}$$

$$= g \frac{a\,b\,c\,[a\,b\,c\,(V - F) - \alpha\beta\gamma W]}{a^2 b^2 c^2 V' + \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 W + b^2 c^2 n^2 N + c^2 \alpha^2 m^2 M + \alpha^2 \beta^2 r^2 R}$$

Wenn G′ die Beschleunigung der Last W ist, so verhält sich

$$G : G' = a\,b\,c : \alpha\beta\gamma$$

also ist

$$G' = \frac{\alpha\beta\gamma}{a\,b\,c} G \text{ daher}$$

die Beschleunigung der Last

$$G' = g \frac{\alpha\beta\gamma\,[a\,b\,c\,(V - F) - \alpha\beta\gamma W]}{a^2 b^2 c^2 V' + \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 W + b^2 c^2 n^2 N + c^2 \alpha^2 m^2 M + \alpha^2 \beta^2 r^2 R}$$

79. §.

Damit bei dem angenommenen Räderwerke die Beschleunigung der Last am größten werde, wird erfordert, daß unter übrigens gleichen Umständen der Halbmesser a

einen solchen Werth erhalte, welcher diese Bedingung erfüllt. Man setze

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 W + b^2 c^2 n^2 N + c^2 \alpha^2 m^2 M + \alpha^2 \beta^2 r^2 R = D$$

so ist für die **größte Beschleunigung der Last**, der **Halbmesser des ersten Rades**

$$a = \frac{\alpha\beta\gamma W}{bc(V-F)} + \sqrt{\left[\left(\frac{\alpha\beta\gamma W}{bc(V-F)}\right)^2 + \frac{D}{b^2 c^2 V'}\right]}.$$

Setzt man diesen Ausdruck statt a in G', so findet man die **größte Beschleunigung der Last**

$$G' = \frac{g(V-F)}{\frac{2V'W}{V-F} + 2V'\sqrt{\left[\frac{W^2}{(V-F)^2} + \frac{W}{V'} + \frac{b^2c^2n^2N}{\alpha^2\beta^2\gamma^2 V'} + \frac{c^2m^2M}{\beta^2\gamma^2 V'} + \frac{r^2R}{\gamma^2 V'}\right]}} \;{}^{*)}$$

---

*) Diese etwas weitläuftige Rechnung zu verrichten, setze man

$$a = x$$
$$\alpha\beta\gamma bc(V-F) = A$$
$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 W = B$$
$$b^2c^2V' = C \text{ und } D \text{ wie oben, so ist}$$

$$G' = g\,\frac{xA - B}{x^2C + D}$$

also auf eine ähnliche Art wie 77. §. für das Maximum von G'

$$x^2 - 2x\frac{B}{A} - \frac{D}{C} = 0 \text{ oder}$$

$$x = \frac{B}{A} \pm \sqrt{\left[\frac{B^2}{A^2} + \frac{D}{C}\right]}$$

wo der positive Werth der Wurzel gilt, weil hier nicht die entgegengesetzte Lage von x genommen wird. Hieraus erhält man ferner, wenn

$$\frac{B^2}{A^2} + \frac{D}{C} = E^2$$

gesetzt wird

$$x^2 = \frac{B^2}{A^2} + \frac{2BE}{A} + E^2 = \frac{2BE}{A} + \frac{2B^2}{A^2} + \frac{D}{C}$$

Die für x und x^2 gefundenen Werthe in die Gleichung von G' gesetzt, gibt

$$G' = \frac{gAE}{\frac{2BCE}{A} + \frac{2B^2C}{A^2} + 2D} = \frac{gA}{\frac{2BC}{A} + \frac{2C}{E}\left[\frac{B^2}{A^2} + \frac{D}{C}\right]}$$

$$= \frac{gA}{\frac{2BC}{A} + 2CE} \text{ weil } \frac{B^2}{A^2} + \frac{D}{C} = E^2 \text{ ist.}$$

Beispiel. Es sei $V = V' = 12$; $F = 4$; $W = 36$; $n^2 N = m^2 M = r^2 R = 10$; $\alpha = \beta = \gamma = 1$; $b = 3$; $c = 2$; so ist der vortheil-hafteste Halbmesser des ersten Rades für die größte Beschleunigung der Last W

$$a = \frac{36}{2.3.8} + \sqrt{\left[\left(\frac{36}{2.3.8}\right)^2 + \frac{446}{4.9.12}\right]} = 2{,}013.$$

Für diesen Halbmesser ist, wenn man nach dem zuletzt für G' gefundenen Ausdruck rechnet, die größte Beschleunigung der Last W.

$$G' = 0{,}0276 \,.\, g$$

welches man auch erhält, wenn 78. §. $a = 2{,}013$ gesetzt wird.

Wenn $a = 2$, so ist

$$G' = 0{,}0275 \,.\, g$$

und für $a = 3$

$$G' = 0{,}0249 \,.\, g$$

80. §.

Es läßt sich leicht einsehen, wie man die Werthe von G' und a bei einem noch mehr zusammengesetzten Räderwerk findet, weil das Gesetz zur Bestimmung dieser Werthe deutlich vor Augen liegt.

Auch folgt aus der Betrachtung des zuletzt gefundenen Ausdrucks für G', daß der Nenner desto kleiner wird, wenn die Anzahl der Räder, woraus die Maschine bestehet, abnimmt,

d. h. an einem Räderwerke kann die Beschleunigung der Last dadurch vermehrt werden, daß unter übrigens gleichen Umständen die Anzahl der Räder vermindert wird.

Außer dem vierten Bande von Karstens Lehrbegriff und den angeführten Kästner- und Langsdorfschen Schrif-

---

Setzt man für A, B, C, E die zugehörigen Werthe, und dividirt Zähler und Nenner durch $\alpha \beta \gamma b c$, so wird nach gehöriger Abkürzung

$$G' = \frac{g\,(V - F)}{\frac{2VW}{V-F} + 2V\sqrt{\left[\frac{W^2}{(V-F)^2} + \frac{W}{V'} + \frac{b^2 c^2 n^2 N}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 V} + \frac{c^2 m^2 M}{\beta^2 \gamma^2 V} + \frac{r^2 R}{\gamma^2 V}\right]}}$$

ten, findet man mehrere hieher gehörige Untersuchungen in

J. Pasquich, Versuch eines Beitrags zur allgemeinen Theorie von der Bewegung und vortheilhaftesten Einrichtung der Maschinen. Leipzig 1789.

Achtes Kapitel.
Vom Pendel.

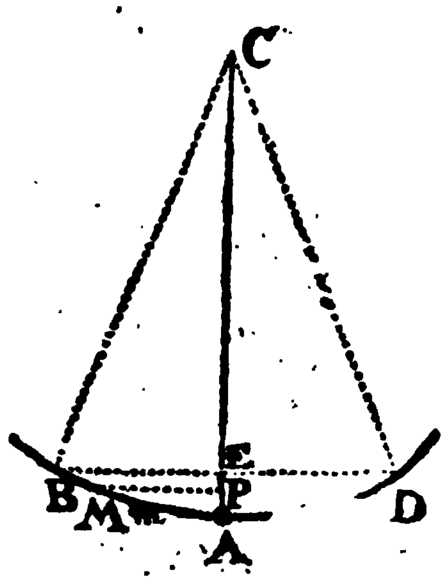
81. §.

Ein schwerer Körper werde mittelst eines Fadens oder einer Stange so aufgehangen, daß er sich hin und her schwingen kann, so heißt diese Einrichtung ein Pendel (Pendulum).

Wird der Körper als ein schwerer Punkt betrachtet, und dem Faden kein Gewicht zugeschrieben, so entstehet ein einfaches, sonst aber ein zusammengesetztes Pendel.

Erhebt man das Pendel, so daß es sich in einer vertikalen Ebene hin und her schwingt, so nennt man einen Hin- oder Rückgang einen Schwang oder Pendelschlag (Oscillatio), und die Abweichung des Fadens von der Vertikale bei der Erhebung, den Elongationswinkel.

82. §.



Das vertikal hängende Pendel CA werde bis B erhoben, so fällt es im Bogen BA vermöge seiner Schwere herunter. Durch den Fall hat es aber eine Geschwindigkeit in A erlangt, welche der Höhe EA zugehört, weshalb es, wenn seiner Bewegung keine Hindernisse entgegen stehen, wieder durch den Bogen AD = AB

in die Höhe steigen muß (57. §.). Der Elongationswinkel ACB ist alsdann = ACD, und das Pendel muß fortwährend in gleichen Zeiten einen Schwung durch den Bogen BAD oder DAB verrichten.

83. §.

Für das einfache Pendel findet man die Zeit t eines kleinen Schwunges, wenn der Elongationswinkel nicht über 15 Grad groß ist, und die Länge des Pendels = l gesetzt wird,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{l} \quad *)$$

wo $\pi = 3,14\ldots$ und g die Fallhöhe in der ersten Sekunde ist.

---

*) Der Beweis dieses Ausdrucks läßt sich, mit hinlänglicher Schärfe, nur durch die höhere Analysis geben. Man setze die Länge des Pendels CA = l, und wenn dasselbe bis B erhoben wird, die dazu gehörige Höhe AE = b. Fällt nun das Pendel durch den Bogen BM = s in der Zeit t', und es ist die zum Punkt M gehörige Höhe AP = x, so findet man die in M erlangte Geschwindigkeit c', welche das Pendel durch den Fall im Bogen BM erhalten hat (57. §.)

$$c = 2\sqrt{g.EP} = 2\sqrt{[g(b-x)]}$$

In der nächstfolgenden unendlich kleinen Zeit dt' werde der Bogen Mm = ds durchlaufen, so ist (5. §.), weil man in dieser kleinen Zeit die Bewegung als gleichförmig ansehen kann,

$$dt' = \frac{ds}{c} = \frac{ds}{2\sqrt{[g(b-x)]}}$$

Nun ist nach den Gründen der Differentialrechnung, weil PM $= \sqrt{(2lx - x^2)}$

$$ds = \frac{l\,dx}{\sqrt{(2lx - xx)}}$$

setzt man daher diesen Ausdruck in obigen statt ds, so wird

$$dt' = \frac{l\,dx}{2\sqrt{[g(b-x)]}\sqrt{(2lx-xx)}} \text{ daher}$$

$$t' = \frac{l}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)}\sqrt{(2lx-xx)}}$$

Hiernach verhalten sich bei verschiedenen Pendeln die **Schwungzeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.** Ein 4mal so langes Pendel braucht also doppelt so viel Zeit einen Schwung zu vollbringen, als das einfache.

Wenn ein Körper frei von der Höhe $\frac{1}{2}l$ fällt, so ist die Fallzeit $t' = \sqrt{\frac{l}{2g}}$ (17. §.) daher verhält sich

$$t : t' = \pi : 1$$

d. h. die Zeit eines Schwunges verhält sich zur Zeit, darin ein Körper von der halben Pendellänge frei herunter fällt, wie 3,14159.... zu 1.

Nach Karsten, Anfangsgründe der mathematischen Analysis, Greifswalde 1786, 90. §., findet man dieses Integral für den Fall, daß es für $x = o$ verschwindet, und alsdann $x = b$, also der halbe Bogen BA in der Zeit t' durchlaufen wird, wenn man den Druckfehler S. 153 Z. 5 nach S. 151 Z. 14 verbessert, und $c = 2l$ setzt:

$$t' = \frac{1}{2}\frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left[1 + (\tfrac{1}{2})^2\frac{b}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2l}\right)^3 + \ldots\right].$$

Wird nun der ganze Bogen BAD in der Zeit t durchlaufen, so ist die Zeit eines Schwunges $t = 2t'$ oder

$$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left[1 + \frac{1}{8}\frac{b}{l} + \frac{9}{256}\frac{b^2}{l^2} + \ldots\right]$$

und je kleiner b gegen l wird, desto sicherer kann man das dritte und die folgenden Glieder weglassen, daher ist

$$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}\left(1 + \frac{b}{8l}\right)$$

Setzt man den Elongationswinkel $ACB = \alpha$, so ist $\frac{b}{l} = 2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\alpha^2$ also $\frac{b}{8l} = \frac{1}{4} \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\alpha^2$. Für $\alpha = 16$ Grad ist daher $\frac{b}{8l} = \frac{1}{4}(\operatorname{Sin} 8°)^2 = 0{,}00484....$ man kann daher, wenn der Elongationswinkel nicht größer als 15 bis 16 Grad ist

$$t = \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$$

setzen. Auch sieht man, daß in diesem Falle die Zeit des Schwunges dieselbe bleibt, wenn man den Elongationswinkel auch noch kleiner nimmt.

84. §.

Ein Pendel, welches in jeder Sekunde einen Schwung verrichtet, heißt ein Sekundenpendel. Für das einfache Sekundenpendel ist daher die Zeit eines Schlags, $t = 1$ Sekunde, also

$$1 = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{l} \text{ oder}$$

$$l = \frac{2g}{\pi^2}$$

und wenn die Länge des einfachen Sekundenpendels aus Beobachtungen genau bekannt ist, so gibt dies ein Mittel ab, daraus die Fallhöhe g genau zu bestimmen, weil man leicht einsieht, daß es nicht wohl möglich ist, diese Höhe nur erträglich genau, aus unmittelbaren Beobachtungen über den freien Fall der Körper auszumitteln.

Aus der bekannten Länge des Sekundenpendels findet man die Fallhöhe eines Körpers in der ersten Sekunde

$$g = \tfrac{1}{2} \pi^2 l.$$

Die Länge des Sekundenpendels ist aber nicht auf der ganzen Erdfläche einerlei, sondern sie wird größer gegen die Pole und kleiner gegen den Aequator (m. s. Gehler phys. Wörterb. 3ter Theil, Art. Pendel); daher ist auch g nicht aller Orten gleich groß. In der neuesten Ausgabe von der Astronomie par Jérôme le Français (*la Lande*) à Paris 1792, Tom. III. p. 46, findet man eine Tafel, welche zum Theil hier abgedruckt ist.

Grad der Breite	Pendellängen in pariser Linien	Grad der Breite	Pendellängen in pariser Linien
0	439,07	52	440,65
5	439,09	53	440,68
10	439,15	54	440,71
20	439,38	55	440,75
30	439,72	56	440,79
40	440,13	57	440,82
45	440,35	58	440,85
46	440,40	59	440,88
47	440,45	60	440,92
48	440,49	65	441,07
49	440,54	70	441,26
50	440,58	80	441,38
51	440,62	90	441,45

Für Berlin ist hiernach die Länge des einfachen Sekundenpendels

= 440,665 pariser Linien

= 3,1673 rheinländische oder preußische Fuß*).

= 3 Fuß 2 Zoll beinahe,

Für Paris = 440,53 pariser Linien

= 3,1663 preußische Fuß.

Hienach erhält man für Berlin

$$2 \text{ Log } \pi = 0{,}9942997$$

$$\text{Log } \tfrac{1}{2}\, l = 0{,}1996592$$

$$1{,}1939589 = \text{Log. } g$$

wozu die Zahl 15,6299 stimmt.

Es ist daher für Berlin die Fallhöhe in der ersten Sekunde 15,63 preußische Fuß.

---

*) Den preußischen Fuß = 139,13 pariser Linien groß angenommen. Die hieher gehörigen Tafeln, zur Erleichterung dieser und ähnlicher Rechnungen, findet man in meiner

Vergleichung der in den Königl. Preußischen Staaten eingeführten Maaße und Gewichte. 2. Aufl. Berlin 1810. S. 135 u. f.

Für Paris findet man durch eine ähnliche Rechnung $g = 15{,}625$ preußische Fuß; in der Ausübung setzt man gewöhnlich auch für unsere Gegenden, $g = 15{,}625 = 15\frac{5}{8}$ preußische Fuß.

Nach einer von Littrow mitgetheilten Formel *) erhält man für die Pendellänge von Berlin 440,677 pariser Linien.

65. §.

Die zusammengesetzten Pendel erfordern eine weitere Ausführung des vorhergehenden Kapitels. Soll ein dergleichen Pendel Sekunden schlagen, und es ist das Gewicht der cylindrischen Stange $= N$, das Gewicht der Kugel $= M$, und die Länge des einfachen Sekundenpendels $= l$, so muß die Entfernung des Aufhängepunkts vom Mitelpunkte der Kugel

$$= \frac{M + \frac{1}{2}N}{M + \frac{1}{3}N}\, l \text{ seyn.}$$

vorausgesetzt, daß die Kugel nur klein ist.

Man s. Kästner's höhere Mechanik, 2ter Abschnitt 84. §., und Karsten's Lehrbegriff, 4ter Th. 179. §., wo man überhaupt die Lehren vom Pendel sehr vollständig abgehandelt findet.

Mit Hülfe des vorstehenden Ausdrucks wird man in den Stand gesetzt, einem Sekundenpendel die nöthigen Abmessungen zu geben, wobei für die hiesige Gegend, $l = 3{,}167$ preußische Fuß angenommen wird.

Die neusten Beobachtungen von Borda geben die Länge des Sekundenpendels für Paris $= 440{,}5593$ pariser Linien **).

---

*) J. J. Littrow, theoretische und praktische Astronomie. Theil. Wien 1821. 10. Kap. §. 17. S. 339.

**) Base du système métrique décimal. Par *Méchain* et *Delambre*. Tome III. à Paris 1810. p. 401.

Zweite Abtheilung.

Die Hydraulik.

Einleitung.

86. §.

Die Mechanik flüssiger Körper (Mechanica corporum fluidorum) lehrt die Bewegung und die aus derselben entspringenden Wirkungen flüssiger Massen kennen. Eine besondere Abtheilung ist die Hydraulik (Hydraulica) oder Hydrodynamik (Hydrodynamica), in welcher die Gesetze der Bewegung des Wassers, und die aus der Bewegung desselben entstehenden Wirkungen untersucht werden.

Anmerk. Man unterscheidet sonst die Hydraulik von der Hydrodynamik dadurch, daß erstere von der Bewegung des Wassers allein, letztere aber von den Kräften desselben handelt, ob gleich diese Abgrenzung selten beobachtet wird.

87. §.

Die flüssigen Massen unterscheiden sich vorzüglich von den festen, durch die vollkommene Bewegbarkeit ihrer einzelnen Theile, welche bei der geringsten Kraftäußerung aneinander verschoben werden können.

Denkt man sich nur das Wasser als einen schweren, unpreßbaren und vollkommen flüssigen Körper, dessen kleinste Theile überdies weder unter sich, noch

mit andern Körpern, mit einiger Kraft zusammenhängen, und untersucht dessen Eigenschaften, so entstehet eine Hydraulik, unabhängig von aller Erfahrung; weil aber das Wasser sowohl unter sich (Cohäsion, Cohaesio, *Cohésion*) als auch mit andern Körpern (Adhäsion, Adhaesio, *Viscosité*) so zusammenhängt, daß eine gewisse Kraft zur Ueberwältigung dieses Zusammenhanges erfordert wird, auch bei der Bewegung so mancherlei Umstände eintreten, die bei einer vollkommenen flüssigen Masse nicht in Betrachtung kommen, so erfordert dies, wenn die Hydraulik mit Nutzen auf Gegenstände des bürgerlichen Lebens angewandt werden soll, daß ihre Lehren in genauer Verbindung mit der Erfahrung stehen.

Wenn nun gleich genaue Versuche aller Art, das nothwendigste Erforderniß für die Hydraulik sind, so ist es doch sehr zu bedauern, daß es gerade hieran noch am meisten fehlt, und daß manche Versuche, aus welchen Regeln abgeleitet werden, nicht immer zureichen, um davon mit Sicherheit in der Ausübung Gebrauch zu machen. Es haben zwar mehrere der ersten Gelehrten, mit vielem Aufwande von Scharfsinn, die Hydraulik erweitert, allein es fehlt ihr doch noch sehr vieles, um das zu seyn, was andere ihr verschwisterte mathematische Wissenschaften sind.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers bei dem Ausflusse aus Behältern, und von der Zusammenziehung des Wasserstrahls.

88. §.

Befindet sich in dem horizontalen Boden eines Gefäßes eine Oeffnung (Apertura, *Orifice*, *Ouverture*), so heißt solche eine **horizontale** (Ap. horizontalis), sonst aber eine **Seitenöfnung** (Ap. lateralis).

Die lothrechte Höhe des Wasserspiegels über einer horizontalen Oefnung heißt die **Druckhöhe** (Altitudo pressionis, *Charge d'eau*), und wenn in der Folge dabei nichts weiter erinnert wird, so ist immer stillschweigend vorausgesetzt, daß dieselbe **unverändert** bleibe, und durch anderes Wasser das ausfließende ersetzt werde.

Zur Bestimmung der **Wassermenge** (Quantitas aquae, *Quantité d'eau, Dépense*), welche aus einer Oefnung läuft, nimmt man eine gewisse Zeit als Einheit an, gewöhnlich eine Sekunde; und weil unter der Geschwindigkeit eines Körpers derjenige Weg verstanden wird, welchen er in einer Sekunde gleichförmig durchläuft, so ist die **Geschwindigkeit** des Wassers, mit der Länge desjenigen Strahls, welcher in einer Sekunde ausfließt, einerlei. Wenn daher die durchaus gleiche Geschwindigkeit $= c$, mit welcher das Wasser aus einer Oefnung läuft, bekannt ist, so findet man daraus die Wassermenge $= M$, wenn die Größe der Oefnung $= a$ mit der Geschwindigkeit c multiplirirt wird, oder c M a

$$M = ac$$

t Für irgend eine Zeit t, welche in Sekunden gegeben ist,
erhält man hiernach die Wassermenge

$$tM = tac$$

P Sucht man das Gewicht $= P$ der Wassermenge M, so
muß dieselbe mit dem Gewicht von einem Kubikfuß Was-
γ ser, welches durch γ bezeichnet wird, multiplizirt werden,
also

$$P = \gamma M$$

89. §.

Bei horizontalen Oefnungen, verhalten sich die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers, wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Man setze, daß bei zwei verschiedenen Gefäßen

h, H die Druckhöhen,

a, A die Flächeninhalte der Ausflußöfnungen, und

c, C die Geschwindigkeiten bezeichnen, mit welchen das Wasser im Beharrungsstande durch die Oefnungen ausläuft,

so entstehet offenbar bei derjenigen Oefnung ein größerer Druck auf jedes ausfließende Wassertheilchen, über welchem sich eine größere Wasserhöhe befindet, weshalb auch eine größere Geschwindigkeit bei dem Ausflusse erzeugt werden muß. Wenn die Wassertheilchen die Oefnung verlassen, so hört zwar dieser Druck nach und nach auf; aber im Augenblicke des Ausflusses, in irgend einer, wenn auch noch so kleinen Zeit t, muß der Druck, welcher von der Wasserhöhe herrührt, auf die ausfließenden Wassertheile wirken, und es lassen sich daher, wenn das im Gefäße befindliche Wasser als stillstehend angenommen wird, die Gewichte der Wassersäulen $ah\gamma$, $AH\gamma$ als bewegende Kräfte ansehen, welche die in gleichen Zeiten ausfließende Wassermassen gleichförmig beschleunigen. Haben daher beide Massen in der Zeit t ihre Geschwindigkeiten c, C, mit welchen sie ausfließen, erhalten, so ist das Gewicht der in dieser Zeit aus-

fließenden Wassermengen $t a c \gamma$, $t A C \gamma$, und daher das Verhältniß ihrer beschleunigenden Kräfte (32. §.)

$$\frac{a h \gamma}{t a c \gamma} : \frac{A H \gamma}{t A C \gamma} = \frac{h}{c} : \frac{H}{C}$$

Nun verhalten sich aber die beschleunigenden Kräfte zweier Massen, wie die in gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten (35. §.), daher

$$\frac{h}{c} : \frac{H}{C} = c : C \text{ oder}$$

$$h : H = c^2 : C^2 \text{ oder auch}$$

$$\sqrt{h} : \sqrt{H} = c : C.$$

1. Anmerk. Dieser Satz wird gewöhnlich aus Beobachtungen abgeleitet, die sehr wohl damit übereinstimmen. Vorstehende Auseinandersetzung ist ein Versuch denselben a priori darzuthun.

2. Anmerk. Zur Vergleichung mit den Erfahrungen, können die Versuche von Bossüt *) (2ter Bd. S. 47) dienen. Hienach ist für eine kreisförmige Oefnung von 1 Zoll Durchmesser, bei einer

Druckhöhe	1	Fuß,	die	Wassermenge	2722	par.	K.	Zoll.
ꞏ	ꞏ	2	ꞏ	ꞏ	3846	ꞏ	ꞏ	ꞏ
ꞏ	ꞏ	4	ꞏ	ꞏ	5436	ꞏ	ꞏ	ꞏ
ꞏ	ꞏ	8	ꞏ	ꞏ	7672	ꞏ	ꞏ	ꞏ
ꞏ	ꞏ	9	ꞏ	ꞏ	8135	ꞏ	ꞏ	ꞏ

Weil sich nun die Wassermengen, wie die Geschwindigkeiten, und diese wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten, so müßte seyn:

$$\sqrt{1} : \sqrt{4} = 2722 : 5436$$
$$\sqrt{1} : \sqrt{9} = 2722 : 8135$$
$$\sqrt{2} : \sqrt{8} = 3846 : 7672$$
$$\sqrt{4} : \sqrt{9} = 5436 : 8135$$

welches auch mit einer geringen Abweichung, so weit es die Genauigkeit bei dergleichen Versuchen zuläßt, eine gute Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung zeigt.

---

*) Herrn Abt Bossüt, Lehrbegriff der Hydrodynamik, nach Theorie und Erfahrung, vorzüglich für solche, welche zur Ausführung dieser Wissenschaft bestimmt sind. Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen herausgeg. von K. C. Langsdorf. I. Band, welcher die Theorie der Hydrodynamik enthält. II. Band, welcher die Experimentalhydraulik enthält. Mit Kupfern. Frankf. a. M. 1792.

Aehnliche Resultate geben die von F. D. Michelotti *) angestellten Versuche, welche mit weit größern Druckhöhen und Ausflußöfnungen angestellt worden sind.

Benedict Castelli lehrte ums Jahr 1640, daß sich die Geschwindigkeit des Wassers wie seine Druckhöhe verhalte; ihm wurde von Evangelista Torricelli widersprochen, welcher in seiner 1644 gedruckten Schrift del moto dei gravi behauptete, die Geschwindigkeiten des Wassers verhielten sich wie die Quadratwurzeln seiner Druckhöhen. Die Beschreibung der Torricellischen Versuche, welche sehr gut mit dieser Behauptung übereinstimmen, findet man in des Herrn Hofr. Kästner's Hydrodynamik **).

90. §.

Weil die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers von der Druckhöhe abhängt, so sieht man ein, daß bei Seitenöfnungen, wo jeder horizontale Streifen eine andere Wasserhöhe hat, die Geschwindigkeiten in der Oefnung verschieden seyn müssen. Denkt man sich nun unter allen Geschwindigkeiten eine solche, bei der eben so viel Wasser ausflösse wie bei den verschiedenen, so heißt diese die mittlere Geschwindigkeit (Celeritas media, *Vitesse moyenne*), und diejenige Wasserhöhe, welche dieser mittleren Geschwindigkeit zugehört, ihre Geschwindigkeitshöhe (Altitudo celeritati debita, *Hauteur due à la vitesse*), welche man auch die Druckhöhe der Seitenöfnung nennen kann.

Wenn die lothrechte Höhe einer Seitenöfnung in Bezug auf die lothrechte Entfernung des Wasserspiegels von dieser Oefnung nur klein ist, so können auch die Geschwindigkeiten in der Oefnung nicht sehr von einander abweichen, und man nimmt in solchen Fällen, die Entfernung

*) Sperimenti idraulici, di Francesco Domenico *Michelotti*. In Torino 1767. Die deutsche Uebersetzung des Hrn. Prof. Zimmermann führt den Titel: F. D. Michelottis hydraulische Versuche. Berlin 1808.

**) A. G. Kästner, Anfangsgründe der Hydrodynamik, welche von der Bewegung des Wassers besonders die praktischen Lehren enthalten. Zweite vermehrte Auflage. M. K. Göttingen 1797. §. 96. S. 67 u. f.

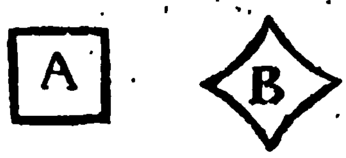
des Schwerpunkts der Oefnung vom Wasserspiegel als Geschwindigkeitshöhe an.

91. §.

Beim freien Falle der Körper hängt ihre erlangte Geschwindigkeit von der Höhe ab, von welcher sie gefallen sind (12. §.); weil nun ebenfalls bei der Bewegung des Wassers durch eine Oefnung, die Geschwindigkeiten desselben sich wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten, so sieht man, daß zwischen dem freien Falle der Körper und der Bewegung des Wassers durch Oefnungen, eine gewisse Uebereinstimmung in Absicht der zugehörigen Höhen und erlangten Geschwindigkeiten Statt finde. Für eine ganz freie und ungehinderte Bewegung des Wassers ist man berechtiget, eben die Gesetze wie beim freien Falle fester Körper anzunehmen; wenn aber Wasser durch eine Oefnung ausläuft, so sind nach den verschiedenen Gestalten, welche eine Oefnung haben kann, die Geschwindigkeiten in derselben verschieden, weil sich nicht nur die Wassertheile von den Wänden der Oefnung losreißen müssen, sondern auch dadurch, daß sich das Wasser von allen Seiten nach der Oefnung bewegt, eine Ablenkung der Wassertheile von ihrer Bahn entstehet, welche eine Contraction oder Zusammenziehung (Contractio) des Strahls bewirkt.

Wenn ein Strahl durch eine Oefnung in einer dünnen Wand (Apertura laminae inserta, *Orifice en mince paroi*) ausfließt, so ist der Punkt der größten Zusammenziehung des Strahls von der Oefnung weiter entfernt, wenn die Druckhöhe größer wird; so wie auch mit Vergrößerung der Oefnung bei einerlei Druckhöhe und hinlänglich großem Querschnitt des zuströmenden Wassers, der Abstand der größten Zusammenziehung größer wird, wie man sich leicht durch Versuche überzeugen kann.

Aus diesem letzten Umstande kann man erklären, warum bei einer vertikalen Oefnung, deren größte Länge wagerecht liegt, der Durchschnitt des zusammengezogenen Strahls, in einiger Entfernung von der Oefnung, eine vertikale läng-



liche Figur bildet, und weshalb aus einer quadratförmigen Oefnung A, der Querschnitt des auslaufenden Strahls die Gestalt B annimmt.

In der §. 89. angeführten Uebersetzung der hydraulischen Versuche von Michelotti, findet man Seite 19 von mir die Beschreibung der merkwürdigen Gestalten, welche die ausfließende Wasserstrahlen annehmen. Auch kann man hiemit die Anmerkung §. 104. vergleichen.

92. §.

Ein von mir vielfältig wiederholter Versuch, unter einer Druckhöhe von 3 Fuß rheinländisch, gab bei einer scharf abgedrehten vertikalen 15 Linien weiten Oefnung in einer dünnen messingenen Platte, den vertikalen Durchmesser des zusammengezogenen Wasserstrahls im Punkt der größten Zusammenziehung, sehr wenig kleiner als 12 Linien; dagegen fand ich den horizontalen Durchmesser sehr wenig größer als 12 Linien, so daß man bei 8 Linien Abstand von der beschriebenen Oefnung den mittlern Durchmesser des zusammengezogenen Strahls, 12 Linien groß annehmen kann.

Bossüt (angef. Hydrod. 2ter Bd. 447. §.) und Venturi *) führen Versuche an, welche sich auf die Zusammenziehung des Strahls bei Oefnungen in einer dünnen Wand oder Metallplatte beziehen. Vergleicht man die verschiedenen Beobachtungen mit einander, so geben die Bossütschen Versuche den Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahls (Sectio venae aquae con-

*) Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides. Appliqué à l'explication de différens Phénomènes hydrauliques. Par le Citoyen J. B. *Venturi.* à Paris. An VI. (1797). p. 75 etc.

Von dieser lehrreichen Schrift findet man eine deutsche Uebersetzung in den Annalen der Physik von L. W. Gilbert, im 2ten und 3ten Bande, Halle 1799.

tractae, *Section de la veine contractée*) 0,660 bis 0,666, oder etwa $\frac{2}{3}$ von dem Inhalte der Ausflußöfnung. Die Venturische Ausmessung des zusammengezogenen Strahls gibt 0,631, und die meinige 0,64 = $\frac{16}{25}$, welches auch mit andern Resultaten des Herrn Venturi übereinstimmt, bei welchen aus der Weite die ein Strahl erreicht, wenn er durch eine vertikale Oefnung ausfließt, die Geschwindigkeit im Querschnitt der größten Zusammenziehung, und hieraus dessen Inhalt selbst gefunden worden ist.

Hienach verhält sich der Durchmesser einer kreisförmigen Oefnung in einer dünnen Wand, zum Durchmesser des zusammengezogenen Strahls = 5 : 4.

Anmerk. Die folgenden Versuche sind von Herrn Bossût, der letzte von Herrn Venturi; alles in pariser Maß ausgedrückt.

No.	Druckhöhe			Durchmesser der Oefnung. Linien	Durchmesser des zusammengezog. Strahls. Linien	Abstand von der Oefnung. Linien
1	11′	8″	10‴	12	$9\frac{4}{5}$	7
2	11′	8″	10‴	12	$9\frac{4}{5}$	$6\frac{1}{4}$
3	11′	8″	10‴	24	$19\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$
4	11′	8″	10‴	36	$29\frac{1}{4}$	18
5	9′	—	—	6	$4\frac{4}{5}$	$4\frac{1}{2}$
6	9′	—	—	12	$9\frac{4}{5}$	$6\frac{1}{2}$
7	2′	8″	6″	18	14,3	11

Sämmtliche Oefnungen waren kreisförmig, nur der erste Versuch bezieht sich auf eine quadratförmige.

93. §.

Die verschiedenen Arten der Zusammenziehung bewirken eine größere oder kleinere mittlere Geschwindigkeit in der Ausflußöfnung, und in dem Verhältnisse eine vermehrte oder verminderte Wassermenge. Nur durch Versuche ist es möglich, für die verschiedenen Arten des Aus-

flusses anzugeben, welchen Veränderungen die Wassermengen und mittleren Geschwindigkeiten unterworfen sind.

Um diese verschiedenen Wassermengen leichter miteinander zu vergleichen, und den Verlust wegen der Zusammenziehung und anderer Hindernisse bei dem Ausflusse besser zu übersehen, kann man die Hypothese annehmen, daß das Wasser, wenn es vollkommen flüssig wäre und nicht zusammengezogen würde, in der Ausflußöfnung eine Geschwindigkeit erlangte, die derjenigen gleich wäre, die ein von der Druckhöhe frei fallender Körper erhielte. Die so berechnete Wassermenge kann die **hypothetische** heißen.

Für diesen Fall ist die Geschwindigkeit des Wassers in der Ausflußöfnung oder $c = 2\sqrt{g}\sqrt{h}$ und man findet hiernach die hypothetische Wassermenge, wenn solche durch M' bezeichnet wird (§. 88.)

$$M' = 2a\sqrt{g}\sqrt{h}.$$

Wird nun ferner die unter derselben Druckhöhe h und durch die Oefnung a in derselben Zeit wirklich ausgelaufene Wassermenge durch M bezeichnet, so ist $M' : M = 1 : \frac{M}{M'}$ das Verhältniß der hypothetischen zur wirklichen Wassermenge und man findet die Verhältnißzahl

$$\frac{M}{M'} = \frac{M}{2a\sqrt{g}\sqrt{h}}$$

so daß, wenn in einem besondern Falle die Ausflußöfnung und Druckhöhe nebst der wirklich ausgeflossenen Wassermenge bekannt sind, daraus das Verhältniß $\frac{M}{M'}$ gefunden werden kann.

In den folgenden beiden Tafeln sind die Versuche von **Bossut** (angef. Hydrod. 2. Bd. 2. Kap.) und von **Joseph Therese Michelotti** [Mémoires de l'Academie des sciences. An. 1784—85. II. Parties. à Turin 1786. p. 53 etc.] *) mit **Oefnungen in einer dünnen Wand**,

*) Eine Uebersetzung dieser Versuche ist als Anhang in der §. 89. angeführten Uebersetzung von F. D. **Michelotti's** hydraulischen Versuchen, S. 229 u. f. enthalten.

welche sich in hinlänglich weiten prismatischen Gefäßen befanden, zusammen gestellt und es ist in der letzten Vertikalspalte dieser Tafeln, nach vorstehender Formel, der Werth von $\frac{M}{M'}$ berechnet worden, wodurch zugleich angezeigt wird, der wievielte Theil die durch Versuche erhaltene Wassermenge von der hypothetischen ist. Da den Versuchen gemäß das Verhältniß der Wassermenge dasselbe bleibt, die Ausflußöfnung mag, bei einerlei Druckhöhe, horizontal oder vertikal stehen, so ist hierauf nicht weiter Rücksicht genommen worden, auch hat man, weil sich sämmtliche Abmessungen in den Tafeln auf pariser Zollmaß beziehen, g = 181,176 pariser Zoll groß angenommen. Noch ist zu bemerken, daß man nur diejenigen Versuche von Michelotti aufgenommen hat, bei welchen sich kein Vorsprung in der Nähe der Ausflußöfnung befand.

Versuche mit rechtwinklichen Ausflußöfnungen.

Beobachter		Der Ausflußöfnung			Druckhöhe	Beobachtete Wassermenge in jeder Sekunde	Verhältniß der hypothetischen Wassermenge zur wirklichen
		Länge	Breite	Inhalt			
	N.	Zoll	Zoll	□ Zoll	Zoll	Kubikzoll	
B	1	1,000	0,250	0,2500	140,833	48,883	0,61138
M	2	1,000	1,000	1,0000	140,853	149,520	0,60792
[illegible]	3	1,000	1,000	1,0000	83,250	196,950	0,61627
[illegible]	4	1,000	1,000	1,0000	140,643	193,857	0,60722
M	5	1,000	1,000	1,0000	252,250	259,590	0,60715
M	6	2,000	2,000	4,0000	82,754	590,608	0,60293
[illegible]	7	2,000	2,000	4,0000	82,905	591,245	0,60293
B	8	2,000	2,000	4,0000	140,833	789,350	0,61770
M	9	2,000	2,000	4,0000	140,985	770,044	0,60226
M	10	2,000	2,000	4,0000	141,350	771,059	0,60227
M	11	2,000	2,000	4,0000	250,025	1025,460	0,60226
[illegible]	12	2,000	2,000	4,0000	250,950	1027,350	0,60226
M	13	3,017	3,017	9,1007	82,250	1368,950	0,61625
M	14	3,017	3,017	9,1007	83,333	1377,680	0,61601
M	15	3,002	3,002	9,0104	140,832	1781,800	0,61899
M	16	3,002	3,002	9,0104	141,466	1785,810	0,61913
M	17	3,004	3,004	9,0220	249,796	2365,038	0,61862
M	18	3,004	3,004	9,0220	251,770	2394,550	0,61616

Versuche mit kreisförmigen Ausflußöfnungen.

Beobachter	N.	Durchmesser der Oefnung	Inhalt der Oefnung	Druckhöhe	Beobachtete Wassermenge in jeder Sekunde	Verhältniß der hypothetischen Wassermenge zur wirklichen
		Zoll	□ Zoll	Zoll	Kubikzoll	
B	19	0,500	0,1963	48,000	22,550	0,62451
B	20	0,500	0,1963	108,000	53,635	0,62097
B	21	0,500	0,1963	140,833	38,517	0,62275
B	22	1,000	0,7854	48,000	90,600	0,61850
M	23	1,000	0,7854	81,250	117,546	0,61677
M	24	1,000	0,7854	82,420	118,767	0,61874
B	25	1,000	0,7854	108,000	135,583	0,61705
B	26	1,000	0,7854	140,833	154,683	0,61648
M	27	2,002	3,1485	81,151	463,613	0,60719
M	28	2,002	3,1485	82,887	469,250	0,60810
B	29	2,000	3,1416	140,833	620,050	0,61779
M	30	3,001	7,0732	82,732	1060,796	0,61249
M	31	3,001	7,0732	140,875	1384,078	0,61153
M	32	3,001	7,0732	249,855	1795,927	0,59669
M	33	6,000	28,2743	77,500	4152,000	0,61963
M	34	6,000	28,2743	78,005	4165,000	0,61956
M	46	6,000	28,2743	135,000	5471,744	0,61842
M	36	6,000	28,2743	135,250	5476,565	0,61868

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß das Verhältniß der Wassermenge, also auch der Geschwindigkeiten der Oefnungen, sehr nahe dasselbe bleibt. Der größere Umfang der Oefnung, bei übrigens gleichen Umständen und bei weiten Behältern, gibt zwar eine etwas kleinere Geschwindigkeit, so wie kleinere Druckhöhen, wegen der geringern Zusammenziehung in Vergleichung mit der hypothetischen Wassermenge, einen größern Ausfluß geben, als bei vergrößerter Druckhöhe. Diese Abweichungen sind aber so geringe, daß man in der Ausübung annehmen kann, die wirkliche Ausflußmenge sei ein bestimmter Theil der hypothetischen, wofür man als eine Mittelzahl 0,619 annehmen kann.

Nun ist die hypothetische Geschwindigkeit des Wassers bei der Druckhöhe h

$$= 2\sqrt{g}\,\sqrt{h} = 7{,}9057\,\sqrt{h}$$

daher die wirkliche mittlere Geschwindigkeit c, wenn Wasser durch eine Oefnung in einer dünnen Wand abfließt, oder

$$c = 0{,}619 \cdot 7{,}9 \cdot \sqrt{h} = 4{,}8936 \cdot \sqrt{h}$$

Hienach kann man annehmen, daß die wirkliche Wassermenge 0,619, oder sehr nahe $\frac{5}{8}$ der hypothetischen beträgt.

94. §.

Läuft das Wasser nicht durch eine Oefnung in der dünnen Wand eines Behälters, sondern durch eine cylindrische oder prismatische Ansatzröhre, oder durch eine Oefnung in einer dicken Wand, so bemerkt man zwar an dem ausfließenden Strahl keine äußere Zusammenziehung, weil er mit einer Dicke ausfließt, die der Weite der Röhre gleich ist. Wegen der schiefen Richtung in welcher die Wassertheilchen gegen die Einflußöfnung der Röhre strömen, ist man aber berechtigt, eine innere Zusammenziehung anzunehmen, ohne welche offenbar mehr Wasser ausfließen würde.

Sollen die Versuche über die Verminderung des ausfließenden Wassers durch die Zusammenziehung, bei dem Eintritt in eine cylindrische Röhre entscheidend seyn, so dürfen diese Röhren nur kurz genommen werden, damit durch die Länge der Röhrenwände keine Verzögerung oder Verminderung der Geschwindigkeit des Wassers entstehet. Sind die Röhren zu kurz, so daß ihre Länge dem Durchmesser der Oefnung gleich ist, so folgt das Wasser nicht den Wänden der Röhre, sondern der Strahl reißt sich von denselben los, und der Ausfluß erfolgt eben so, wie bei Oefnungen in einer dünnen Wand. Dies geschiehet noch, wenn die Röhre doppelt so lang als der Durchmesser ist, wenn man nicht durch besondere Mittel das Wasser den Wänden zu folgen nöthiget.

Bei den angeführten Versuchen in der nachstehenden Tafel, folgte das Wasser den Wänden der Röhren. Diejenigen Röhren, deren sich Bossut und Venturi bedienten, waren cylindrisch, wogegen die bei den Versuchen von J. T. Michelotti einen quadratförmigen Querschnitt von

drei Zoll Seitenlänge bildeten. Die Vergleichung der wirklichen mit der hypothetischen Wassermenge ist eben so wie im vorigen §. angestellt, auch beziehen sich sämmtliche Abmessungen auf pariser Zollmaß.

Versuche mit prismatischen Ansatzröhren.

Beobachter	N.	Durchmesser der Röhre	Länge der Röhre	Inhalt vom Querschnitte der Röhre	Druckhöhe.	Beobachtete Wassermenge in jeder Sekunde	Verhältniß der hypothetischen Wassermenge zur wirklichen
		Zoll	Zoll	□ Zoll	Zoll	Kubikzoll	
B	1	0,500	2,00	0,1963	24,000	20,367	0,78672
B	2	0,500	2,00	0,1963	46,000	28,150	0,78541
B	3	0,833	2,00	0,5454	24,000	56,700	0,78828
B	4	0,833	2,00	0,5454	46,000	78,385	0,78713
B	5	1,000	1,50	0,7854	104,833	202,800	0,80825
B	6	1,000	2,00	0,7854	104,833	203,133	0,80957
B	7	1,000	4,00	0,7854	104,833	204,567	0,81530
V	8	1,500	4,75	1,7671	27,500	203,303	0,81495
V	9	1,500	4,50	1,7671	32,500	222,967	0,82218
V	10	1,500	5,00	1,7671	32,500	222,967	0,82218
M	11	3,000	8,00	8,9993	80,333	1768,979	0,81467
M	12	3,000	8,00	8,9993	140,250	2301,942	0,80232
M	13	3,000	8,00	8,9993	247,750	3059,303	0,80233

Nimmt man als einen mittlern Werth aus diesen Versuchen an, daß die wirkliche Wassermenge $0{,}8125 = \frac{13}{16}$ von der hypothetischen beträgt, so ist die mittlere Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in die Röhre

$$c = \frac{13}{16} \cdot 7{,}9 \sqrt{h} = 6{,}42 \sqrt{h}$$

Hieraus geht hervor, daß unter gleichen Umständen kurze Ansatzröhren beinahe $\frac{3}{10}$ mehr Wasser geben, als Oeffnungen in einer dünnen Wand.

Anmerk. Liegt die Einmündung der Röhre nicht in den innern Wänden des Gefäßes, sondern tritt noch um einen Theil in den Behälter, so daß sie von allen Seiten mit Wasser umgeben ist, so fand Borda (Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des Vases. Mém. de l'ac. de Paris année 1766. Paris 1767. p. 579), daß bei einer 6 Zoll lan-

gen und $14\frac{1}{10}$ Linien weiten Röhre von dünnem Blech, wenn solche ganz mit Wasser umgeben war, und der Strahl den Wänden der Röhre nicht folgte, daß für die Einflußöfnung

$$c = 4{,}07\sqrt{h} \text{ ist.}$$

Wenn hingegen das Wasser den Wänden der Röhre folgt, und die Röhrenwände eine Linie dick sind, so folgt aus meinen Versuchen (97. §. IX. Erf.), daß der Ausfluß eben derselbe bleibt, die Röhre mag sich innerhalb oder außerhalb des Gefäßes befinden.

95. §.

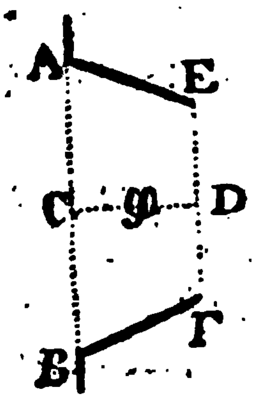
Durch konische Röhren, welche sich gegen die Ausmündung verengen, kann die Wassermenge in Vergleichung mit andern Oefnungen noch ansehnlich vermehrt werden, wie nachstehende Versuche vom Marchese J. Poleni (de castellis. Flor. 1718) beweisen.

	Länge der konischen Röhre.	Durchmesser der Einmündung.	Durchmesser der Ausmündung.	Druckhöhe.			Beobachtete Wassermenge in einer Minute.	Hypothetische Wassermenge in einer Minute.	Verhältniß der hypothetischen Wassermenge zur wirklichen.
N.	Linien.	Lin.	Lin.	F.	Z.	L.	Kubikz.	Kubikz.	
1	92	118	26	1	9	4	23687	27527	0,8605
2	92	60	26	1	9	4	24345	27527	0,8844
3	92	42	26	1	9	4	24619	27527	0,8939
4	92	33	26	1	9	4	24758	27527	0,8992

Bei der konischen Form im letzten Versuche ist der Verlust des Wassers nur etwa $\frac{1}{10}$ von der hypothetischen Wassermenge.

Gibt man der konischen Ansatzröhre die Gestalt des zusammengezogenen Strahls, wie bei Oefnungen in einer dünnen Wand (92. §.), so daß der Durchmesser der Ausmündung $\frac{4}{5}$ vom Durchmesser der Einmündung, und die Länge der Röhre etwas größer als der Halbmesser der Einmündung ist, so muß das Wasser eben so ausfließen, wie durch den Querschnitt des zusammengezogenen Strahls, vom

G



ausgesetzt, daß die scharfen Ecken der konischen Röhre etwas abgerundet sind. Eine solche Röhre kann **Mündung nach Gestalt des zusammengezogenen Strahls** (Ostium instar aquae venae contractae, *Embouchure qui suit la forme de la veine contractée*), zur Abkürzung in der Folge, Mündung φ heißen.

Durch den kleinsten Querschnitt des zusammengezogenen Strahls fließt eben so viel Wasser, als durch die dazu gehörige Oefnung in einer dünnen Wand, daher muß die Geschwindigkeit in dem Querschnitte in demselben Verhältniß zunehmen, wie sein Flächeninhalt abnimmt; nun ist (92. §.) der Querschnitt des zusammengezogenen Strahls $\frac{16}{25}$ vom Querschnitte der Oefnung, daher die Geschwindigkeit im Querschnitte der größten Zusammenziehung, oder

$$c = \frac{25}{16} \cdot 0{,}619 \,.\, 2\sqrt{g}\sqrt{h} = 0{,}9672 \,.\, 2\sqrt{g}\sqrt{h}$$

Hat die Röhre φ die erforderliche Gestalt, so ist die Geschwindigkeit des Wassers in der Ausflußöfnung EF, oder

$$c = 0{,}9672 \,.\, 2\sqrt{g}\sqrt{h} = 7{,}646\sqrt{h}$$

Für den freien Fall eines Körpers wäre die Geschwindigkeit

$$= 2\sqrt{g}\sqrt{h};$$

hienach verhält sich die wirkliche Wassermenge, welche durch die Mündung φ bei EF ausläuft, zur hypothetischen Wassermenge für die Oefnung EF wie

$$0{,}9672 : 1 \text{ oder nahe } = 30 : 31$$

und es ist wahrscheinlich, daß beide Wassermengen gleich wären, wenn die Wassertheile nicht wegen der Adhäsion an den Wänden der Röhre verzögert würden, und wenn man φ ganz genau die Gestalt des zusammengezogenen Strahls geben könnte.

Die Ansatzröhre φ ist daher unter allen Ausflußöfnungen von einer bestimmten Größe die vortheilhafteste, weil das ausfließende Wasser beim Ausgange eine solche Geschwindigkeit in der Oefnung EF erlangt, welche nur wenig von derjenigen verschieden ist, die ein Körper durch den freien Fall von der Druckhöhe erreichen würde.

Mit einer solchen Mündung hat Venturi einen Versuch (am angef. O. Exp. 4. p. 12) angestellt. Die Axe der Röhre war horizontal, bei einer Druckhöhe von $32\frac{1}{2}$ pariser Zoll. Der Durchmesser am Gefäß hielt 18, und bei der Ausmündung $14\frac{1}{2}$ Linien. Die ganze Länge der Röhre = 11 Linien, und man fand die Wassermenge für eine Sekunde = 164,6 Kubikzoll. Die hypothetische Wassermenge ist hier 176 Kubikzoll, daher die wirkliche 0,935 von der hypothetischen. Dieses nähert sich der vorhin gefundenen Grenze 0,967 schon ansehnlich, und man würde sie erreicht haben, wenn die konische Röhre nicht scharfe Ecken gehabt hätte.

Aus meinen mit einer dergleichen Mündung angestellten Versuchen (98. §. 1. T. N. 2.), wenn die Einmündung 15, die Ausmündung 12, und die Länge der Röhre 8 Linien groß war, findet sich die wirkliche Wassermenge 0,9186 von der hypothetischen. Hiebei hatte die Mündung φ ihre scharfen Ecken behalten. Nachdem aber diese innerhalb sanft abgerundet waren (98. §. 1. T. N. 3), vermehrte sich die Wassermenge bis 0,9798 von der hypothetischen, so daß sich nur ein geringer Unterschied zwischen beiden befand, und eine größere Ausflußmenge als durch die Venturischen Versuche bewirkt ward.

Der Wasserverlust bei einerlei Ausmündung und gleicher Druckhöhe ist hienach

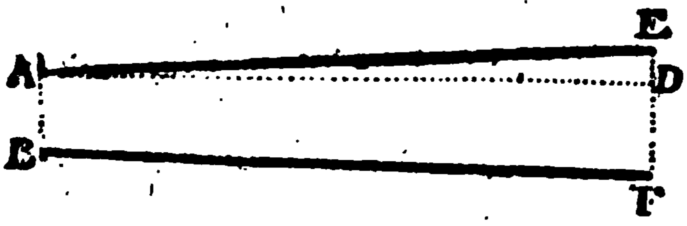
bei der Mündung φ mit abgerundet. Ecken	0,0202
bei der Mündung φ mit scharfen Ecken	0,0813
bei einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre	0,1875
bei einer Oefnung in einer dünnen Wand	0,3810

von der hypothetischen Wassermenge.

96. §.

Es gibt noch ein Mittel, wodurch die Wassermenge, welche man durch eine bestimmte Oefnung erhält, bei unveränderter Druckhöhe vermehrt werden kann. Statt der vorhin beschriebenen konischen Mündungsstücke, welche sich gegen die Ausflußöfnung verengen und hier konische Röhren

der ersten Art heißen sollen, kann man solche konische Röhren noch ansetzen, die sich nach dem Ausfluß hin erweitern, so daß die Einflußöffnung AB kleiner als die Ausflußöffnung EF ist, und die hier konische Röhren der zweiten Art heißen sollen.



Herr Venturi (Recherches Prop. V. Exp. 13—17. p. 26 etc.), hat mit dergleichen Röhren wichtige Versuche angestellt. Die Einmündung AB der erweiterten konischen Röhre ABEF hatte bei allen Versuchen 15,5 Linien im Durchmesser, sie befand sich aber nicht unmittelbar am Behälter, sondern zwischen ihr und diesem war eine konische Röhre der ersten Art angebracht, welche beinahe die Gestalt des zusammengezogenen Strahls hatte. Die Länge AD und Ausmündung EF wurde bei jedem Versuche abgeändert, und man hatte bei unveränderter Druckhöhe von $32\frac{1}{2}$ Zoll die größte Wassermenge, wenn AD = 148, AB = 15,5 und EF = 27 Linien groß war. In diesem Falle erhielt man in jeder Sekunde 329,14 par. Kubikzoll (Exp. 16), welches weit mehr ist, als die hypothetische Wassermenge für eine Oefnung von $15\frac{1}{2}$ Lin. im pariser Maaße gibt. Herr Venturi beschreibt auch noch einen Versuch (Exp. 14), bei welchem zwischen der Mündung φ und der konischen Ausflußröhre von der zweiten Art, eine drei Zoll lange cylindrische Röhre angebracht war, wodurch ebenfalls eine Vermehrung der Wassermenge bewirkt wurde. Weil aber keine Versuche mit der konischen Röhre der zweiten Art, die hier, wenn sie die vortheilhafteste Gestalt hat, ψ heißen kann, ohne Verbindung mit andern Röhren beschrieben sind, auch von der Vermehrung der Wassermenge bei einer drei Zoll langen cylindrischen Röhre, durch Ansetzung der Röhren φ und ψ, nicht geradezu auf längere Röhren geschlossen werden kann, und daher die Behauptung Venturis (Prop. VII. p. 38 u. f.), daß man bei einer cylindrischen Röhrenleitung, bei unveränderter Druckhöhe, durch zweckmäßige Ansatzröhren (φ und ψ) die Wassermenge

so im Verhältniß 10 : 24 vermehren könne, sich nicht geradezu annehmen läßt, so schien es mir wichtig genug zu seyn, über diese zur Erweiterung der Hydraulik und für die Ausübung wichtigen Gegenstände Versuche mit der möglichsten Genauigkeit anzustellen.

97. §.

Zu den folgenden Versuchen diente ein 4 Fuß *) hoher prismatischer Behälter, dessen horizontaler Durchschnitt ein im lichten 18,5 Zoll langes und 14,4 Zoll breites Rechteck bildete. In der schmalen vertikalen Seitenwand desselben befand sich in einiger Entfernung vom Boden, eine messingene Platte, welche mit der innern Wand des Behälters in einerlei Fläche lag, und in die man alle metallene Ansätze oder Röhren so einschrauben konnte, daß ihre Einmündung in eben die Fläche fiel. Die Einmündung konnte mittelst einer Klappe nach Gefallen geöfnet oder geschlossen werden. Zur Bestimmung der Zeit diente eine sehr gut gearbeitete Sekundenpendeluhr, welche durch einen Zeiger die Sekunden bemerkte, und mittelst einer Glocke durch Schläge hörbar machte.

Sämmtliche Ansatzstücke und Röhren waren von Messing gearbeitet, und die innern Flächen aufs genaueste polirt, auch zur leichtern Vergleichung der verschiedenen Resultate, beziehen sich alle Oefnungen auf die Weite von einem Zoll, auch sind alle Abmessungen mit dem hiesigen Originalmaße verglichen.

Die cylindrischen Röhren waren insgesammt einen Zoll weit, die Röhre φ nach meinen Beobachtungen (92. §.) 8 Linien lang, in der Einmündung 15, und in der Ausmündung 12 Lin. oder einen Zoll weit. Die Röhre ψ war $8\frac{1}{18}$ Zoll lang, in der Einmündung 1 Zoll, und in der Ausmündung $1\frac{1}{4}$ Zoll weit. Die Röhre φ in Verbindung

*) Alle hier gegebene Abmessungen beziehen sich auf das schon angeführte rheinländische Maß.

mit andern Röhren wurde nur bei der Einmündung, und ψ bei der Ausmündung angebracht.

Verschiedene angestellte Versuche zeigten kleine Unregelmäßigkeiten, wenn man das Wasser im Behälter, bei Beobachtung aller Vorsicht, auf einerlei Höhe erhalten wollte, weil es sich so leicht ereignet, daß in gewissen Augenblicken mehr oder weniger Wasser zugelassen wird als erforderlich ist. Auch war es unvermeidlich, daß nicht durch das zufließende Wasser eine unregelmäßige Bewegung im Behälter entstand, weshalb ich es der Genauigkeit, welche diese Versuche erfordern, angemessener fand, beim Anfange eines jeden Versuchs eine Druckhöhe von 3 Fuß zu bewirken, und ohne Zufluß den Wasserspiegel so weit sinken zu lassen, bis ein Gefäß von 4156 Kubikzoll angefüllt war. Hiedurch senkte sich jedesmal der Wasserspiegel im Behälter, nach oft wiederholten Ausmessungen, 15,6 Zoll, wodurch eben so genaue Vergleichungen entstanden, als wenn die Druckhöhe unverändert blieb; auch hat man diesem Umstande die gute Uebereinstimmung der Versuche mit einerlei Röhre zuzuschreiben.

Alle hier angeführten Versuche sind in Gegenwart des Königl. Professors Herrn Hobert, angestellt oder wiederholt worden.

I. Erfahrung. Kreisförmige einen Zoll weite Oefnung in einer $\frac{1}{24}$ Zoll dicken Platte mit scharfen Kanten.

Beobachtete Zeit des Ausflusses:

1. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.

II. Erfahrung. Das Mundstück φ beim Einfluß $1\frac{1}{4}$ Zoll, beim Ausfluß 1 Zoll weit, mit scharfen Kanten.

1. Versuch; 40 Sekunden.
2. Versuch; 40 Sekunden.

III. Erfahrung. Dasselbe Mundstück φ, wenn die Kanten beim Ein- und Ausfluß sanft abgerundet waren.

1. Versuch; $37\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $37\frac{1}{2}$ Sekunden.

IV. Erfahrung. Die konische $8\frac{1}{8}$ Zoll lange Ansatzröhre ψ, beim Einfluß 1 Zoll, beim Ausfluß $1\frac{1}{12}$ Zoll weit, mit scharfen Kanten.

1. Versuch; 31 }
2. Versuch; $31\frac{1}{2}$ } $31\frac{1}{4}$ Sekunden.

V. Erfahrung. Die Mundstücke φ *) und ψ genau mit einander verbunden.

1. Versuch; $23\frac{1}{2}$ }
2. Versuch; 24 } $23\frac{2}{3}$ Sekunden.
3. Versuch; $23\frac{1}{2}$ }

VI. Erfahrung. Cylindrische Röhre, 1 Zoll lang. Das Wasser folgte nicht den Wänden der Röhre.

1. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.

VII. Erfahrung. Cylindrische Röhre, 1 Zoll lang, an der Einmündung mit φ verbunden. Das Wasser folgte den Wänden der Röhre.

1. Versuch; 38 }
2. Versuch; $38\frac{1}{2}$ } $38\frac{1}{4}$ Sekunden.

VIII. Erfahrung. Cylindrische Röhre, 1 Zoll lang, bei der Einmündung mit φ, bei der Ausmündung mit ψ verbunden.

1. Versuch; $27\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $27\frac{1}{2}$ Sekunden.

IX. Erfahrung. Cylindrische Röhre, 3 Zoll lang. Das Wasser folgte nicht den Wänden der Röhre.

1. Versuch; $59\frac{1}{2}$ Sekunden.

Das Wasser folgte den Wänden der Röhre.

2. Versuch; 45 }
3. Versuch; $44\frac{1}{2}$ } $44\frac{3}{4}$ Sekunden.

*) Wenn das Mundstück φ ohne weitere Bemerkungen angeführt wird, so ist immer dasjenige mit scharfen Kanten zu verstehen, welches bei der zweiten Erfahrung zu den Versuchen diente.

Dieselbe Röhre innerhalb des Behälters angebracht, so daß sie von allen Seiten mit Wasser umgeben war, und ihre Ausmündung mit der innern Fläche des Behälters in einerlei Ebene lag.

4. Versuch; 45 Sekunden.
5. Versuch; 45 Sekunden.

Bei einer $1\frac{1}{2}$ Zoll langen innerhalb des Behälters angebrachten Röhre, wobei das Wasser den Wänden folgte, fand man dieselbe Zeit.

X. Erfahrung. Cylindrische 3 Zoll lange Röhre, mit der Einmündung φ.

1. Versuch; 39
2. Versuch; $38\frac{1}{2}$

} $38\frac{3}{4}$ Sekunden.

XI. Erfahrung. Cylindrische 3 Zoll lange Röhre, mit der Ausmündung ψ.

1. Versuch; $33\frac{1}{2}$
2. Versuch; 33
3. Versuch; 33

} $33\frac{1}{6}$ Sekunden.

XII. Erfahrung. Cylindrische 3 Zoll lange Röhre, mit φ und ψ.

1. Versuch; $27\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $27\frac{1}{2}$ Sekunden.

XIII. Erfahrung. Cylindrische 12 Zoll lange Röhre.

1. Versuch; 48 Sekunden.
2. Versuch; 48 Sekunden.

XIV. Erfahrung. Cylindrische 12 Zoll lange Röhre, mit φ.

1. Versuch; $42\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $42\frac{1}{2}$ Sekunden.

XV. Erfahrung. Cylindrische 12 Zoll lange Röhre, mit ψ.

1. Versuch; $37\frac{1}{2}$
2. Versuch; 38
3. Versuch; $37\frac{1}{2}$

} $37\frac{2}{3}$ Sekunden.

XVI. Erfahrung. Cylindrische 12½ Zoll lange Röhre, mit φ und ψ.

1. Versuch; 33
2. Versuch; 33½ } 33¼ Sekunden.

XVII. Erfahrung. Cylindrische 24 Zoll lange Röhre,

1. Versuch; 50
2. Versuch; 51 } 50½ Sekunden.

XVIII. Erfahrung. Cylindrische 24 Zoll lange Röhre, mit φ.

1. Versuch; 46 Sekunden.

XIX. Erfahrung. Cylindrische 24 Zoll lange Röhre, mit ψ.

1. Versuch; 40½
2. Versuch; 41
3. Versuch; 41 } 40⅚ Sekunden.

XX. Erfahrung. Cylindrische 24 Zoll lange Röhre, mit φ und ψ.

1. Versuch; 37½ Sekunden.
2. Versuch; 37½ Sekunden.

XXI. Erfahrung. Cylindrische 36 Zoll lange Röhre.

1. Versuch; 54 Sekunden.
2. Versuch; 54 Sekunden.

XXII. Erfahrung. Cylindrische 36 Zoll lange Röhre, mit φ.

1. Versuch; 49½ Sekunden.
2. Versuch; 49½ Sekunden.

XXIII. Erfahrung. Cylindrische 36 Zoll lange Röhre, mit ψ. Das Wasser folgte nicht den Wänden der Röhre ψ, sondern nur dem Untertheil derselben.

1. Versuch; 52½ Sekunden.

Wenn das Wasser genöthigt wurde, den Wänden der Röhre ψ zu folgen.

2. Versuch; 44 Sekunden.
3. Versuch; 44 Sekunden.
4. Versuch; 44 Sekunden.

XXIV. Erfahrung. Cylindrische 36 Zoll lange Röhre, mit φ und ψ.

1. Versuch; $40\frac{1}{2}$ Sekunden.
2. Versuch; $40\frac{1}{2}$ Sekunden.

XXV. Erfahrung. Cylindrische 48 Zoll lange Röhre.

1. Versuch; 58 Sekunden.
2. Versuch; 58 Sekunden.

XXVI. Erfahrung. Cylindrische 48 Zoll lange Röhre, mit φ.

1. Versuch; $53\frac{1}{2}$ } $53\frac{1}{4}$ Sekunden.
2. Versuch; 53 }

XXVII. Erfahrung. Cylindrische 48 Zoll lange Röhre, mit ψ. Das Wasser folgt den Wänden der Röhre.

1. Versuch; 48 Sekunden.
2. Versuch; 48 Sekunden.

XXVIII. Erfahrung. Cylindrische 60 Zoll lange Röhre.

1. Versuch; 61 Sekunden.
2. Versuch; 61 Sekunden.

XXIX. Erfahrung. Cylindrische 60 Zoll lange Röhre, mit φ.

1. Versuch; 57 } $56\frac{3}{4}$ Sekunden.
2. Versuch; $56\frac{1}{2}$ }

XXX. Erfahrung. Cylindrische 60 Zoll lange Röhre, mit ψ. Das Wasser folgte den Wänden der Röhre ψ, außer etwa $\frac{1}{3}$ des Obertheils blieb unausgefüllt, und das Wasser war durch keinen Kunstgriff dahin zu bringen, daß es die Röhre ganz ausfüllte.

1. Versuch; 52 Sekunden.
2. Versuch; 52 Sekunden.

98. §.

Um die vorstehenden Erfahrungen besser zu übersehen und auf eine gemeinschaftliche Einheit zurück zu führen, darf man nur nach 115. §. die Zeit bestimmen, in welcher bei der anfänglichen Druckhöhe von 3 Fuß, und den übri=

gen bekannten Abmessungen, 4156 Kubikzoll Wasser durch eine 1 Zoll weite kreisförmige Oefnung ablaufen, indem man voraussetzt, daß weder Contraction noch andere Hindernisse die Bewegung des Wassers aufhalten, sondern dasselbe eben die Geschwindigkeit in der Oefnung, wie ein frei fallender Körper erlangt. Dieses gibt die Zeit für die hypothetische Wassermenge = 36,745 Sekunden, und weil sich die Zeiten des Ausflusses gleicher Wassermengen, bei gleichen Gefäßen ohne Zufluß, die sich mit verschiedener Contraction ausleeren, umgekehrt wie die Wassermengen verhalten, welche bei unveränderten Druckhöhen und mit derselben Contraction in gleichen Zeiten auslaufen würden *), so gibt dies ein leichtes Mittel, bei sämmtlichen vorstehenden Erfahrungen anzugeben, wie sich die Wassermenge, welche bei unveränderter Druckhöhe ausgelaufen wäre, zur hypothetischen verhält. Anfänger werden die hier angegebenen Verhältnißzahlen so lange als Wahrheit annehmen, bis sie mit Hülfe des folgenden fünften Kapitels von der Richtigkeit dieser Rechnung überzeugt sind. Es ist nur noch zu bemerken, daß in der letzten Spalte der folgenden Tafel, die hypothetische Wassermenge wie bisher = 1 gesetzt ist, und daß die Versuche eben so aufeinander folgen, wie sie vorhin beschrieben sind.

---

*) Wenn T die Zeit ist, in welcher sich das Gefäß, dessen Querschnitt A und die Ausflußöfnung a ist, ohne Contraction bei der anfänglichen Druckhöhe h, um die Tiefe k ausleert, und t diese Zeit für eine bestimmte Contraction bei eben diesem Gefäße bezeichnet; wenn ferner bei unveränderter Druckhöhe h in der Zeit τ ohne Contraction die Wassermenge M, und in eben der Zeit mit Contraction die Wassermenge m ausläuft, so ist 115. §.

$$T = \frac{2}{2\sqrt{g}} [\sqrt{h} - \sqrt{(h-k)}] \frac{A}{a} \text{ und}$$

$$t = \frac{2}{\alpha} [\sqrt{h} - \sqrt{(h-k)}] \frac{A}{a}.$$

Ferner $M = \tau a 2\sqrt{g}\sqrt{h}$ und

$m = \tau a \alpha \sqrt{h}$; daher verhält sich

$T : t = \alpha : 2\sqrt{g}$ und

$m : M = \alpha : 2\sqrt{g}$ folglich

$T : t = m : M.$

Erste Tafel.

N.	Einmündung. φ	Länge der 1 Zoll weiten Röhre. Zoll.	Ausmündung. ψ	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß der hypothetischen Wassermenge zur wirklichen.
1		$\frac{1}{24}$		$59\frac{1}{2}$	0,6176
2	φ'	0		40	0,9186
3	φ'	0		$37\frac{1}{2}$	0,9798
4		0	ψ	$31\frac{1}{4}$	1,1758
5	φ	0	ψ	$23\frac{2}{7}$	1,5526
6		1		$59\frac{1}{2}$	0,6176
7	φ	1		$38\frac{1}{4}$	0,9606
8	φ	1	ψ	$27\frac{1}{2}$	1,3362
9		3		$44\frac{3}{4}$	0,8211
10	φ	3		$38\frac{3}{4}$	0,9482
11		3	ψ	$33\frac{1}{5}$	1,1079
12	φ	3	ψ	$27\frac{1}{2}$	1,3362
13		12		48	0,7655
14	φ	12		$42\frac{1}{2}$	0,8646
15		12	ψ	$37\frac{3}{5}$	0,9755
16	φ	12	ψ	$33\frac{1}{4}$	1,1051
17		24		$50\frac{1}{2}$	0,7276
18	φ	24		46	0,7988
19		24	ψ	$40\frac{5}{8}$	0,8999
20	φ	24	ψ	$37\frac{1}{2}$	0,9798
21		36		54	0,6804
22	φ	36		$49\frac{1}{2}$	0,7423
23		36	ψ	44	0,8351
24	φ	36	ψ	$40\frac{1}{2}$	0,9073
25		48		58	0,6335
26	φ	48		$53\frac{1}{4}$	0,6900
27		48	ψ	48	0,7655
28		60		61	0,6024
29	φ	60		$56\frac{3}{4}$	0,6475
30		60	ψ	52	0,7066

In der vorstehenden Tafel sind sämmtliche Versuche nach der Länge der einen Zoll weiten Röhren geordnet;

φ' bedeutet die Mündung mit abgerundeten Kanten.

stellt man aber diejenigen Versuche zusammen, welche sich auf Röhren von einerlei Art beziehen, so entstehen zur bessern Vergleichung noch folgende vier Tafeln.

Zweite Tafel.

N.	Länge der Röhre. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	$\frac{1}{24}$	$59\frac{1}{2}$	0,6176
2	1	$59\frac{1}{2}$	0,6176
3	3	$44\frac{3}{4}$	0,8211
4	12	48	0,7655
5	24	$50\frac{1}{2}$	0,7276
6	36	54	0,6804
7	48	58	0,6335
8	60	61	0,6024

Dritte Tafel.

N.	Einmündung.	Länge der Röhre. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	φ	0	40	0,9186
2	φ	1	$38\frac{1}{4}$	0,9606
3	φ	3	$38\frac{3}{4}$	0,9482
4	φ	12	$42\frac{1}{2}$	0,8646
5	φ	24	46	0,7988
6	φ	36	$49\frac{1}{2}$	0,7423
7	φ	48	$53\frac{1}{4}$	0,6900
8	φ	60	$56\frac{3}{4}$	0,6475

Vierte Tafel.

N.	Länge der Röhre. Zoll.	Ausmündung. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	0	ψ	31$\frac{1}{2}$	1,1758
2	3	ψ	33$\frac{1}{6}$	1,1079
3	12	ψ	37$\frac{3}{5}$	0,9755
4	24	ψ	40$\frac{5}{6}$	0,8999
5	36	ψ	44	0,8351
6	48	ψ	48	0,7655
7	60	ψ	52	0,7066

Fünfte Tafel.

N.	Einmünd.	Länge der Röhre. Zoll.	Ausmünd.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	φ	0	ψ	23$\frac{2}{3}$	1,5526
2	φ	1	ψ	27$\frac{1}{2}$	1,3361
3	φ	3	ψ	27$\frac{1}{2}$	1,3361
4	φ	12	ψ	33$\frac{1}{4}$	1,1051
5	φ	24	ψ	37$\frac{1}{2}$	0,9798
6	φ	36	ψ	40$\frac{1}{2}$	0,9073

99. §.

Die in vorstehenden Tafeln geordneten Erfahrungen, berechtigen zu folgenden Schlüssen.

I. Unter übrigens gleichen Umständen verhalten sich die Wassermengen bei einer Oefnung in einer dünnen Wand, zur Mündung φ, nach der Form des zusammengezogenen Strahls, wenn die Ausmündung der Röhre φ gleiche Weite mit der Oefnung in der dünnen Wand hat, wie

$$40 : 59\tfrac{1}{2} = 1 : 1{,}487.$$

Sind die scharfen Kanten der Mündung φ abgerundet, wie

$37\frac{1}{2} : 59\frac{1}{2} = 1 : 1{,}587.$

II. Bei einer Oefnung in einer dünnen Wand, zur Mündung ψ, wenn die Einmündung der Röhre ψ der Oefnung in einer dünnen Wand gleich ist, wie

$31\frac{1}{4} : 59\frac{1}{2} = 1 : 1{,}904.$

III. Bei einer Oefnung in einer dünnen Wand, zu der aus den Röhren φ und ψ zusammengesetzten Mündung, wie

$23\frac{3}{5} : 59\frac{1}{2} = 1 : 2{,}514.$

Es ist bemerkenswerth, daß durch diese Zusammensetzung um die Hälfte mehr Wasser ausläuft, als wenn das Wasser wie ein frei fallender Körper beschleuniget würde.

IV. Die Wassermenge bei einer kurzen Ansatzröhre, verhält sich zu der mit der kurzen Ansatzröhre verbundenen Einmündung φ, wie

$38\frac{3}{4} : 44\frac{3}{4} = 1 : 1{,}154.$

V. Bei einer kurzen Ansatzröhre, zu dieser Röhre mit der Ausmündung ψ verbunden, wie

$33\frac{1}{6} : 44\frac{3}{4} = 1 : 1{,}349.$

VI. Bei einer kurzen Ansatzröhre, zu dieser mit der Ein- und Ausmündung φ und ψ verbundenen Röhre, wie

$27\frac{1}{2} : 44\frac{3}{4} = 1 : 1{,}627.$

Anmerk. So weit diese Schlüsse von Oefnungen in einer dünnen Wand oder von kurzen Ansatzröhren gelten, können sie durch die beschriebenen Versuche gerechtfertiget werden; wenn aber Venturi (a. a. O. Prop. VII. p. 38) behauptet, daß man durch angemessene Ein- und Ausmündungen bei jeder cylindrischen Röhre die Wassermenge im Verhältniß von 10 zu 24 vermehren könne, und sich dieserhalb auf seine Versuche mit 3 Zoll langen Röhren beruft, so ist offenbar der Schluß von kurzen Ansatzröhren zu weit ausgedehnt, wenn er von jeder cylindrischen Röhre gelten soll.

Daß bei längern Röhren die Wassermenge nicht in einem eben so großen Verhältnisse vermehrt wird, wie bei kurzen

Ansatzröhren, beweisen meine Versuche hinlänglich, und es muß irgend eine Röhrenlänge geben, wo die Mündungen φ und ψ gar keine Vermehrung der Wassermenge bewirken.

Vergleicht man die Wassermengen der zweiten Tafel mit denen der dritten, so stehen die Vermehrungen, welche durch die Einmündung φ bewirkt werden, in folgenden Verhältnissen:

Länge der Röhre

3 Zoll		$38\frac{3}{4}$	:	$44\frac{3}{4}$	=	1	:	1,154
12	s s	$42\frac{1}{2}$	:	48	=	1	:	1,129
24	s s	46	:	$50\frac{1}{2}$	=	1	:	1,098
36	s s	$49\frac{1}{2}$	:	54	=	1	:	1,091
48	s s	$53\frac{1}{4}$	:	58	=	1	:	1,089
60	s s	$56\frac{3}{4}$	:	61	=	1	:	1,075

woraus hervorgeht, daß die Mündung φ die Wassermenge bei langen Röhren nicht eben so vermehrt, wie bei kurzen Ansatzröhren.

Dasselbe gilt von der Ausmündung ψ.

Länge der Röhre

3 Zoll		$33\frac{1}{4}$	:	$44\frac{3}{4}$	=	1	:	1,349
12	s s	$37\frac{3}{4}$	:	48	=	1	:	1,274
24	s s	$40\frac{3}{4}$	:	$50\frac{3}{8}$	=	1	:	1,236
36	s s	44	:	54	=	1	:	1,227
48	s s	48	:	58	=	1	:	1,208
60	s s	52	:	61	=	1	:	1,173

Aehnliche Abnahme in der Vermehrung der Wassermenge findet man für längere Röhren, wenn die Mündungen φ und ψ zusammen angebracht werden, auch habe ich zur Ueberzeugung, daß bei einer gewissen Länge der Röhre, die Mündung ψ keine Vermehrung der Wassermenge bewirke, unter 3 Fuß Druckhöhe, mit einer 20 Fuß langen Röhre Versuche angestellt, bei welcher immer eben dieselbe Wassermenge in gleicher Zeit erhalten wurde, man mochte ψ anbringen oder nicht; auch war es nicht möglich zu bewerkstelligen, daß das Wasser die ganze Röhre ψ ausfüllte, weil es sich immer von dem obern Theil derselben losriß.

Wenn es nun gleich wahrscheinlich ist, daß für kleinere Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers, die Weite der Ausmündung der Röhre ψ kleiner werden muß, so läßt sich doch absehen, daß, wenn hiedurch auch eine geringe Vermehrung der Wassermenge bewirkt wird, diese doch nie so beträchtlich seyn kann, wie sie Venturi angibt.

100. §.

Um die verschiedenen Werthe zusammen zu stellen, welche bei der Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit c, für eine gegebene Druckhöhe h, nach den verschiedenen Arten des Ausflusses, in den vorzüglichsten Fällen der Ausübung nöthig sind, dient die nachstehende Auseinandersetzung, bei welcher, außer eigenen Erfahrungen, zugleich diejenigen Angaben benutzt worden, welche du Buat *) in seiner Hydraulik (1. B. 1. Absch. 1. K.) gegeben hat.

I. Zur Bestimmung der hypothetischen Geschwindigkeit, oder für den freien Fall der Körper von einer Höhe h, erhält man (16. §.) die erforderliche Geschwindigkeit

$$c = 7{,}9\,\sqrt{h} \text{ und}$$

$$h = \frac{c^2}{62{,}5} = 0{,}016\,.\,c^2.$$

II. Bei Mündungen an einem Behälter, von der Gestalt des zusammengezogenen Strahls (96. §.)

$$c = 7{,}646\,\sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{58{,}46} = 0{,}0171\,.\,c^2.$$

III. Bei breiten Gerinnen, deren Sohle bei ihrer Einmündung mit dem Boden des Behälters gleich hoch lieget; bei Freischleusen mit Flügelwänden ohne Schützöfnung; bei langen Einbauen, welche

---

*) Principes d'Hydrauliques vérifiés par un grand nombre d'Expériences faites par ordre du Gouvernement. Par M. le Chevalier *du Buat*. Nouvelle édition. Tom I. et II. à Paris 1786. (Tom. I. Sect. I. Chap. 1.)

Von dem ersten Theile dieses Werkes hat man zwei deutsche Uebersetzungen, wovon die des Professors Kosmann, von mit mit Anmerkungen und Zusätzen versehen, im Jahre 1796 herausgegeben ist. Die zweite Uebersetzung, welche ebenfalls Zusätze enthält, ist vom Prof. Lempe.

Ansatzröhren, beweisen meine Versuche hinlänglich, und es muß irgend eine Röhrenlänge geben, wo die Mündungen φ und ψ gar keine Vermehrung der Wassermenge bewirken.

Vergleicht man die Wassermengen der zweiten Tafel mit denen der dritten, so stehen die Vermehrungen, welche durch die Einmündung φ bewirkt werden, in folgenden Verhältnissen:

Länge der Röhre

3 Zoll	38¾	: 44¾	= 1	: 1,154
12 = =	42½	: 48	= 1	: 1,129
24 = =	46	: 50½	= 1	: 1,098
36 = =	49½	: 54	= 1	: 1,091
48 = =	53¼	: 58	= 1	: 1,089
60 = =	56¾	: 61	= 1	: 1,075

woraus hervorgeht, daß die Mündung φ die Wassermenge bei langen Röhren nicht eben so vermehrt, wie bei kurzen Ansatzröhren.

Dasselbe gilt von der Ausmündung ψ.

Länge der Röhre

3 Zoll	33¼	: 44¾	= 1	: 1,349
12 = =	37⅔	: 48	= 1	: 1,274
24 = =	40¾	: 50⅜	= 1	: 1,236
36 = =	44	: 54	= 1	: 1,227
48 = =	48	: 58	= 1	: 1,208
60 = =	52	: 61	= 1	: 1,173

Aehnliche Abnahme in der Vermehrung der Wassermenge findet man für längere Röhren, wenn die Mündungen φ und ψ zusammen angebracht werden, auch habe ich zur Ueberzeugung, daß bei einer gewissen Länge der Röhre, die Mündung ψ keine Vermehrung der Wassermenge bewirke, unter 3 Fuß Druckhöhe, mit einer 20 Fuß langen Röhre Versuche angestellt, bei welcher immer eben dieselbe Wassermenge in gleicher Zeit erhalten wurde, man mochte ψ anbringen oder nicht; auch war es nicht möglich zu bewerkstelligen, daß das Wasser die ganze Röhre ψ ausfüllte, weil es sich immer von dem obern Theil derselben losriß.

Wenn es nun gleich wahrscheinlich ist, daß für kleinere Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers, die Weite der Ausmündung der Röhre ψ kleiner werden muß, so läßt sich doch absehen, daß, wenn hiedurch auch eine geringe Vermehrung der Wassermenge bewirkt wird, diese doch nie so beträchtlich seyn kann, wie sie Venturi angibt.

100. §.

Um die verschiedenen Werthe zusammen zu stellen, welche bei der Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit c, für eine gegebene Druckhöhe h, nach den verschiedenen Arten des Ausflusses, in den vorzüglichsten Fällen der Ausübung nöthig sind, dient die nachstehende Auseinandersetzung, bei welcher, außer eigenen Erfahrungen, zugleich diejenigen Angaben benutzt worden, welche du Buat *) in seiner Hydraulik (1. B. 1. Absch. 1. K.) gegeben hat.

I. Zur Bestimmung der hypothetischen Geschwindigkeit, oder für den freien Fall der Körper von einer Höhe h, erhält man (16. §.) die erforderliche Geschwindigkeit

$$c = 7{,}9\ \sqrt{h} \text{ und}$$

$$h = \frac{c^2}{62{,}5} = 0{,}016\ .\ c^2.$$

II. Bei Mündungen an einem Behälter, von der Gestalt des zusammengezogenen Strahls (96. §.)

$$c = 7{,}646\ \sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{58{,}46} = 0{,}0171\ .\ c^2.$$

III. Bei breiten Gerinnen, deren Sohle bei ihrer Einmündung mit dem Boden des Behälters gleich hoch liegt; bei Freischleusen mit Flügelwänden ohne Schützöfnung; bei langen Einbauen, welche

---

*) Principes d'Hydrauliques vérifiés par un grand nombre d'Expériences faites par ordre du Gouvernement. Par M. le Chevalier *du Buat*. Nouvelle édition. Tom I. et II. à Paris 1786. (Tom. I. Sect. I. Chap. 1.)

Von dem ersten Theile dieses Werkes hat man zwei deutsche Uebersetzungen, wovon die des Professors Kosmann, von mit mit Anmerkungen und Zusätzen versehen, im Jahre 1796 herausgegeben ist. Die zweite Uebersetzung, welche ebenfalls Zusätze enthält, ist vom Prof. Lempe.

eine schräge Lage haben, und bei Brückenpfeiler'n mit zugespitzten Vordertheilen

$$c = 7{,}54\ \sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{56{,}85} = 0{,}0176\ .\ c^2.$$

IV. Bei schmalen Gerinnen, deren Sohle bei ihrer Einmündung mit dem Boden des Behälters gleich hoch liegt; bei Schutzöfnungen in Freiarchen mit Flügelwänden; bei steilen Einbauen und Brückenpfeilern mit geraden Vordertheilen

$$c = 6{,}76\ .\ \sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{45{,}7} = 0{,}0219\ .\ c^2.$$

V. Bei kurzen Ansatzröhren, deren Länge 2 bis 4mal so groß ist als der Durchmesser der Oefnung (94. §.)

$$c = 6{,}42\ \sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{41{,}22} = 0{,}0243\ .\ c^2.$$

VI. Für Schutzöfnungen ohne Flügelwände, im Bord eines Behälters mit dicken Wänden oder an Schleusenthoren

$$c = 5\ \sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{25} = 0{,}04\ .\ c^2.$$

VII. Bei Oefnungen in einer dünnen Wand (93. §.)

$$c = 4{,}89\ \sqrt{h}$$

$$h = \frac{c^2}{23{,}95} = 0{,}0417\ .\ c^2.$$

VIII. Der kürzern Bezeichnung wegen wird in der Folge zur Bestimmung der Werthe von c und h ein allgemeines Zeichen gebraucht, und der Coefficient, mit welchem $\sqrt{h}$ multiplizirt werden muß, um c zu finden, $= \alpha$ gesetzt, so daß ganz allgemein

$$c = \alpha\ \sqrt{h} \text{ also}$$

$$c^2 = \alpha^2 h \text{ und}$$

$$h = \frac{c^2}{\alpha^2}$$

wird, da denn nach den besondern Umständen, statt α *) die nöthigen Werthe gesetzt werden können.

Um die vorhin gegebenen Coefficienten und die davon abhängenden Zahlen, welche in der Folge sehr oft gebraucht werden, besser zu übersehen, dient folgende Tafel.

N.		α	α^2	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$
I.	Freier Fall der Körper	7,91	62,50	0,1265	0,0160
II.	Mündungen von der Gestalt des zusammengez. Strahls	7,646	58,46	0,1308	0,0171
III.	Breite Gerinne. Freischleusen mit Flügelwänden. Schräge Einbaue. Spitze Brückenpfeiler	7,54	56,85	0,1326	0,0176
IV.	Schmale Gerinne. Schutzöfnungen mit Flügelwänden. Steile Einbaue. Gerade Brückenpfeiler	6,76	45,70	0,1480	0,0219
V.	Kurze Ansatzröhren	6,42	41,22	0,1558	0,0243
VI.	Schutzöfnungen ohne Flügelwände	5,00	25,00	0,2000	0,0400
VII.	Oefnungen in dünnen Wänden	4,89	23,91	0,2043	0,0417

*) Dieser Buchstabe ist um so mehr zu bemerken, da solcher in der Folge, wenn keine Erinnerung beigefügt ist, die hier gegebene Bedeutung behalten wird, so daß α und α^2 hier in der Hydraulik eben so, wie $2\sqrt{g}$ und $4g$ beim freien Falle der Körper vorkommen, nur daß erstere nach den Umständen andere Werthe erhalten, letztere aber für unsere Gegend unveränderlich sind.

Zweites Kapitel.

Vom Ausflusse des Wassers durch horizontale und kleine Seitenöfnungen eines beständig voll erhaltenen Gefäßes.

---

101. §.

Man setze, daß bei einem Gefäße, dessen Querschnitt so groß ist, daß der Inhalt der Ausflußöfnung dagegen beinahe verschwindet

h die Druckhöhe,
c die mittlere Geschwindigkeit in der Oefnung,
a den Flächeninhalt der Ausflußöfnung, und
M die Wassermenge in jeder Sekunde bezeichne, so ist, weil (§. 88.)

$$M = ac \text{ und } c = \alpha \sqrt{h} \text{ (§. 100. VIII.)}$$

I. die Wassermenge

$$M = a\alpha \sqrt{h}$$

II. die Druckhöhe

$$h = \frac{1}{\alpha^2} \frac{M^2}{a^2}$$

III. der Inhalt der Oefnung

$$a = \frac{1}{\alpha} \frac{M}{\sqrt{h}}$$

Fließt in irgend einer Zeit von t Sekunden die Wassermenge $= N$ aus, so ist $N = Mt$ oder $t = \frac{N}{M}$, daher

IV. die Zeit, in welcher die Wassermenge N abfließt

$$t = \frac{N}{\alpha a \sqrt{h}}$$

1. Beispiel. In der dünnen Wand eines Gefäßes befindet sich eine Oefnung, deren Inhalt 6 □ Zoll ist; wie viel Wasser wird in jeder Sekunde auslaufen, wenn die der Oefnung zugehörige Druckhöhe 8 Fuß beträgt?

Hier ist $a = 6 \square$ Zoll $= \frac{1}{24} \square$ Fuß, $\alpha = 4,89$ daher die Wassermenge

$$M = \tfrac{1}{24} \cdot 4,89 \sqrt{8} = 0,576 \text{ Kubikfuß}$$
$$= 995 \text{ Kubikzoll.}$$

Für eine kurze Ansatzröhre ist die Rechnung dieselbe, außer daß $\alpha = 6,42$ gesetzt werden muß.

2. **Beispiel.** An einem Gefäße, welches alle 9 Sekunden, 4 Kubikfuß Wasser Zufluß hat, befindet sich eine kurze Ansatzröhre, oder eine Oefnung in einer dicken Wand, deren Inhalt 3 $\square$ Zoll beträgt. Wie hoch wird das Wasser über der Mitte der Oefnung stehen bleiben, damit der Zufluß dem Abflusse gleich ist?

Hier ist $M = \frac{4}{9}$ K. F.; $a = 3 \square$ Zoll $= \frac{1}{48} \square$ Fuß $\frac{1}{\alpha} = 0,0243$, daher die gesuchte Höhe

$$h = 0,0243 \left(\frac{4}{9 \cdot \frac{1}{48}}\right)^2 = 11,059 \text{ Fuß.}$$

3. **Beispiel.** Ein Wasserbehälter hat in jeder Sekunde $\frac{1}{2}$ Kubikfuß Zufluß. Wie viel muß der Inhalt des Querschnitts einer kurzen Ansatzröhre betragen, damit das Wasser über der Ausflußöfnung 11 Fuß hoch stehe?

$M = \frac{1}{2}$ K. F.; $h = 11$, daher der Flächeninhalt der Oefnung

$$a = 0,1558 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} = 0,02338 \square \text{ Fuß}$$
$$= 3,36 \square \text{ Zoll.}$$

4. **Beispiel.** Wie viel Zeit wird verfließen, damit durch eine kreisförmige Oefnung in einer dünnen Wand von 1 Zoll Durchmesser, bei einer Druckhöhe von 3 Fuß, 4 Kubikfuß Wasser ausfließen?

Es ist $a = 0,785 \square$ Zoll $= \frac{0,785}{144} \square$ Fuß, $h = 3$ Fuß und $N = 4$ Kubikfuß, daher die gesuchte Zeit

$$t = \frac{4}{4,89 \frac{0,785}{144} \sqrt{3}} = 86,6 \text{ Sekunden.}$$

Zur Abkürzung obiger Rechnungen kann man sich mit vielem Vortheile der Logarithmen bedienen.

102. §.

Wäre hingegen die Weite des Gefäßes in Vergleichung mit dem Inhalte der Ausflußöfnung nicht sehr verschieden, so läßt sich einsehen, daß das Wasser im Gefäße schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit gegen die Ausflußöfnung strömt und nicht, wie solches §. 89. voraussetzt, als stillstehend angenommen werden kann, wodurch offenbar die Ausflußgeschwindigkeit vermehrt wird. Gesetzt also, daß

A den wagerechten Querschnitt eines prismatischen Gefäßes,
a den Inhalt der Ausflußöfnung,
h die Druckhöhe,
c die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers und
C die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser im Gefäße sinkt, bezeichnen, so muß in jeder Sekunde durch den Querschnitt A eben so viel Wasser als durch die Oefnung a fließen,

daher ist $AC = ac$ oder $C = \frac{ac}{A}$.

Kommt das Wasser mit dieser Geschwindigkeit C vor der Ausflußöfnung an, so ist dies eben so viel als wenn ruhendes Wasser bei einer Druckhöhe $\frac{C^2}{\alpha^2}$ (§. 100. VIII.) gegen die Oefnung, auf den Ausfluß wirkte. Außerdem wirkt aber noch die Druckhöhe h auf den Ausfluß; daher ist die gesammte Höhe, welche die Geschwindigkeit c des ausfließenden Wassers erzeugt

$$h + \frac{C^2}{\alpha^2} = h + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{ac}{A}\right)^2.$$

Nun wird (§. 100. VIII.) zur Erzeugung der Geschwindigkeit c eine Druckhöhe $\frac{c^2}{\alpha^2}$ erfordert, daher ist

$$h + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{ac}{A}\right)^2 = \frac{c^2}{\alpha^2} \text{ oder } c^2 = \alpha^2 \frac{A^2}{A^2 - a^2} h$$

folglich die Geschwindigkeit

$$c = \alpha\sqrt{\left[\frac{A^2}{A^2 - a^2}\right]}\sqrt{h} = \frac{\alpha\sqrt{h}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)}}.$$

Für die Druckhöhe erhält man

$$h = \frac{A^2 - a^2}{A^2} \cdot \frac{c^2}{\alpha^2} = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) \frac{c^2}{\alpha^2}.$$

Auch läßt sich hienach die Wassermenge $M = a\,c$ leicht bestimmen.

Anmerkung. Wird a^2 gegen A^2 sehr klein, so daß man $A^2 - a^2$ ohne Fehler $= A^2$ annehmen kann, so ist $c = \alpha \sqrt{h}$ wie §. 101. Wenn hingegen $a = A$ wird, also die Ausflußöfnung dem Querschnitte des prismatischen Gefäßes gleich ist, so wird

$$c = \alpha \sqrt{\frac{A^2}{0}} \sqrt{h} = \infty,$$

oder die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers muß unendlich groß werden, wenn das Gefäß keinen Boden hat. Dieses Rechnungsresultat stimmt sehr wohl mit der Natur der Sache überein, wenn man erwägt, daß, wenn durch ein bodenloses prismatisches Gefäß das Wasser mit irgend einer Geschwindigkeit c ausfließen soll, alsdann auch dasselbe mit eben dieser Geschwindigkeit zufließen muß. Durch den freien Fall von der Höhe h erlangt aber das Wasser beim Austritt aus dem Gefäße eine größere Geschwindigkeit als die bei dem Eintritt war, es muß daher die Geschwindigkeit des eintretenden Wassers vermehrt werden, wenn eben so viel zufließen soll als ausfließt. Durch die Vermehrung der Eintrittsgeschwindigkeit wird aber die Geschwindigkeit beim Austritt noch weit mehr vergrößert, und weil diese Vermehrung der Geschwindigkeit ohne Ende fort geht, so muß auch alsdann die Ausflußgeschwindigkeit unendlich groß werden.

Drittes Kapitel.

Vom Ausflusse durch oben offene rechtwinklichte Oefnungen in den Seitenwänden eines Behälters.

103. §.

Im zweiten Kapitel ist vorausgesetzt worden, daß bei Seitenöfnungen die Höhe derselben so gering wäre, daß unter den verschiedenen Geschwindigkeiten, womit das Wasser ausfließt, kein beträchtlicher Unterschied sei; wenn

[illegible]

[illegible]

Es ist $AP = x$, die Geschwindigkeit in $P = y$, so ist

$$y = a\sqrt{x}$$

Ebendasselbe gilt für jede andere Oeffnung B, bei der Druckhöhe $AB = h$, wenn die Geschwindigkeit in $B = z$ gesetzt wird, alsdann ist

$$z = a\sqrt{h}.$$

Man nehme $PM = a\sqrt{x} = y$

$$BG = a\sqrt{h} = z$$

so verhält sich

$$AP : AB = x : h \text{ und}$$
$$PM : BG = \sqrt{x} : \sqrt{h} \text{ oder}$$
$$PM^2 : BG^2 = x : h \text{ daher}$$
$$AP : AB = PM^2 : BG^2.$$

Weil dieses nun für jede andere Abscisse, wie AP und dazu gehörige Ordinate wie PM gilt, so folgt, daß die Linie AMG, welche durch die Endpunkte M, G rc. der auf AB senkrechten Geschwindigkeiten geht, eine Parabel ist.

Denkt man sich nun längs der ganzen Linie AB lauter solche kleine Oeffnungen, so wird die Parabelfläche AGBA zur Bestimmung des Inhalts von dem Wasser, welches in einer Sekunde durch die Spalte AB ausfließt, dienen können. Nun ist der Inhalt der Parabelfläche ABG

$= \frac{2}{3}$ AB . BG $= \frac{2}{3}$ ch; und wenn die Breite des schmalen Streifens AB $=$ b′ gesetzt wird, so findet man die Wassermenge, welche in jeder Sekunde durch die Spalte AB abfließt $= \frac{2}{3}$ b′ch, oder wenn man eine rechtwinklichte Oefnung ABCD in der ganzen vertikalen Wand QR annimmt, und die Breite

$$AC = BD = b \text{ setzt,}$$

so wird durch das Rechteck ABCD, wenn das Wasser in unveränderlicher Höhe bei AC erhalten wird, und daselbst als stillstehend angesehen werden kann, in jeder Sekunde die Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3}\, cbh = \tfrac{2}{3}\, \alpha bh \sqrt{h}$$

abfließen, vorausgesetzt, daß diesem Abflusse keine Hindernisse im Wege stehen.

104. §.

Bei dem wirklichen Ausflusse pflegt sich ein Theil der Oberfläche des Wassers oberhalb der Oefnung bei AC zu senken, so daß der Wasserstrahl nicht in der ganzen Höhe AB $=$ h ausläuft. Dieser Abfall des Wassers macht es sehr schwierig einen allgemein gültigen Ausdruck aus theoretischen Gründen zu geben, nach welchem in jedem vorkommenden Falle die Wassermenge bestimmt werden könnte.

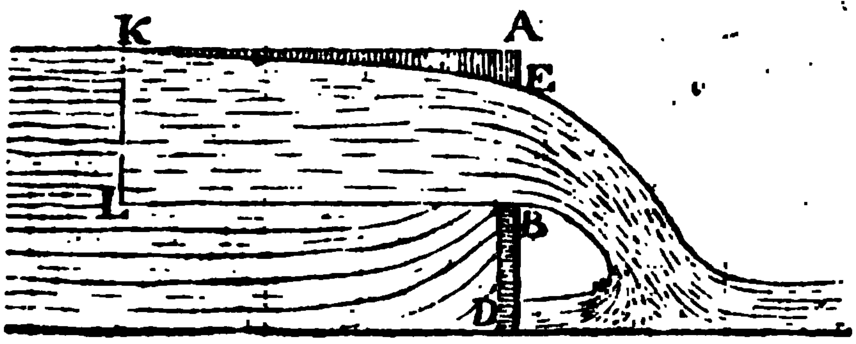
Um sowohl über die Wassermenge als über die Gestalt des ausfließenden Strahls urtheilen zu können, sind auf meine Veranlassung, durch den Bauinspektor Kypke, bei Bromberg mehrere wichtige Versuche angestellt worden. Ich werde aber nur diejenigen anführen, bei welchen ich selbst gegenwärtig war und mit Herrn Kypke gemeinschaftlich alle Abmessungen aufzeichnete.

Neben dem Bromberger Kanal, eine Viertelmeile von der Stadt Bromberg, befindet sich ein kleiner Bach, der auf eine Länge von 260 Fuß in gerader Richtung fließt, und seinen Zufluß aus Quellen neben dem Kanal, und theils aus dem Kanal selbst erhält. Dieser Bach war auf eine

Länge von 250 Fuß, nach einer geraden Richtung, mit starken Bretern auf 4 Fuß Breite und 3 Fuß Höhe genau ausgesetzt, so daß das Wasser in einem rechtwinklichten Flußbette laufen konnte. Die Oberkante der vertikalen Seitenbreter war horizontal abgehobelt, um von da ab, bis auf die Oberfläche des Wassers, mit möglichster Genauigkeit messen zu können. Es wurden bei dem ungehinderten Laufe des Wassers mehrere Querprofile gemessen, und mittelst des Stromquadranten die verschiedenen Geschwindigkeiten in denselben bestimmt, um hieraus die in jeder Sekunde abfließende Wassermenge zu finden. Zur Prüfung dieser Bestimmung wurde aber noch, vor und nach den Versuchen, eine hölzerne Querwand mit einer rechtwinklichten $11\frac{7}{16}$ Zoll breiten und $5\frac{1}{16}$ Zoll hohen Oefnung, welche sich in einer Platte von dünnem Eisenbleche befand, eingesetzt, und, nach eingetretenem Beharrungsstande, konnte aus dem beobachteten Druckwasser über der Oefnung ebenfalls die Wassermenge bestimmt werden. Sowohl die Ausmessungen der Querprofile, als auch die Prüfung mittelst der Oefnung in einer dünnen Wand, gaben eine gute Uebereinstimmung, und man fand die in jeder Sekunde durch den Kanal abfließende Wassermenge 4021 Kubikzoll = 2,327 Kubikfuß.

Zu den Versuchen mit oben offenen rechtwinklichten Oefnungen, wurden jedesmal in einer Entfernung von 240 Fuß vom Anfange des Kanals, auf die ganze Breite von 4 Fuß, eine Querwand von $1\frac{1}{8}$ Zoll dicken Bretern gesetzt, und in der Mitte dieser Wand, rechtwinklichte, scharf abgehobelte Oefnungen angebracht, deren unterster Rand bei jedem Versuche $7\frac{3}{16}$ Zoll von der Sohle des Kanals abstand. Die erste Oefnung, deren man sich bediente, war 6 Zoll breit; nachher wurde solche bis zu 10, 14, 18, $25\frac{3}{4}$ und $41\frac{3}{8}$ Zoll erweitert, und bei einem jeden Versuche zuvor der Beharrungsstand abgewartet, welcher leicht mittelst angebrachter Maßstäbe an dem unveränderlichen Stande des Wasserspiegels bemerkt werden konnte.

Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, so ist ein für allemal zu bemerken, daß die Höhe AB = KL, welche hier, um sie von der Druckhöhe (88. §.) zu unterscheiden, der **Wasserstand** (Altitudo aquae, *Hauteur d'eau*) genannt wird, nicht in der Oefnung selbst, sondern allemal da gemessen werden muß, wo sich der ursprüngliche Wasserspiegel noch nicht gesenkt hat. Wäre bei K die Grenze des ungesenkten Wasserspiegels, oder derjenige Punkt, wo das Wasser eine beschleunigte Bewegung annimmt, und bei B die tiefste Stelle in der Oefnung, so ziehe man BL horizontal und KL vertikal, um den Wasserstand KL = AB zu erhalten.



Der Punkt K wurde bei den Versuchen dadurch bestimmt, daß längs dem Wasserspiegel die Elfenbeinkugel des Stromquadranten, so lange gegen die Oefnung zu, eingesenkt wurde, bis man eine merkliche Zunahme der Geschwindigkeit des Wassers verspürte, weil hiedurch der Punkt, wo das Wasser eine beschleunigte Bewegung annimmt, genauer als durch vertikale Tiefenmessung ausgemittelt werden konnte, ob es gleich beinahe unmöglich ist, sowohl die Entfernung AK, als auch die Senkung des Wasserspiegels AE, so genau anzugeben, daß sich nicht kleine Fehler einschleichen sollten.

Nachstehende Tafel enthält die Resultate, welche die sorgfältigste Ausmessung gegeben hat; nur sind die in Zollen gefundenen Zahlen, der leichtern Rechnung wegen, auf Fußmaß gebracht worden.

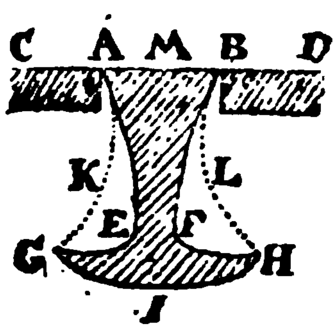
No. d. Versuchs.	Breite der Oefnung. Fuß.	EB Höhe des Strahls in der Oefnung. Fuß.	AE Senkung des Wasserspiegels. Fuß.	AB Wasserstand. Fuß.	AK Abstand des ungesenkten Wasserspiegels. Fuß.
1	0,500	1,219	0,031	1,250	0,330
2	0,833	0,853	0,047	0,900	0,540
3	1,167	0,645	0,075	0,720	0,790
4	1,500	0,523	0,073	0,596	0,810
5	2,146	0,408	0,072	0,480	0,750
6	3,448	0,292	0,052	0,344	0,660

Aus der angegebenen Wassermenge von 2,327 Kubikfuß und der Höhe der Ueberlaßschwelle von $7\frac{3}{16}$ Zoll, läßt sich mit Hülfe dieser Tafel leicht die mittlere Geschwindigkeit des Wassers oberhalb jeder Oefnung finden.

Anmerk. Ungeachtet die Oefnung $7\frac{3}{16}$ Zoll über der Sohle des Kanals angebracht war, so fand man doch, daß kleine nahe am Boden schwimmende Körper, wenn sie nicht weit von der Oefnung ankamen, sich allmählich vom Grunde in die Höhe bewegten, und so durch die Oefnung gingen.

Die Oberfläche des Strahls in der Oefnung bildete bei allen Versuchen eine zweimal eingebogene krumme Linie, welche in der Mitte und an beiden Rändern der Oefnung ihre größte Höhe hatte, aber wegen ihrer unmerklichen Abweichung von einer geraden Linie nicht ausgemessen werden konnte.

Die Gestalt, welche der ausfließende Strahl annimmt, ist merkwürdig, weshalb die nachstehende Figur eine ungefähre Abbildung von demjenigen horizontalen Durchschnitt enthält, welcher mit der Ueberlaufsschwelle in gleicher Höhe genom-



men ist. AB ist die Breite des ausfließenden Strahls, AC, BD sind die 1½ Zoll dicken Bohlenwände, und AEGIHFB die Grundfläche des ausfließenden Strahls, der bei E und F eine außerordentliche Zusammenziehung erleidet, sich aber bei G und H plötzlich wieder ausbreitet. Diese horizontale Grundfläche des Strahls, wird weit stärker zusammengezogen als die Oberfläche desselben, welche von oben angesehen ungefähr die Gestalt wie AKGIHLB hat, und wie ein Mantel überhängt.

105. §.

Um die Versuche mit dem im 103. §. gefundenen allgemeinen Ausdruck $M = \frac{2}{3} \alpha b h \sqrt{h}$ zu vergleichen, würde erfordert, daß die Geschwindigkeit des zufließenden Wassers so gering wäre, daß solche im Punkte des ungesenkten Wasserspiegels $= 0$ angenommen werden könnte, welches zwar nicht mit aller Schärfe zutrift, aber doch wegen des geringen Einflusses auf die Rechnung, hier bei Seite gesetzt werden kann.

Stellt man sich vor, daß der ausfließende Wasserstrahl nicht nur eine Contraction an den Rändern der Oefnung, sondern auch in seiner Oberfläche erleidet, so lassen sich zwar diese an sich sehr verschiedenen Zusammenziehungen nicht als einerlei ansehen, man könnte aber, ohne den Einfluß einer jeden auf die Wassermenge besonders zu bestimmen, sich damit begnügen, die Größe des Coeffizienten α aus den Versuchen zu bestimmen. Berechnet man die Werthe von

$$\frac{M}{b h \sqrt{h}} = \frac{2}{3} \alpha$$

so entstehet die folgende Tafel.

N°.	b	h	M	$\frac{2}{3}\alpha$
1	0,500	1,250	2,327	3,330
2	0,833	0,900	2,327	3,271
3	1,167	0,720	2,327	3,334
4	1,500	0,596	2,327	3,372
5	2,146	0,480	2,327	3,261
6	3,448	0,344	2,327	3,337

Nimmt man als einen Mittelwerth $\alpha = 5$ also

$$\tfrac{2}{3}\,\alpha = 3{,}333 = \tfrac{10}{3} \text{ so wird}$$

$$M = \tfrac{2}{3} \, . \, 5 \, . \, bh\sqrt{h} = \tfrac{10}{3}\, bh\sqrt{h}$$

und man sieht daraus, daß sich die Contraction eben so wie 100. §. N. VI. bei Schutzöfnungen in Freigerinnen ohne Flügelwände, in Rechnung bringen läßt.

Aus den du Buatschen Versuchen (1ster Band 143. §. meiner Zusätze) folgt $\frac{2}{3}\,\alpha = 3{,}3014$, welches nicht viel von obiger Bestimmung abweicht, so daß der hier angenommene Werth so lange in der Ausübung beibehalten werden kann, bis noch mannichfaltigere Versuche und eine erschöpfende Theorie die noch fehlenden Modifikationen angeben.

106. §.

Es läßt sich daher allgemein die Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3}\,\alpha bh\sqrt{h}$$

setzen, nur muß in jedem besondern Falle der Coefficient α nach 100. §. bestimmt werden.

Für Oefnungen in der Wand eines Behälters ohne Flügelwände ist $\alpha = 5$, also

$$M = \tfrac{10}{3}\, bh\sqrt{h}.$$

Wenn sich die Oefnung in einem Freigerinne mit Flügelwänden befindet, so ist $\alpha = 6{,}76$, also $\frac{2}{3}\,\alpha = 4{,}506$ oder sehr nahe $= \frac{9}{2}$, daher

$$M = \tfrac{9}{2}\, bh\sqrt{h}.$$

Beispiel. An einem See, in welchem die Oberfläche des Wassers als stillstehend angenommen werden kann, befindet sich eine oben offene rechtwinklichte Ausflußöfnung ohne Flügelwände, durch welche das Wasser frei abfließen kann. Die Breite der Oefnung ist 3 Fuß, und die Höhe des Wasserstandes 2 Fuß. Wie viel Wasser wird in jeder Sekunde abfließen, wenn dieser Wasserstand unverändert bleibt?

Hier ist $b = 3$, $h = 2$ daher
$M = \frac{12}{8} . 3 . 2 . \sqrt{2} = 28{,}28$ Kubikfuß.

107. §.

Weil $\frac{2}{3}\,\alpha\, b\, b \sqrt{h} = M$, so ist

$$h\sqrt{h} = \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b} \text{ oder quadrirt}$$

$$h^3 = \left[\frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right]^2 \text{ daher}$$

findet man allgemein den Wasserstand oder die Höhe des ungesenkten Wasserspiegels über dem Fachbaum

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right]^2}$$

oder wenn man sich der Logarithmen bedient

$$\text{Log. } h = \tfrac{2}{3}\left[\text{Log. } M - \text{Log. } (\tfrac{2}{3}\alpha b)\right]$$

Bei Ueberfällen in der Wand eines Behälters ist $\alpha = 5$, daher

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{3M}{10 . b}\right]^2}$$

Beispiel. Ein See hat in jeder Sekunde 200 Kubikfuß Wasser Zufluß. Wie tief wird der Fachbaum eines 6 Fuß breiten Ueberfalls unter dem horizontalen Wasserspiegel angelegt werden müssen, damit in jeder Sekunde diese Wassermenge abfließt?

Hier ist $M = 200$, $b = 6$, man findet daher die gesuchte Tiefe oder den Wasserstand

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{3 . 200}{10 . 6}\right]^2}$$

Hier ist $\frac{3 . 200}{10 . 6} = 10$, also die gesuchte Tiefe des Fachbaums unter dem horizontalen Wasserspiegel

$$h = \sqrt[3]{100} = 4{,}64 \text{ Fuß.}$$

102. §.

Wäre hingegen die Weite des Gefäßes in Vergleichung mit dem Inhalte der Ausflußöfnung nicht sehr verschieden, so läßt sich einsehen, daß das Wasser im Gefäße schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit gegen die Ausflußöfnung strömt und nicht, wie solches §. 89. voraussetzt, als stillstehend angenommen werden kann, wodurch offenbar die Ausflußgeschwindigkeit vermehrt wird. Gesetzt also, daß

A den wagerechten Querschnitt eines prismatischen Gefäßes,

a den Inhalt der Ausflußöfnung,

h die Druckhöhe,

c die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers und

C die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser im Gefäße sinkt, bezeichnen, so muß in jeder Sekunde durch den Querschnitt A eben so viel Wasser als durch die Oefnung a fließen,

daher ist $AC = ac$ oder $C = \frac{ac}{A}$.

Kommt das Wasser mit dieser Geschwindigkeit C vor der Ausflußöfnung an, so ist dies eben so viel als wenn ruhendes Wasser bei einer Druckhöhe $\frac{C^2}{\alpha^2}$ (§. 100. VIII.) gegen die Oefnung, auf den Ausfluß wirkte. Außerdem wirkt aber noch die Druckhöhe h auf den Ausfluß; daher ist die gesammte Höhe, welche die Geschwindigkeit c des ausfließenden Wassers erzeugt

$$h + \frac{C^2}{\alpha^2} = h + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{ac}{A}\right)^2.$$

Nun wird (§. 100. VIII.) zur Erzeugung der Geschwindigkeit c eine Druckhöhe $\frac{c^2}{\alpha^2}$ erfordert, daher ist

$$h + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{ac}{A}\right)^2 = \frac{c^2}{\alpha^2} \quad \text{oder} \quad c^2 = \alpha^2 \frac{A^2}{A^2 - a^2} h$$

folglich die Geschwindigkeit

$$c = \alpha\sqrt{\left[\frac{A^2}{A^2 - a^2}\right]}\sqrt{h} = \frac{\alpha\sqrt{h}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)}}$$

Für die Druckhöhe erhält man

$$h = \frac{A^2 - a^2}{A^2} \cdot \frac{c^2}{\alpha^2} = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) \frac{c^2}{\alpha^2}.$$

Auch läßt sich hienach die Wassermenge $M = a\,c$ leicht bestimmen.

Anmerkung. Wird a^2 gegen A^2 sehr klein, so daß man $A^2 - a^2$ ohne Fehler $= A^2$ annehmen kann, so ist $c = \alpha\sqrt{h}$ wie §. 101. Wenn hingegen $a = A$ wird, also die Ausflußöfnung dem Querschnitte des prismatischen Gefäßes gleich ist, so wird

$$c = \alpha\sqrt{\frac{A^2}{0}}\sqrt{h} = \infty,$$

oder die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers muß unendlich groß werden, wenn das Gefäß keinen Boden hat. Dieses Rechnungsresultat stimmt sehr wohl mit der Natur der Sache überein, wenn man erwägt, daß, wenn durch ein bodenloses prismatisches Gefäß das Wasser mit irgend einer Geschwindigkeit c ausfließen soll, alsdann auch dasselbe mit eben dieser Geschwindigkeit zufließen muß. Durch den freien Fall von der Höhe h erlangt aber das Wasser beim Austritt aus dem Gefäße eine größere Geschwindigkeit als die bei dem Eintritt war, es muß daher die Geschwindigkeit des eintretenden Wassers vermehrt werden, wenn eben so viel zufließen soll als ausfließt. Durch die Vermehrung der Eintrittsgeschwindigkeit wird aber die Geschwindigkeit beim Austritt noch weit mehr vergrößert, und weil diese Vermehrung der Geschwindigkeit ohne Ende fort geht, so muß auch alsdann die Ausflußgeschwindigkeit unendlich groß werden.

Drittes Kapitel.

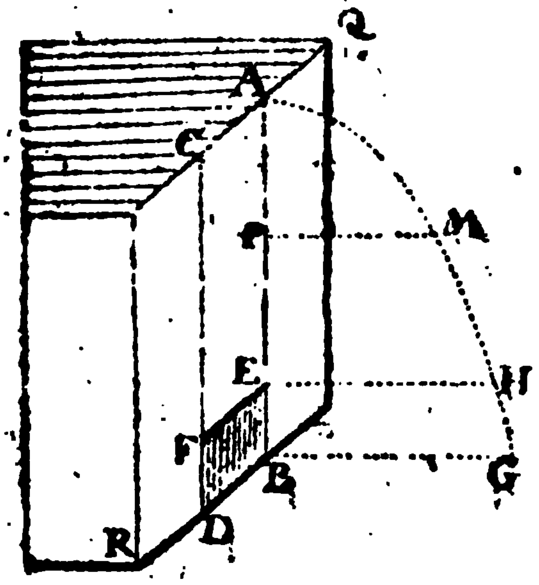
Vom Ausflusse durch oben offene rechtwinklichte Oefnungen in den Seitenwänden eines Behälters.

---

103. §.

Im zweiten Kapitel ist vorausgesetzt worden, daß bei Seitenöfnungen die Höhe derselben so gering wäre, daß unter den verschiedenen Geschwindigkeiten, womit das Wasser ausfließt, kein beträchtlicher Unterschied sei; wenn

aber diese Geschwindigkeiten sehr von einander abweichen, so wird dieserhalb eine eigene Untersuchung erfordert.



Gesetzt, das Gefäß QR wäre bis A mit Wasser angefüllt, und es fließe fortwährend so viel zu, daß die Höhe desselben unverändert bleibe, so kann man sich zuerst in der Vertikallinie AB, welche sich in der vertikalen Wand QR befindet, mehrere kleine Oefnungen P, B u. s. w. über einander denken, und für jede derselben die dazu gehörige Geschwindigkeit des Wassers bestimmen.

Es sei $AP = x$, die Geschwindigkeit in $P = y$, so ist

$$y = \alpha \sqrt{x}$$

Ebendasselbe gilt für jede andre Oefnung B, bei der Druckhöhe $AB = h$, wenn die Geschwindigkeit in $B = c$ gesetzt wird, alsdann ist

$$c = \alpha \sqrt{h}.$$

Man nehme $PM = \alpha \sqrt{x} = y$

$$BG = \alpha \sqrt{h} = c$$

so verhält sich

$$AP : AB = x : h \text{ und}$$
$$PM : BG = \sqrt{x} : \sqrt{h} \text{ oder}$$
$$PM^2 : BG^2 = x : h \text{ daher}$$
$$AP : AB = PM^2 : BG^2.$$

Weil dieses nun für jede andere Abscisse, wie AP und dazu gehörige Ordinate wie PM gilt, so folgt, daß die Linie AMHG, welche durch die Endpunkte M, G ꝛc. der auf AB senkrechten Geschwindigkeiten geht, eine Parabel ist.

Denkt man sich nun längs der ganzen Linie AB lauter solche kleine Oefnungen, so wird die Parabelfläche AGBA zur Bestimmung des Inhalts von dem Wasser, welches in einer Sekunde durch die Spalte AB ausfließt, dienen können. Nun ist der Inhalt der Parabelfläche ABG

$= \frac{2}{3}$ AB . BG $= \frac{2}{3}$ ch; und wenn die Breite des schmalen Streifens AB $= b'$ gesetzt wird, so findet man die Wassermenge, welche in jeder Sekunde durch die Spalte AB abfließt $= \frac{2}{3}\, b'ch$, oder wenn man eine rechtwinklichte Oefnung ABCD in der ganzen vertikalen Wand QR annimmt, und die Breite

$$AC = BD = b \text{ setzt,}$$

so wird durch das Rechteck ABCD, wenn das Wasser in unveränderlicher Höhe bei AC erhalten wird, und daselbst als stillstehend angesehen werden kann, in jeder Sekunde die Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3}\, cbh = \tfrac{2}{3}\, \alpha bh \sqrt{h}$$

abfließen, vorausgesetzt, daß diesem Abflusse keine Hindernisse im Wege stehen.

104. §.

Bei dem wirklichen Ausflusse pflegt sich ein Theil der Oberfläche des Wassers oberhalb der Oefnung bei AC zu senken, so daß der Wasserstrahl nicht in der ganzen Höhe AB = h ausläuft. Dieser Abfall des Wassers macht es sehr schwierig einen allgemein gültigen Ausdruck aus theoretischen Gründen zu geben, nach welchem in jedem vorkommenden Falle die Wassermenge bestimmt werden könnte.

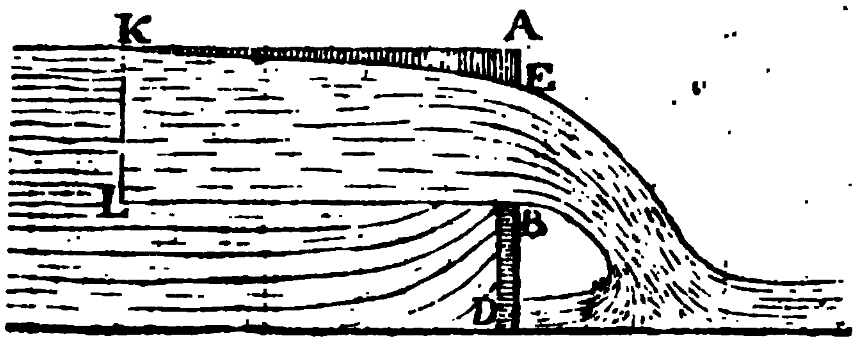
Um sowohl über die Wassermenge als über die Gestalt des ausfließenden Strahls urtheilen zu können, sind auf meine Veranlassung, durch den Bauinspektor Kypke, bei Bromberg mehrere wichtige Versuche angestellt worden. Ich werde aber nur diejenigen anführen, bei welchen ich selbst gegenwärtig war und mit Herrn Kypke gemeinschaftlich alle Abmessungen aufzeichnete.

Neben dem Bromberger Kanal, eine Viertelmeile von der Stadt Bromberg, befindet sich ein kleiner Bach, der auf eine Länge von 260 Fuß in gerader Richtung fließt, und seinen Zufluß aus Quellen neben dem Kanal, und theils aus dem Kanal selbst erhält. Dieser Bach war auf eine

Länge von 250 Fuß, nach einer geraden Richtung, mit starken Bretern auf 4 Fuß Breite und 3 Fuß Höhe genau aufgesetzt, so daß das Wasser in einem rechtwinklichten Flußbette laufen konnte. Die Oberkante der vertikalen Seitenbreter war horizontal abgehobelt, um von da ab, bis auf die Oberfläche des Wassers, mit möglichster Genauigkeit messen zu können. Es wurden bei dem ungehinderten Laufe des Wassers mehrere Querprofile gemessen, und mittelst des Stromquadranten die verschiedenen Geschwindigkeiten in denselben bestimmt, um hieraus die in jeder Sekunde abfließende Wassermenge zu finden. Zur Prüfung dieser Bestimmung wurde aber noch, vor und nach den Versuchen, eine hölzerne Querwand mit einer rechtwinklichten $11\frac{7}{16}$ Zoll breiten und $5\frac{1}{16}$ Zoll hohen Oefnung, welche sich in einer Platte von dünnem Eisenbleche befand, eingesetzt, und, nach eingetretenem Beharrungsstande, konnte aus dem beobachteten Druckwasser über der Oefnung ebenfalls die Wassermenge bestimmt werden. Sowohl die Ausmessungen der Querprofile, als auch die Prüfung mittelst der Oefnung in einer dünnen Wand, gaben eine gute Uebereinstimmung, und man fand die in jeder Sekunde durch den Kanal abfließende Wassermenge 4021 Kubikzoll = 2,327 Kubikfuß.

Zu den Versuchen mit oben offenen rechtwinklichten Oefnungen, wurden jedesmal in einer Entfernung von 240 Fuß vom Anfange des Kanals, auf die ganze Breite von 4 Fuß, eine Querwand von $1\frac{1}{8}$ Zoll dicken Bretern gesetzt, und in der Mitte dieser Wand, rechtwinklichte, scharf abgehobelte Oefnungen angebracht, deren unterster Rand bei jedem Versuche $7\frac{3}{16}$ Zoll von der Sohle des Kanals abstand. Die erste Oefnung, deren man sich bediente, war 6 Zoll breit; nachher wurde solche bis zu 10, 14, 18, $25\frac{3}{4}$ und $41\frac{3}{4}$ Zoll erweitert, und bei einem jeden Versuche zuvor der Beharrungsstand abgewartet, welcher leicht mittelst angebrachter Maßstäbe an dem unveränderlichen Stande des Wasserspiegels bemerkt werden konnte.

Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, so ist ein für allemal zu bemerken, daß die Höhe AB = KL, welche hier, um sie von der Druckhöhe (88. §.) zu unterscheiden, der



Wasserstand (Altitudo aquae, *Hauteur d'eau*) genannt wird, nicht in der Oefnung selbst, sondern allemal da gemessen werden muß, wo sich der ursprüngliche Wasserspiegel noch nicht gesenkt hat. Wäre bei K die Grenze des ungesenkten Wasserspiegels, oder derjenige Punkt, wo das Wasser eine beschleunigte Bewegung annimmt, und bei B die tiefste Stelle in der Oefnung, so ziehe man BL horizontal und KL vertikal, um den Wasserstand KL = AB zu erhalten.

Der Punkt K wurde bei den Versuchen dadurch bestimmt, daß längs dem Wasserspiegel die Elfenbeinkugel des Stromquadranten, so lange gegen die Oefnung zu, eingesenkt wurde, bis man eine merkliche Zunahme der Geschwindigkeit des Wassers verspürte, weil hiedurch der Punkt, wo das Wasser eine beschleunigte Bewegung annimmt, genauer als durch vertikale Tiefenmessung ausgemittelt werden konnte, ob es gleich beinahe unmöglich ist, sowohl die Entfernung AK, als auch die Senkung des Wasserspiegels AE, so genau anzugeben, daß sich nicht kleine Fehler einschleichen sollten.

Nachstehende Tafel enthält die Resultate, welche die sorgfältigste Ausmessung gegeben hat; nur sind die in Zollen gefundenen Zahlen, der leichtern Rechnung wegen, auf Fußmaß gebracht worden.

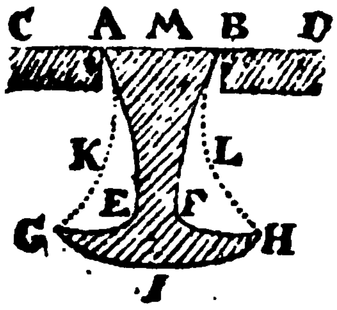
N°. d. Versuchs.	Breite der Oefnung. Fuß.	EB Höhe des Strahls in der Oefnung. Fuß.	AE Senkung des Wasserspiegels. Fuß.	AB Wasserstand. Fuß.	AK Abstand des ungesenkten Wasserspiegels. Fuß.
1	0,500	1,219	0,031	1,250	0,330
2	0,833	0,853	0,047	0,900	0,540
3	1,167	0,645	0,075	0,720	0,790
4	1,500	0,523	0,073	0,596	0,810
5	2,146	0,408	0,072	0,480	0,750
6	3,448	0,292	0,052	0,344	0,660

Aus der angegebenen Wassermenge von 2,327 Kubikfuß und der Höhe der Ueberlaßschwelle von $7\frac{3}{16}$ Zoll, läßt sich mit Hülfe dieser Tafel leicht die mittlere Geschwindigkeit des Wassers oberhalb jeder Oefnung finden.

Anmerk. Ungeachtet die Oefnung $7\frac{3}{16}$ Zoll über der Sohle des Kanals angebracht war, so fand man doch, daß kleine nahe am Boden schwimmende Körper, wenn sie nicht weit von der Oefnung ankamen, sich allmählich vom Grunde in die Höhe bewegten, und so durch die Oefnung gingen.

Die Oberfläche des Strahls in der Oefnung bildete bei allen Versuchen eine zweimal eingebogene krumme Linie, welche in der Mitte und an beiden Rändern der Oefnung ihre größte Höhe hatte, aber wegen ihrer unmerklichen Abweichung von einer geraden Linie nicht ausgemessen werden konnte.

Die Gestalt, welche der ausfließende Strahl annimmt, ist merkwürdig, weshalb die nachstehende Figur eine ungefähre Abbildung von demjenigen horizontalen Durchschnitt enthält, welcher mit der Ueberlaufsschwelle in gleicher Höhe genom-



men ist. AB ist die Breite des ausfließenden Strahls, AC, BD sind die $1\frac{1}{2}$ Zoll dicken Bohlenwände, und AEGIHFB die Grundfläche des ausfließenden Strahls, der bei E und F eine außerordentliche Zusammenziehung erleidet, sich aber bei G und H plötzlich wieder ausbreitet. Diese horizontale Grundfläche des Strahls, wird weit stärker zusammengezogen als die Oberfläche desselben, welche von oben angesehen ungefähr die Gestalt wie AKGIHLB hat, und wie ein Mantel überhängt.

105. §.

Um die Versuche mit dem im 103. §. gefundenen allgemeinen Ausdruck $M = \frac{2}{3} \alpha b h \sqrt{h}$ zu vergleichen, würde erfordert, daß die Geschwindigkeit des zufließenden Wassers so gering wäre, daß solche im Punkte des ungesenkten Wasserspiegels $= 0$ angenommen werden könnte, welches zwar nicht mit aller Schärfe zutrift, aber doch wegen des geringen Einflusses auf die Rechnung, hier bei Seite gesetzt werden kann.

Stellt man sich vor, daß der ausfließende Wasserstrahl nicht nur eine Contraction an den Rändern der Oefnung, sondern auch in seiner Oberfläche erleidet, so lassen sich zwar diese an sich sehr verschiedenen Zusammenziehungen nicht als einerlei ansehen, man könnte aber, ohne den Einfluß einer jeden auf die Wassermenge besonders zu bestimmen, sich damit begnügen, die Größe des Coeffizienten α aus den Versuchen zu bestimmen. Berechnet man die Werthe von

$$\frac{M}{b h \sqrt{h}} = \frac{2}{3} \alpha$$

so entstehet die folgende Tafel.

N°.	b	h	M	$\frac{2}{3}\alpha$
1	0,500	1,250	2,327	3,330
2	0,833	0,900	2,327	3,271
3	1,167	0,720	2,327	3,334
4	1,500	0,596	2,327	3,372
5	2,146	0,480	2,327	3,261
6	3,448	0,344	2,327	3,337

Nimmt man als einen Mittelwerth $\alpha = 5$ also

$$\tfrac{2}{3}\,\alpha = 3{,}333 = \tfrac{10}{3} \text{ so wird}$$

$$M = \tfrac{2}{3} \cdot 5 \cdot bh\sqrt{h} = \tfrac{10}{3}\, bh\sqrt{h}$$

und man sieht daraus, daß sich die Contraction eben so wie 100. §. N. VI. bei Schutzöfnungen in Freigerinnen ohne Flügelwände, in Rechnung bringen läßt.

Aus den du Buatschen Versuchen (1ster Band 143. §. meiner Zusätze) folgt $\frac{2}{3}\,\alpha = 3{,}3014$, welches nicht viel von obiger Bestimmung abweicht, so daß der hier angenommene Werth so lange in der Ausübung beibehalten werden kann, bis noch mannichfaltigere Versuche und eine erschöpfende Theorie die noch fehlenden Modifikationen angeben.

106. §.

Es läßt sich daher allgemein die Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3}\,\alpha bh\sqrt{h}$$

setzen, nur muß in jedem besondern Falle der Coefficient α nach 100. §. bestimmt werden.

Für Oefnungen in der Wand eines Behälters ohne Flügelwände ist $\alpha = 5$, also

$$M = \tfrac{10}{3}\, bh\sqrt{h}.$$

Wenn sich die Oefnung in einem Freigerinne mit Flügelwänden befindet, so ist $\alpha = 6{,}76$, also $\frac{2}{3}\,\alpha = 4{,}506$ oder sehr nahe $= \frac{9}{2}$, daher

$$M = \tfrac{9}{2}\, bh\sqrt{h}.$$

Beispiel. An einem See, in welchem die Oberfläche des Wassers als stillstehend angenommen werden kann, befindet sich eine oben offene rechtwinklichte Ausflußöfnung ohne Flügelwände, durch welche das Wasser frei abfließen kann. Die Breite der Oefnung ist 3 Fuß, und die Höhe des Wasserstandes 2 Fuß. Wie viel Wasser wird in jeder Sekunde abfließen, wenn dieser Wasserstand unverändert bleibt?

Hier ist $b = 3$, $h = 2$ daher

$M = \frac{10}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 28{,}28$ Kubikfuß.

107. §.

Weil $\frac{2}{3}\,\alpha b h \sqrt{h} = M$, so ist

$$h\sqrt{h} = \frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b} \text{ oder quadrirt}$$

$$h^3 = \left[\frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right]^2 \text{ daher}$$

findet man allgemein den Wasserstand oder die Höhe des ungesenkten Wasserspiegels über dem Fachbaum

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{M}{\frac{2}{3}\alpha b}\right]^2}$$

oder wenn man sich der Logarithmen bedient

$$\text{Log. } h = \frac{2}{3}\left[\text{Log. } M - \text{Log. } \left(\tfrac{2}{3}\alpha b\right)\right]$$

Bei Ueberfällen in der Wand eines Behälters ist $\alpha = 5$, daher

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{3\,M}{10 \cdot b}\right]^2}$$

Beispiel. Ein See hat in jeder Sekunde 200 Kubikfuß Wasser Zufluß. Wie tief wird der Fachbaum eines 6 Fuß breiten Ueberfalls unter dem horizontalen Wasserspiegel angelegt werden müssen, damit in jeder Sekunde diese Wassermenge abfließt?

Hier ist $M = 200$, $b = 6$, man findet daher die gesuchte Tiefe oder den Wasserstand

$$h = \sqrt[3]{\left[\frac{3 \cdot 200}{10 \cdot 6}\right]^2}$$

Hier ist $\frac{3 \cdot 200}{10 \cdot 6} = 10$, also die gesuchte Tiefe des Fachbaums unter dem horizontalen Wasserspiegel

$$h = \sqrt[3]{100} = 4{,}64 \text{ Fuß.}$$

108. §.

Nach 103. §. findet man ganz allgemein die Breite des Ueberfalls

$$b = \frac{M}{\frac{2}{3} . a h \sqrt{h}}$$

oder wenn $a = 5$ gesetzt wird

$$b = \frac{3M}{10 . h\sqrt{h}}$$

1. Beispiel. In der Wand eines Wasserbehälters, in welchem man die Oberfläche des Wassers als stehend ansehen kann, soll eine oben offene rechtwinklichte Ausflußöfnung so angelegt werden, daß ihr unterer Rand 4 Fuß tief unter dem Wasserspiegel liegt. Wie breit wird man solche machen müssen, damit in jeder Sekunde 150 Kubikfuß Wasser abfließen?

Hier ist $M = 150$, $h = 4$ daher die erforderliche Breite

$$b = \frac{3 . 150}{10 . 4\sqrt{4}} = 5{,}62 \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Bei dem Ausflusse eines Sees, dessen Oberfläche man als horizontal annehmen kann, befindet sich ein Ueberfall der 3 Fuß breit ist und das Wasser im See auf einem Wasserstande von 5 Fuß Höhe erhält. Weil aber hiedurch die umliegende Gegend zu sehr überschwemmt wird, so verlangt man, daß der Ueberfall bei unveränderter Lage des Fachbaums so viel erweitert werden soll, daß das Wasser bei eben dem Zuflusse nicht höher als 4 Fuß hoch stehen bleibe. Wie breit muß alsdann der Ueberfall seyn?

Man setze die gesuchte Breite $= b$, so muß, da die abfließende Wassermenge in beiden Fällen dieselbe bleibt, einmal

$$M = \tfrac{2}{3}a . 3 . 5\sqrt{5} \text{ und auch}$$
$$M = \tfrac{2}{3}a . b . 4\sqrt{4} \text{ seyn.}$$

Hieraus erhält man

$$\tfrac{2}{3}a . b . 4\sqrt{4} = \tfrac{2}{3}a . 3 . 5\sqrt{5} \text{ oder}$$
$$b . 4\sqrt{4} = 3 . 5\sqrt{5} \text{ daher}$$

die gesuchte Breite

$$b = \frac{3 . 5\sqrt{5}}{4\sqrt{4}} = 4{,}19 \text{ Fuß.}$$

Anmerk. Eine weitere Ausführung dieser Untersuchungen für Oefnungen von mancherlei Gestalt, welche bis an die Oberfläche des Wassers reichen, findet man in

A. G. Kästner angef. Hydrodynamik, im 1. Abschnitt.
K. C. Langsdorf Lehrbuch der Hydraulik. Altenburg 1794, im 7. Kapitel.
Bossût angef. Hydrodynamik, 1. Bd. 2. Abschn. 2. Kap.
Prony, Neue Architectura Hydraulika, a. d. Franz. von K. C. Langsdorf. Frankf. am M. 1794. 1. Th. 4. Absch.

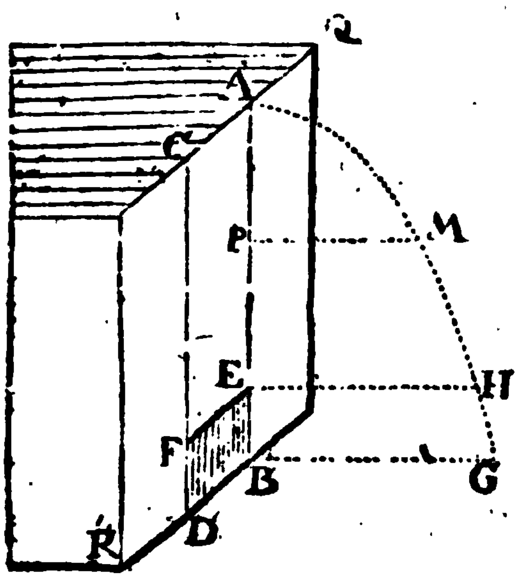
Wäre die Oberfläche des Wassers oberhalb der Oefnung nicht so groß, daß man solche als stillstehend ansehen könnte, so findet man die hieher gehörigen Untersuchungen im achten Kapitel.

Viertes Kapitel.

Vom Ausflusse aus Behältern mit Seitenöfnungen von beträchtlicher Größe, bei unveränderter Druckhöhe.

109. §.

Befindet sich in der vertikalen Seitenwand QR eines Behälters, eine rechtwinklichte Oefnung BDEF, und man bezeichnet durch



AB = h den Wasserstand,
BE = e die Höhe der Oefnung,
EF = b die Breite der Oefnung, so ist
AE = h — e die Höhe des Druckwassers.

Um nun die Wassermenge zu finden, welche in jeder Sekunde durch die Oefnung BDEF abfließt, vorausgesetzt, daß man den Wasserspiegel im Behälter als stillstehend ansieht, so kann man sich vorstellen, als wenn diese Oefnung in gleicher Breite bis zum Was-

serspiegel AC vergrößert wäre; alsdann ist die Wassermenge, welche durch ABCD ausläuft, wenn der Wasserspiegel bis an den Rand AC stehet (103. §.)

$$= \tfrac{2}{3}\alpha b h \sqrt{h}.$$

Wäre die Oefnung BDEF verschlossen, so würde auf eine ähnliche Art, aus der Oefnung ACEF die Wassermenge

$$= \tfrac{2}{3}\alpha b (h-e) \sqrt{(h-e)}$$

ablaufen, daher bleibt, wenn man letztere von der erstern abzieht, die Wassermenge M übrig, welche in jeder Sekunde durch die Oefnung BDEF abfließt, oder

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha \left[h\sqrt{h} - (h-e)\sqrt{(h-e)}\right] b$$

wo α nach Umständen aus 100. §. bestimmt werden muß.

Bei einer Schutzöfnung in einem Freigerinne mit Flügelwänden ist $\alpha = 6{,}76$ daher

$$\tfrac{2}{3}\alpha = 4{,}507.$$

Bei einer Oefnung in einer dünnen Wand ist $\alpha = 4{,}89$ daher

$$\tfrac{2}{3}\alpha = 3{,}26.$$

Beispiel. An einer Freischleuse befindet sich eine 3 Fuß breite Oefnung und ein 4 Fuß hoher Wasserstand. Das Schutzbrett ist einen Fuß hoch gezogen; man fragt, wie viel Wasser in jeder Sekunde abfließen wird.

Hier ist $h = 4$, $e = 1$, $b = 3$; daher die gesuchte Wassermenge

$$M = 4{,}507\,[4\sqrt{4} - 3\sqrt{3}]\,3$$
$$= 37{,}911 \text{ Kubikfuß.}$$

110. §.

In den meisten Fällen der Ausübung kann man sich der weit einfacheren Formeln des zweiten Kapitels bedienen, indem man voraussetzt, daß die der mittlern Geschwindigkeit zugehörige Höhe so groß sei, als die lothrechte Entfernung des Schwerpunkts der Oefnung von dem Wasserspiegel.

Für das vorige Beispiel erhält man nach 101. §. $h = 3\frac{1}{2}$ und $e = 3$

$$M = 6{,}76 \cdot 3 \cdot \sqrt{\tfrac{7}{2}} = 37{,}940 \text{ Kubikfuß.}$$

Der Unterschied ist also $37{,}940 - 37{,}911 = 0{,}029$ Kubikfuß, und so geringe, daß man in den meisten Fällen, ohne Furcht einen beträchtlichen Fehler zu begehen, nach dieser Formel rechnen kann.

Will man untersuchen, wie viel der größtmögliche Fehler beträgt, wenn man die Ausflußmenge nach 101. §. berechnet, so setze man $e = h$, welches der nachtheiligste Fall ist, der sich denken läßt. Hienach hat man die Wassermenge, nach dem vorigen §. oder nach 103 §.

$$= \tfrac{2}{3}\alpha b h \sqrt{h}$$

nach der Formel im zweiten Kapitel 101. §.

$$= \alpha b h \sqrt{\tfrac{1}{2} h}$$

beide Wassermengen verhalten sich wie $\frac{2}{3} : \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder wie

$$0{,}666666 : 0{,}707106$$

woraus folgt, daß der größtmögliche Fehler nie $\frac{1}{16}$ der ganzen Wassermenge seyn kann, wenn man nach der letzten Formel rechnet, und immer desto kleiner werden muß, je größer die Höhe des Wasserstandes gegen die Höhe der Oefnung ist.

111. §.

Setzt man die hier eingeführte Bezeichnung statt der Werthe (101. §.), so erhält man einen zweiten Ausdruck für die Wassermenge bei einer rechtwinklichten Oefnung.

$$\text{I.} \quad M = \alpha b e \sqrt{(h - \tfrac{1}{2} e)}$$

und daraus die Breite der Oefnung

$$\text{II.} \quad b = \frac{M}{\alpha \cdot e \sqrt{(h - \frac{1}{2} e)}}$$

wo für die Schutzöfnungen in einem Freigerinne mit Flügelwänden $\frac{1}{\alpha} = 0{,}148$ ist.

Aus vorstehender Gleichung läßt sich auch der Werth von h leicht entwickeln; denn

$$\alpha b e \sqrt{(h - \tfrac{1}{2} e)} = M \text{ oder quadrirt}$$

$$\alpha^2 b^2 e^2 (h - \tfrac{1}{2} e) = M^2 \text{ daher}$$

$$h - \tfrac{1}{2} e = \frac{M^2}{\alpha^2 b^2 e^2} \text{ folglich}$$

III. Der Wasserstand

$$h = \frac{1}{\alpha^2} \frac{M^2}{b^2 e^2} + \tfrac{1}{2} e$$

wo für Schutzöfnungen in Freigerinnen mit Flügelwänden $\frac{1}{a^2} = 0{,}0219$ ist.

Beispiel. An einem See, welcher in jeder Sekunde 18 Kubikfuß Wasser Zufluß hat, soll in einer Freischleuse eine 2 Fuß breite und 1 Fuß hohe Ausflußöfnung angelegt werden; wie hoch wird das Wasser über dem Fachbaume stehen, damit die abfließende Wassermenge dem gegebenen Zuflusse gleich sei?

$M = 18$, $e = 1$, $b = 2$ daher der erforderliche Wasserstand

$$h = \frac{0{,}0219 \cdot 18^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \tfrac{1}{2} = 2{,}27 \text{ Fuß.}$$

112. §.

Wenn man h aus 109. §. bestimmt hätte, so wäre dadurch ein weitläuftiger Ausdruck entstanden; dagegen läßt sich die Höhe e nicht gut nach dem vorigen §. bestimmen, weil man alsdann eine kubische Gleichung erhält, weshalb es besser ist, hiezu die Formel 109. §. zu wählen. Nun ist

$$\tfrac{2}{3}\alpha\,[h\sqrt{h} - (h-e)\sqrt{(h-e)}]\,b = M \text{ oder}$$

$$h\sqrt{h} - (h-e)\sqrt{(h-e)} = \frac{M}{\tfrac{2}{3}\alpha b} \text{ oder}$$

$$h^{\frac{3}{2}} - (h-e)^{\frac{3}{2}} = \frac{M}{\tfrac{2}{3}\alpha b} \text{ also}$$

$$h^{\frac{3}{2}} - \frac{M}{\tfrac{2}{3}\alpha b} = (h-e)^{\frac{3}{2}} \text{ und}$$

wenn man auf beiden Seiten die $\tfrac{2}{3}$ Potenz nimmt

$$\left(h^{\frac{3}{2}} - \frac{M}{\tfrac{2}{3}\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}} = (h-e)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}} = h - e$$

folglich die Höhe der Oefnung

$$e = h - \sqrt[3]{\left(h\sqrt{h} - \frac{M}{\tfrac{2}{3}\alpha b}\right)^2}$$

Für Schutzöfnungen in Freigerinnen mit Flügelwänden ist $\tfrac{2}{3}\alpha = 4{,}507$.

Beispiel. Eine Freischleuse, welche eine 2 Fuß breite Oefnung hat, kann durch eine Fallschütze geschlossen werden. Wie hoch muß man die Schütze

ziehen, damit der Wasserstand auf dem Fachbaume eine gegebene Höhe von 5 Fuß beträgt, und für einen Zufluß von 20 Kubikfuß, eine hinlänglich große Oefnung entstehe?

$M = 20$, $b = 2$, $h = 5$, daher ist die Erhöhung des Schutzbretts

$$e = 5 - \sqrt[3]{\left(5\sqrt{5} - \frac{20}{4{,}507 \cdot 2}\right)^2} = 5 - 4{,}314$$

$$= 0{,}686 \text{ Fuß} = 8{,}23 \text{ Zoll.}$$

113. §.

Wenn die Ausflußöfnung nicht die bisher vorausgesetzte Gestalt eines Rechtecks hat, so wird man sich dennoch in den meisten Fällen der 110. §. angeführten Regel bedienen können. Bei Ausflußöfnungen in der schiefen Wand eines Gefäßes oder bei schiefen Ausflußöfnungen, kommt die Größe dieser Oefnung eben so wie bei den vertikalen in Rechnung; nur darf man alsdann die Druckhöhe nicht längs der schiefen Wand des Gefäßes messen, sondern es wird, wie bisher, nur der lothrechte Abstand vom Wasserspiegel als Druckhöhe in Rechnung gebracht. Besondere Untersuchungen über Oefnungen von mancherlei Gestalt, findet man in den am Ende des dritten Kapitels angeführten Schriftstellern.

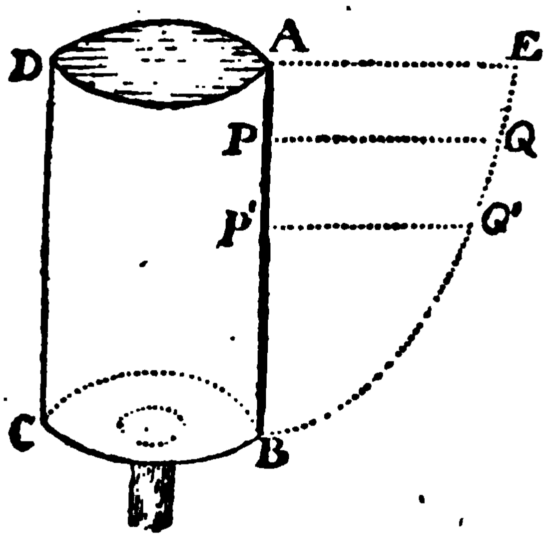
Fünftes Kapitel.

Vom Ausflusse aus Behältern, die keinen Zufluß erhalten.

---

114. §.

Ein prismatisches Gefäß ABCD sei mit Wasser angefüllt, welches durch eine Oeffnung im Boden abfließt. Leert sich dieses Gefäß aus, ohne Zufluß zu erhalten, so wird anfänglich dem ausströmenden Wasser die Geschwindigkeitshöhe AB; wenn der Spiegel bis P gesunken ist, die Geschwindigkeitshöhe PB u. s. w. zugehören. Auf



AB senkrecht setze man die Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser ausfließt dergestalt, daß die

zum Wasserstande AB gehörige Geschwindigk. = AE,
zum Wasserstande PB gehörige Geschwindigk. = PQ,
zum Wasserstande P'B gehörige Geschwindigk. = P'Q'

u. s. w. angenommen wird, so ist EQQ'B eine Parabel, weil sich die Abscissen BP, BP' rc. eben so, wie die Quadrate der Ordinaten PQ, PQ' rc. verhalten (89. §.). Es nehmen daher die Geschwindigkeiten des Wassers bei einem Gefäße, welches sich ausleert, in eben dem Verhältnisse ab, wie die Geschwindigkeiten eines steigenden Körpers. Weil nun in derjenigen Zeit, darin ein steigender Körper mit einer bestimmten Geschwindigkeit seine größte Höhe erreicht hat, oder bis seine Geschwindigkeit = 0 wird, ein anderer Körper der fortwährend die anfängliche Geschwindigkeit behält, einen doppelt so großen Raum durchläuft (20. und 11. §.), so wird daher aus ähnlichen Gründen in der Zeit, in der sich das prismatische Gefäß ausleert, bei unveränderlicher anfänglichen Geschwin-

digkeit, oder bei voll erhaltenem Gefäße, doppelt so viel Wasser auslaufen.

Der Inhalt vom horizontalen Querschnitt des Gefäßes
sei A, der Inhalt der Oefnung $= a$ und die anfängliche A
Druckhöhe $AB = h$, so ist der Inhalt des Wassers im a
Gefäße $= A.h$. Ist nun t die Zeit, in welcher sich das h
prismatische Gefäß ausleert, so muß in dieser Zeit, bei ei- t
nem stets voll erhaltenen Gefäße, die Wassermenge $2Ah$
auslaufen. Dies gibt

$$2Ah = \alpha\sqrt{h} \,.\, a \,.\, t \quad \text{daher}$$

die Zeit der Ausleerung (Tempus evacuationis, *Tems de l'écoulement*)

$$t = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h}}{a}$$

115. §.

Wäre das Wasser im Gefäße in der Zeit t' um die t'
Tiefe x gesunken, so erhält man die Zeit $t - t'$, in welcher x
das übrige Wasser von der Höhe $h - x$ ausläuft, wie vorher

$$t - t' = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h - x}}{a} \quad \text{oder}$$

$$t' = t - \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{(h - x)}}{a} = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h}}{a} - \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{(h - x)}}{a}$$

daher die Zeit, in welcher der Wasserspiegel um die Tiefe x sinkt,

$$t' = \frac{2}{\alpha} \left[\sqrt{h} - \sqrt{(h - x)}\right] \frac{A}{a} \quad {}^{*)}.$$

---

*) Die vorstehenden allgemeinen Ausdrücke erhält man mittelst der höhern Analysis, mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung, folgendergestalt. Wenn der Wasserspiegel in der Zeit dt' um die Tiefe dx sinkt, so ist die in der Zeit dt' gesunkene Wassermenge $= Adx$, und weil eben so viel Wasser in dieser Zeit auslaufen muß, so ist

$$A\,dx = \alpha a \sqrt{(h - x)} \,.\, dt' \quad \text{also}$$

$$dt' = \frac{A}{\alpha a} \frac{dx}{\sqrt{(h - x)}}$$

Leert sich das Gefäß ganz aus, so entstehet, wenn der Wasserspiegel der Ausflußöfnung nahe kömmt, oberhalb derselben eine Art von Trichter, Strudel oder Wirbel in dem Wasser, welchen die Luft ausfüllt, wodurch der Ausfluß zum Theil verhindert wird. Wollte man dieses vermeiden, so müßte man ein sehr dünnes Brettchen auf den Wasserspiegel legen.

1. Beispiel. An einem prismatischen Behälter, dessen horizontaler Querschnitt 100 □ Fuß beträgt, befindet sich, in einer Tiefe von 9 Fuß unter dem Wasserspiegel, eine 3 □ Zoll große Oefnung mit einer kurzen Ansatzröhre; in wie viel Zeit wird das Wasser 5 Fuß sinken, wenn der Behälter keinen Zufluß erhält?

$A = 100$, $a = 3$ □ Zoll $= \frac{1}{48}$ □ Fuß, $h = 9$, $x = 5$,

und nach (100. §.) $\frac{2}{\alpha} = 0{,}31$, daher die Zeit, in welcher sich der Behälter 5 Fuß ausleert,

$$t' = 0{,}31 \left[\sqrt{9} - \sqrt{4}\right] \frac{100}{\frac{1}{48}} = 1488 \text{ Sekunden.}$$
$$= 24 \text{ Minut. } 48 \text{ Sek.}$$

Die ausgelaufene Wassermenge ist $=$
$100 \cdot 5 = 500$ Kubikfuß.

Für die Zeit, in welcher sich der ganze Behälter ausleert, findet man

$$t = 0{,}31 \frac{100\sqrt{9}}{\frac{1}{48}} = 4464 \text{ Sekunden.}$$
$$= 74 \text{ Minuten } 24 \text{ Sekunden.}$$

Um leichter zu integriren, setze man $h - x = z$ so wird das Integral

$$t' = \frac{A}{\alpha a} \int - z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{A}{\alpha a} \left[\text{Const} - 2\sqrt{z}\right]$$
$$= \frac{A}{\alpha a} \left[\text{Const} - 2\sqrt{(h-x)}\right]$$

Für $t' = 0$ wird $x = 0$ also $\text{Const} = 2\sqrt{h}$; man findet daher

$$t' = \frac{2}{\alpha} \left[\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}\right] \frac{A}{a}.$$

Für $x = h$ wird $t = t$ daher

$$t = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h}}{a}.$$

2. Beispiel. An einem Sammelteiche, dessen Oberfläche 2000 □ Fuß groß ist, befindet sich in einem Grundstocke, 12 Fuß unter dem Wasserspiegel, eine 6 □ Zoll große Oefnung. Wie viel wird dieser Spiegel sinken, wenn man das Wasser eine Stunde lang aus dem Teiche, welchen man prismatisch annimmt, laufen läßt?

Aus der vorstehenden Gleichung erhält man

$$\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)} = \frac{\alpha}{2}\,\frac{t'a}{A} \text{ oder,}$$

$$\sqrt{h} - \frac{\alpha}{2}\,\frac{t'a}{A} = \sqrt{(h-x)}, \text{ quadrirt}$$

$$h - \alpha\,\frac{t'a\sqrt{h}}{A} + \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{t'a}{A}\right)^2 = h - x, \text{ daher}$$

$$x = \alpha\,\frac{t'a}{A}\left(\sqrt{h} - \frac{\alpha}{4}\,\frac{t'a}{A}\right).$$

Hienach ist $A = 2000$, $a = 6$ □ Zoll $= \frac{1}{24}$ □ Fuß, $h = 12$, $t' = 3600$ Sekunden, daher die Tiefe, um welche sich der Wasserspiegel senkt

$$x = 6{,}42 \cdot \frac{3600}{2000 \cdot 24}\left(\sqrt{12} - \frac{6{,}42}{4} \cdot \frac{3600}{2000 \cdot 24}\right) = 1{,}61 \text{ F.}$$

116. §.

Wenn sich an einem prismatischen Behälter oben eine offene rechtwinklichte Oefnung in einer vertikalen Wand befindet, so läßt sich die Zeit, in welcher der Wasserspiegel um eine bestimmte Tiefe sinkt, nur mittelst der höhern Analysis finden. Bezeichnet

A den horizontalen Querschnitt des Behälters,
h die Höhe des Wasserstandes,
b die Breite der Oefnung,
x die Tiefe, welche der Wasserspiegel sinkt,
t' die Zeit, in welcher der Wasserspiegel um die Tiefe x gesunken ist,

so findet man *)

$$t' = \frac{3}{\alpha}\,\frac{A}{b} \cdot \frac{h\sqrt{(h-x)} - (h-x)\sqrt{h}}{h\,(h-x)}$$

*) Ist der Wasserspiegel in der Zeit t' um die Tiefe x gesunken, so wird er in der nächsten unendlich kleinen Zeit dt' um die

Beispiel. Ein prismatischer Behälter, welcher keinen Zufluß erhält, hat 70000 □ Fuß Oberfläche. In einer der Seitenwände desselben befindet sich eine oben offene 2 Fuß breite rechtwinklichte Oefnung, deren unterer Rand oder Fachbaum 5 Fuß tief unter dem Wasserspiegel liegt. Man fragt, in wie viel Zeit wird sich der Wasserspiegel 4 Fuß tief senken?

Tiefe dx sinken. Aber die in der Zeit dt' ausfließende Wassermenge ist bei der Wasserhöhe $h - x$ (103. §.)

$$= \tfrac{2}{3}\,\alpha\, b\,(h - x)^{\frac{3}{2}} \,.\, dt'$$

welche der gesunkenen Wassermenge $A\,dx$ gleich seyn muß. Hienach erhält man

$$dt' = \frac{3\,A}{2\,\alpha\, b}\,(h - x)^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

und wenn man $h - x = z$ setzt und integrirt, so wird

$$t' = \frac{3\,A}{2\,\alpha\, b}\int -\, z^{-\frac{3}{2}}\,dz = \frac{3\,A}{2\,\alpha\, b}\,.\,2\,z^{-\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$

Für $t = 0$ wird $x = 0$ also $z = h$; es ist daher

$$\text{Const.} = -\,\frac{3}{\alpha}\,\frac{A}{b}\,h^{-\frac{1}{2}} \text{ folglich}$$

$$t' = \frac{3}{\alpha}\,\frac{A}{b}\left[\frac{1}{\sqrt{(h - x)}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right]$$

oder wenn man mit $h\,(h - x)$ multiplizirt und dividirt

$$t' = \frac{3}{\alpha}\,\frac{A}{b}\,\frac{h\sqrt{(h - x)} - (h - x)\sqrt{h}}{h\,(h - x)}\,.$$

Für $x = h$ muß sich das Gefäß ausleeren, und man findet $t' = \infty$, obgleich bei horizontalen Oefnungen, t' für diesen Fall einen angeblichen Werth erhält (115. §.). Dieses darf aber um so weniger befremden, weil bei vertikalen Oefnungen die letzte Wasserschicht durch eine unendlich kleine Oefnung abfließen muß, dahingegen horizontale Oefnungen immer einerlei Größe in Absicht des ausfließenden Wassers behalten. Wenn also die Frage von der gänzlichen Entwässerung eines Behälters vorkommt, so darf man nur, bei dem Gebrauche der vorstehenden Formel, die Höhe des abzulassenden Wassers um einen kleinen Theil geringer als die Höhe des ganzen Wasserstandes annehmen, weil ohnedies, wenn der See beinahe ganz abgelassen ist, das Wasser nur tropfenweise abfließen wird.

Hier ist $A = 70000$, $b = 2$, $k = 5$, $x = 4$ und weil man hier wie 106. §. $\alpha = 5$ setzen kann, so findet man die gesuchte Zeit

$$t' = \frac{3 \cdot 70000}{5 \cdot 2} \cdot \frac{5\sqrt{(5-4)} - (5-4)\sqrt{5}}{5(5-4)}$$

$= 11722$ Sekunden

$= 3$ Stunden 15 Minuten 22 Sekunden.

Kann man annehmen, daß sich die Gestalt des Behälters mit einem umgekehrten Paraboloid vergleichen läßt, so wird der Kalkul weitläuftiger, und ist von mir in den Anmerkungen zum ersten Bande der du Buatschen Hydraulik, S. 270 u. f. ausgeführt worden. Noch schwieriger wird die Untersuchung, wenn man den Behälter als eine umgekehrte abgekürzte Pyramide ansieht, und dabei annimmt, daß noch überdies ein gleichförmiger Zufluß Statt finde. Weil es zu weitläuftig wäre, dieses hier näher auseinander zu setzen, so muß ich deshalb auf eine Abhandlung von mir verweisen, welche sich in der

Sammlung nützlicher Aufsätze und Nachrichten, die Baukunst betreffend, Jahrgang 1797, 1ster Band, Berlin, Seite 79 u. f.

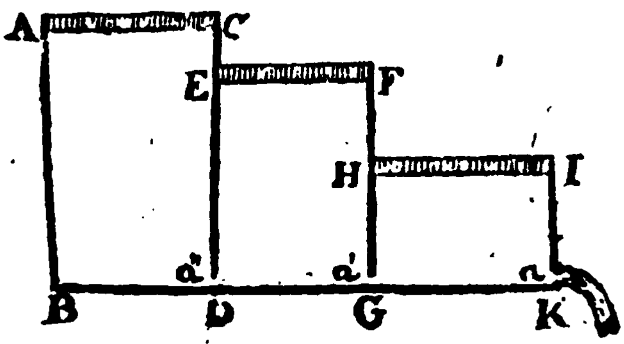
befindet.

Sechstes Kapitel.

Vom Ausflusse aus Behältern, welche zusammengesetzt, oder durch Scheidewände abgetheilt sind.

117. §.

Drei oben offene Gefäße AD, EG, HK von beträchtlicher Weite sind dergestalt verbunden, daß sie nur durch die vertikalen Scheidewände (Diaphragmata verticalia) CD FG von einander getrennt werden, aber



mittelst der Verbindungsöffnungen bei G, D zusammenhän-gen, erhalten bei AC eben so viel Zufluß, als durch die Ausflußöffnung bei K abfließt. Wenn sich alles im Beharrungsstande befindet, und die Wasserspiegel bei A, E, H einen unveränderlichen Stand angenommen haben, so setze man

den Inhalt der Oefnung bei K = a:
die Geschwindigkeit des Wassers in dieser Oefnung = c;
eben diese Größen bei G = a′ und c′
bei D = a″ und c″.

Ferner sei die vertikale Entfernung des Wasserspiegels AC von der Ausflußöfnung A, oder die gesammte Druckhöhe = h; die Differenz der Wasserspiegel, CE = x, FH = y und die Höhe IK = z.

Gegen die Oefnung bei D drückt die Wassersäule CD, wegen des Gegendrucks von der Höhe ED, kann aber nur die Höhe EC = x Geschwindigkeit erzeugen, es sind daher x, y, z die Geschwindigkeitshöhen für den Ausfluß in den Oefnungen a″, a′, a, weil den Erfahrungen des Hrn. du Buat gemäß, das Wasser mit der ihm zugehörigen Druckhöhe aus einer Abtheilung in die andere eben so ausfließt, als wenn sich die Oefnung in die Luft ausmündete.

Für die Oefnung a ist die Geschwindigkeitshöhe (100. §.) $z = \frac{c^2}{\alpha^2}$, oder wenn man die in jeder Sekunde ausfließende Wassermenge M setzt, so ist $c = \frac{M}{a}$, also

$$z = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{M}{a}\right)^2$$

und weil $c' = \frac{M}{a'}$ so ist die Geschwindigkeitshöhe

$$y = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{M}{a'}\right)^2$$

eben so weil $c'' = \frac{M}{a''}$ so ist

$$x = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{M}{a''}\right)^2$$

Aber $h = x + y + z$, daher findet man die gesammte Druckhöhe

$$h = \frac{1}{\alpha^2}\frac{M^2}{a^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2\right]$$

oder

$$h = \frac{1}{\alpha^2} M^2 \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a'}\right)^2 + \left(\frac{1}{a''}\right)^2\right]$$

Hieraus ergibt sich die Wassermenge

$$M = \frac{\alpha\, a\sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2\right]}} \text{ oder}$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{h}}{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a'}\right)^2 + \left(\frac{1}{a''}\right)^2\right]}}$$

Für mehr als drei Oefnungen läßt sich leicht einsehen, wie man h und M finden kann.

Bei zwei Oefnungen a, a' ist die Druckhöhe

$$h = \frac{1}{\alpha^2}\frac{M^2}{a^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2\right]$$

und die Wassermenge

$$M = \frac{\alpha\, a\sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2\right]}}$$

Wenn alle Oefnungen gleich groß sind, also $a = a' = a''$ ist, so erhält man

für zwei Oefnungen

$$h = 2\,\frac{1}{\alpha^2}\frac{M^2}{a^2}$$

$$M = \alpha\,\frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{2}}$$

für drei Oefnungen

$$h = 3\,\frac{1}{\alpha^2}\frac{M^2}{a^2}$$

$$M = \alpha\,\frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{3}}$$

Beispiel. Ein Behälter, welcher durch zwei vertikale Scheidewände abgetheilt ist, hat in der ersten Scheidewand eine Oefnung von 4, in der zweiten eine von 5, und eine Ausflußöfnung von 2 □ Zoll.

Wie viel Zufluß muß derselbe erhalten, damit das Wasser in der ersten Abtheilung 4 Fuß hoch über der Ausflußöfnung stehe?

Hier ist $h = 4$, $a = 2$ □ Zoll $= \frac{1}{72}$ □ Fuß, $a' = 3$ □ Zoll $= \frac{1}{48}$ □ Fuß, $a'' = 4$ □ Zoll $= \frac{1}{36}$ □ Fuß. Befinden sich nun die Oefnungen in dünnen Wänden, so ist (100. §.) $\alpha = 4{,}89$, folglich der gesuchte Zufluß oder die Wassermenge

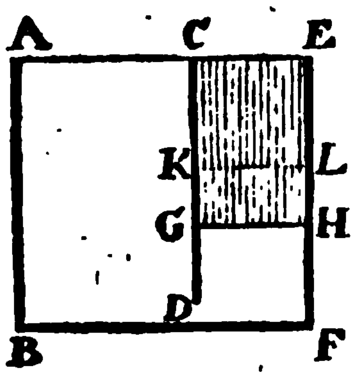
$$M = \frac{4{,}89 \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{[72^2 + 48^2 + 36^2]}} = 0{,}105 \text{ Kubikfuß.}$$

Die Höhe des Wassers in der zweiten Abtheilung über dem Mittelpunkte der ersten Verbindungsöfnung findet man

$$h - x = 4 - 0{,}0417 \left(\frac{0{,}105}{\frac{1}{36}}\right)^2 = 3{,}404 \text{ Fuß.}$$

Auf ähnliche Art kann man die übrigen Wasserhöhen finden.

118. §.



Sind zwei Gefäße ABCD und CDEF mittelst einer Verbindungsöfnung bei D zusammengesetzt, befindet sich im zweiten Gefäße keine Ausflußöfnung, und wird das Wasser im ersten Gefäße unveränderlich auf der Höhe CD erhalten, so muß sich das zweite Gefäß CF nach und nach anfüllen. Die Zeit der Anfüllung kann mit Hülfe des vorigen Kapitels leicht bestimmt werden, denn auf eine ähnliche Art wie die Gesetze beim Steigen der Körper mit dem freien Falle übereinkommen, eben so muß auch bei unverändertem Wasserstande eines Gefäßes, zur Anfüllung eines zweiten mittelst einer Verbindungsöfnung, eben so viel Zeit erfordert werden, als wenn sich das zweite Gefäß durch eine Oefnung, die der Verbindungsöfnung gleich ist, frei ausleerte, weil die Druckhöhe der Verbindungsöfnung eben so, wie bei dem Ausleeren eines Gefäßes abnimmt. Es können daher auch die Formeln des 114. und 115. §. hier angewandt werden, nur daß, was daselbst für das Sinken gilt, hier vom Steigen verstanden werden muß. Ist daher

A der Inhalt vom horizontalen Querschnitte des Gefäßes CF;
a der Inhalt der Verbindungsöfnung bei D;
h die beständige Druckhöhe CD im Gefäße AD

so findet man die Zeit t, in welcher das zweite Gefäß auf die ganze Höhe CD = h angefüllt wird, oder

$$t = \frac{2}{\alpha} \frac{A\sqrt{h}}{a}$$

Die Zeit t', in welcher das Wasser auf die Höhe DG = h' steigt, ist alsdann

$$t' = \frac{2A}{\alpha a} [\sqrt{h} - \sqrt{(h - h')}]$$

und die Zeit t'', in der das Wasser auf irgend eine Höhe GK = y steigt,

$$t'' = \frac{2A}{\alpha a} [\sqrt{(h - h')} - \sqrt{(h - h' - y)}] \text{ *)}$$

119. §.

Die Zeit, welche zum Anfüllen und Ablassen der Schleusenkammer erfordert wird, kann um so leichter bestimmt werden, da die Voraussetzung, daß der Wasserstand vor der Verbindungsöfnung unverändert bleibt, bei der Anwendung auf Schleusen zulässig ist, weil durch die

---

*) Mittelst der höhern Analysis erhält man diese Ausdrücke auf folgende Art. Wenn der Wasserspiegel in der Zeit dt'' auf die Höhe dy steigt, so ist die gestiegene Wassermenge = Ady, und weil eben so viel Wasser durch die Verbindungsöfnung eingetreten ist, so erhält man

$$A dy = \alpha a \sqrt{(h - h' - y)} \,.\, dt'' \text{ also}$$

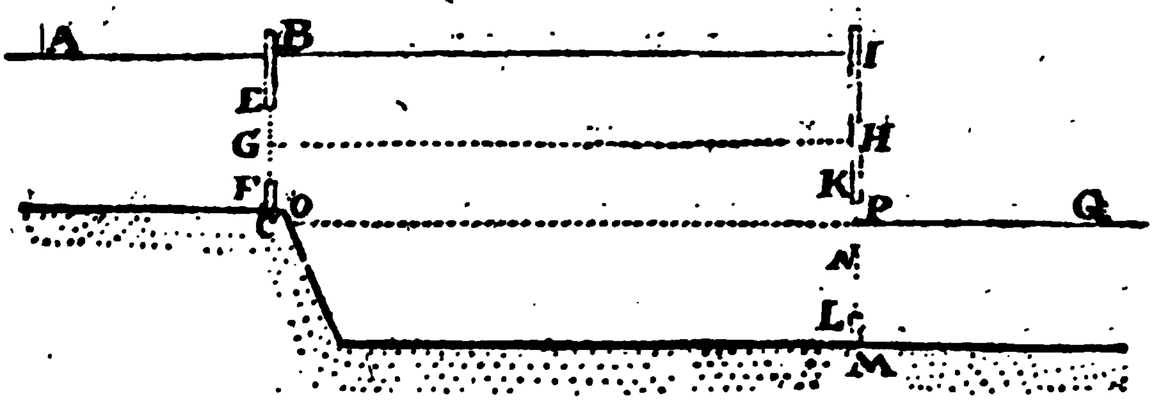
$$dt'' = \frac{A}{\alpha a} \frac{dy}{\sqrt{(h - h' - y)}}$$

und man findet auf eine ähnliche Art wie 115. §. das Integral

$$t'' = \frac{2A}{\alpha a} [\sqrt{(h - h')} - \sqrt{(h - h' - y)}]$$

Noch ist hiebei zu bemerken, daß auf die Beschleunigung des Wassers in dem engern Gefäße nicht Rücksicht genommen ist, vermöge welcher das Wasser anfänglich auf eine größere Höhe als h steigen würde, bevor es in den Beharrungsstand kommt.

Anfüllung der Schleusenkammern der Wasserspiegel des Oberwassers sich nur unmerklich senkt. Auch wird zur Vermeidung weitläuftiger Rechnung der Abfluß nach 110. §. bestimmt werden können:



1. Beispiel. In wie viel Zeit wird der Raum BCOPI einer Schleusenkammer aus dem Oberwasser ABC durch die im Oberthore BC befindliche Oefnung EF mit Wasser angefüllt werden, wenn der Wasserspiegel OP des Unterwassers 10 Fuß unter dem Spiegel AB des Oberwassers liegt; die Höhe der Oefnung EF = 4, ihre Breite = $2\frac{1}{2}$ und die Tiefe ihres Schwerpunkts G unterm Oberwasser, BG = 5 Fuß ist?

Zieht man durch den Schwerpunkt G die Horizontale GH, so kann man sich vorstellen, daß der unterste Raum GCOPH eben so angefüllt werde, als wenn das Wasser durch die Oefnung EF frei ausströmte. Die Zeit, in welcher der oberste Raum BGHI angefüllt wird, kann nun nach dem vorigen §. leicht bestimmt werden, daher läßt sich, wenn die zur Anfüllung beider Räume erforderlichen Zeiten zusammengenommen werden, die gesuchte Zeit leicht finden.

Es sei der Raum GCOPH = 23000 Kubikfuß, so hat man 101. §. IV.

$$N = 23000,\ a = 4\ .\ 2\tfrac{1}{2} = 10,\ h = 5$$

und wenn α nach dem 100. §. bestimmt wird, so ist $\frac{1}{\alpha} = 0{,}2$, daher die Zeit zur Anfüllung des untern Raums GCOPH =

$$\frac{0{,}2\ .\ 23000}{10\ .\ \sqrt{5}} = 205{,}7 \text{ Sekunden.}$$

Zur Bestimmung der Zeit, in welcher der obere Raum BGHI angefüllt wird, ist nach 118. §., wenn die Länge BI der Schleusenkammer = 200 und ihre Breite 24 Fuß beträgt:

$$A = 24\ .\ 200 = 4800,\ a = 10,\ h = 5$$

daher die Zeit zur Anfüllung des obern Raums =

$$2 \cdot 0{,}2 \frac{4800 \cdot \sqrt{5}}{10} = 428{,}2 \text{ Sekunden.}$$

Beide Zeiten 205,7 + 428,2 Sekunden zusammengenommen, geben die zur Anfüllung des Schleusenkammerraums erforderliche Zeit =

634 Sekunden = 10 Minuten 54 Sekunden.

2. Beispiel. Die Schleusenkammer BCMI ist bis BI mit Wasser angefüllt. Das Unterwasser PQ steht 10 Fuß unter dem Wasserspiegel BI. In wie viel Zeit wird sich das im Raume BQPI enthaltene Wasser, durch die $2\frac{1}{2}$ Fuß weite und 5 Fuß hohe Schutzöfnung KL im Unterthore IM, in das Unterwasser ausleeren, wenn vorausgesetzt wird, daß der Stand des Unterwassers unverändert bleibt?

Wenn N der Schwerpunkt von der gänzlich unter dem Spiegel des Unterwassers liegenden Oefnung ist, so muß die Druckhöhe des ausfließenden Wassers allemal von der Oberfläche des Unterwassers bis zum Wasserspiegel in der Schleusenkammer gerechnet werden. Da man nun für diese Ausleerung die Schleusenkammer als prismatisch ansehen kann, so ist 114. §.

$$A = 4800, \; a = 2\tfrac{1}{2} \cdot 5 = 12\tfrac{1}{2}, \; h = 10$$

daher ist die Zeit in welcher sich der Kammerraum BOPI ausleert

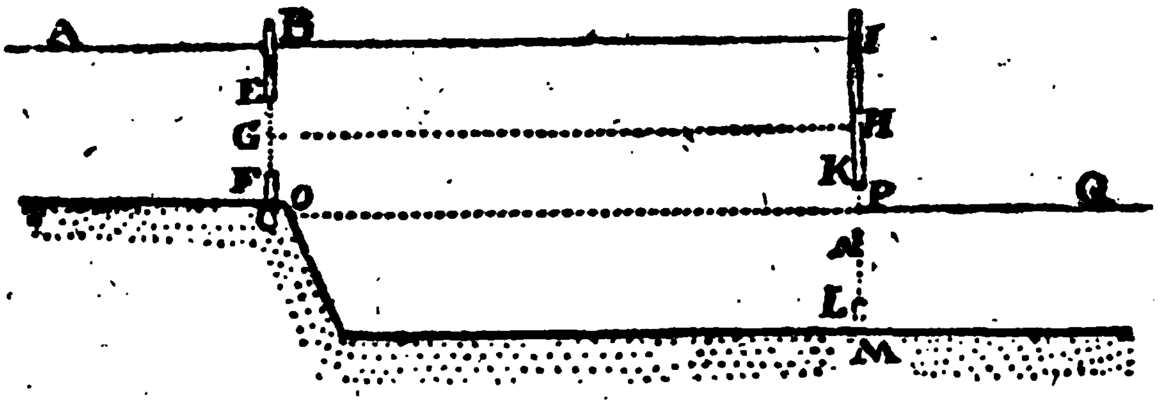
$$\frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 4800 \cdot \sqrt{10}}{12{,}5} = 486 \text{ Sekunden.}$$

$$= 8 \text{ Minuten } 6 \text{ Sekunden.}$$

Es ist hienach die Zeit, in welcher die Schleusenkammer angefüllt und ausgeleert wird

18 Minuten 41 Sekunden.

Vorstehende Auflösungen, welche von mir dem Herrn Prof. Kosmann mitgetheilt sind, befinden sich ebenfalls in dessen Lehrbuch der Hydraulik, Berlin 1797.



Anmerkung. Wäre die Oefnung KL nicht ganz unter dem Unterwasserspiegel PQ, sondern nur ein Theil derselben, und der übrige KP, wie in beistehender Figur, über PQ, so läßt sich das Wasser, so weit es von I bis K abläuft, nach 115. §. berechnen; der übrige Theil von der Höhe KP muß aber, wenn diese Höhe beträchtlich ist, nach 116. §. berechnet werden.

120. §.

Weil es in der Hydraulik, wenn sie auf die Ausübung angewandt werden soll, sehr wichtig ist, daß ihre allgemeinen Lehren durch Versuche bestätiget werden, welche im Großen angestellt sind, und überhaupt noch mehrere Versuche zu wünschen übrig bleiben, so wird es nicht undienlich seyn, diejenigen sorgfältigen Beobachtungen mitzutheilen, die der Bauinspektor Kypke, der mit allen hiezu erforderlichen Kenntnissen den nöthigen Beobachtungsfleiß verband, über das Anfüllen der zweiten massiven Schleusenkammer des Bromberger Kanals, bei verschiedenen Schutzöfnungen, im Sommer 1799 angestellt hat.

Die ganze Schleusenkammer, so weit solche hier in Rechnung gebracht wird, läßt sich als ein Prisma annehmen, dessen horizontaler Querschnitt 4284 rheinländische □ Fuß beträgt. Von den Ober- bis Unterthoren hat sie eine Länge von 158 und eine Breite von 21 bis 29 Fuß.

Bei den Versuchen ließ man die Schleusenkammer erst so weit voll laufen, daß die Schutzöfnung vollkommen unter dem Wasserspiegel in der Kammer stand. Die Höhe des Wassers in der Kammer wurde an einem befestigten Maßstabe bemerkt, und indem der eine Beobachter die Sekunden zählte, so wurde deren fortlaufende Zahl, wenn

das Wasser eine bestimmte Höhe erreicht hatte, immer angemerkt. Man bediente sich bei den Versuchen nur einer Schutzöfnung.

Versuche.	I.		II.	
	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.
Breite der Schutzöfnung	2	—	[illegible]	—
Höhe der Schutzöfnung	1	4	1	9½
Tiefe der Unterkante der Schutzöfnung unter dem Oberwasserspiegel	8	7	9	—
Beim Anfang der Sekundenzählung stand das Oberwasser über dem Unterwasser	7	3	7	[illegible]

Versuche.	Höhe welche das Wasser erreichte.		Zeit.	Einzelne Höhen.		Zeit.
	Fuß.	Zoll.	Sekunden.	Fuß.	Zoll.	Sekunden.
I.	2 4 6 7	— — — 1	263 590 1081 1765	2 2 2 1	— — — 1	263 327 491 682
II.	1 2 3 4 5 6 7	— — — — — — —	90 192 506 434 583 780 1236	1 1 1 1 1 1 1	— — — — — — —	90 102 114 128 149 197 454

Vergleicht man diese Erfahrungen mit der Theorie 118. §., indem man die Zeit der ganzen Anfüllung oder

$$t = \frac{2}{5} \cdot \frac{A\sqrt{h}}{a}$$

sucht, so findet man hienach für den
erſten Versuch t = 1711 Sekunden
zweiten Versuch t = 1265 Sekunden

anstatt, daß die Erfahrung

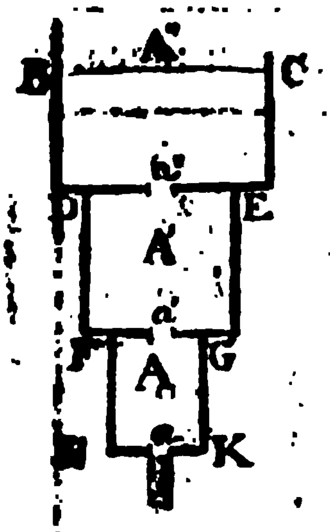
I. t = 1763 Sekunden

II. t = 1236 Sekunden

gibt. Die Abweichungen sind zwar nicht bedeutend, sie lassen sich aber sehr gut aus dem abnehmenden Verhältniß des Umfangs zum Flächeninhalt der Schutzöfnung erklären, worauf hier, um weitläuftige Formeln zu vermeiden, nicht Rücksicht genommen ist.

121. §.

Sind mit einem oben offenen Behälter mehrere verschlossene Gefäße von ungleicher Weite verbunden, welche mittelst Verbindungsöfnungen in vertikalen oder horizontalen Scheidewänden zusammenhängen, so läßt sich der Ausfluß ebenfalls bestimmen, wenn vorausgesetzt wird, daß vorher alle verschlossene Behälter gänzlich mit Wasser angefüllt sind.



Wenn drei Gefäße zusammengesetzt sind, dergestalt, daß mit dem offenen Gefäße BCD, die beiden verschlossenen Gefäße DEF und FGH mittelst vertikaler oder horizontaler Scheidewände DE, FG zusammenhängen, und man setzt voraus, daß der Wasserspiegel BC unverändert bleibe, und eben so viel Wasser daselbst zufließe, als durch die Ausflußöfnung in der Wand HK abläuft, so sei für das Gefäß GH, in welchem sich die Ausflußöfnung befindet:

A der Inhalt des Querschnitts HK

C die Geschwindigkeit des Wassers in diesem Querschnitte

a der Inhalt der Ausflußöfnung

c die Geschwindigkeit des Wassers in dieser Oefnung.

Für das folgende Gefäß DEFG:

A' der Inhalt des Querschnitts FG

C' die Geschwindigkeit des Wassers in diesem Querschnitte

a' der Inhalt der Verbindungsöfnung

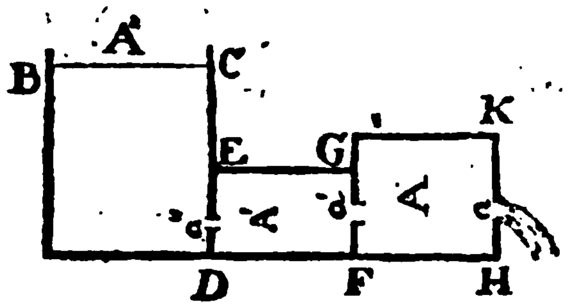
c' die Geschwindigkeit in derselben.

Für das Gefäß BCE haben die Größen A'', C'', a'', c'' eine ähnliche Bedeutung.

Ist nun ferner:

h die gesammte Druckhöhe

oder die vertikale Entfernung des Wasserspiegels BC von dem Schwerpunkte der Ausflußöfnung a, so erhält man die Geschwindigkeit



$$c' = \frac{ac}{a'}$$

$$c'' = \frac{ac}{a''}$$

Wird nun die Weite des Gefäßes wenigstens so groß vorausgesetzt, daß die Hindernisse, welche das Wasser, bei der Fortbewegung an den Wänden der Gefäße, wegen Klebrigkeit oder Adhäsion und anderer Hindernisse der Bewegung leidet, bei Seite gesetzt werden können, so ist 101. §. II. die zur Geschwindigkeit c'' erforderliche Höhe

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{ac}{a''}\right)^2.$$

Die zur Geschwindigkeit c' erforderliche Höhe wäre $\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{ac}{a'}\right)^2$; weil aber das Wasser im Gefäße DG schon mit der Geschwindigkeit $C' = \frac{ac}{A'}$ zu welcher, mit Bezug auf die Durchflußöfnung, die Höhe $\frac{(C')^2}{\alpha^2}$ gehört, vor dieser Oefnung a' anlangt, so ist die zur Geschwindigkeit c' erforderliche Höhe

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{ac}{a'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{ac}{A'}\right)^2$$

Auf ähnliche Art findet man die zur Ausflußgeschwindigkeit c erforderliche Höhe

$$\frac{1}{\alpha^2} c^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{a c}{A}\right)^2$$

Sämmtliche erforderliche Geschwindigkeitshöhen müssen der vorhandenen Druckhöhe h gleich seyn, es ist daher

$$h = \frac{1}{\alpha^2}\left[c^2 + \left(\frac{a c}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a c}{a''}\right)^2\right] - \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a c}{A}\right)^2 + \left(\frac{a c}{A'}\right)^2\right]$$

$$\text{oder } h = \frac{c^2}{\alpha^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \left(\frac{a}{A}\right)^2 - \left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]$$

Setzt man die in jeder Sekunde ausfließende Wassermenge $= M$, so ist $a c = M$ oder $\frac{M^2}{a^2} = c^2$ daher die Druckhöhe für drei Gefäße

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \left(\frac{a}{A}\right)^2 - \left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]$$

und hieraus die Wassermenge

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \left(\frac{a}{A}\right)^2 - \left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]}}$$

Für zwei Gefäße erhält man die Druckhöhe

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 - \frac{a^2}{A^2}\right]$$

und die Wassermenge

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 - \frac{a^2}{A^2}\right]}}$$

Wenn die Gefäße gleich weit sind, also $A = A'$ ist, so erhält man bei drei Gefäßen

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{2 a^2}{A^2}\right]$$

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{2 a^2}{A^2}\right]}}$$

Bei sehr weiten Gefäßen, wo $\frac{a}{A} = 0$ gesetzt werden kann, erhält man eben die Ausdrücke für h und M, wie 117. §. Dies gilt auch, wenn alle Oefnungen a, a', a'' einander gleich sind.

122. §.

Wäre keine Zusammenziehung des Wassers beim Durchgange durch eine Oefnung noch irgend ein Hinderniß der Bewegung vorhanden, so würde eine geringere Höhe als h zur Erzeugung der Geschwindigkeit c erforderlich seyn. Gesetzt, man müßte die Höhe h um einen Theil h″ vermindern, daß bei einer ungehinderten Bewegung das Wasser eben die Geschwindigkeit c erlangte, welche dasselbe beim Durchgange durch verschiedene Oefnungen erhält, so wäre §. 91.

$$h - h'' = \frac{c^2}{4g}$$

und man kann h″ als denjenigen Theil der Druckhöhe ansehen, welcher wegen der Zusammenziehung des Wassers in den verschiedenen Oefnungen verwandt werden muß, wogegen der übrige Theil der Druckhöhe oder $h - h''$ zur Erzeugung der Geschwindigkeit c erforderlich ist. Aus vorstehender Gleichung erhält man

$$h'' = h - \frac{c^2}{4g}$$

oder wenn nach dem vorigen §. für h sein Werth gesetzt wird,

$$h'' = \frac{c^2}{\alpha^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \left(\frac{a}{A}\right)^2 - \left(\frac{a}{A'}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\right].$$

Sind die Gefäße mit Ausnahme des ersten gleich weit, also $A = A'$ und die Oefnungen gleich groß, also $a = a' = a''$, so erhält man für n Oefnungen

$$h'' = \frac{c^2}{\alpha^2}\left[n - (n-1)\frac{a^2}{A^2} - \frac{\alpha^2}{4g}\right].$$

Anmerk. Bei horizontalen Scheidewänden kann sich der Fall ereignen, daß das Wasser durch die oberste Oefnung a″ mit einer größern oder geringeren Geschwindigkeit abfließt, als der Druckhöhe BD zugehört. Wollte man dieses nicht annehmen, so müßte sich das untere Wasser im ersten Falle bei a″ losreißen, und ein luftleerer Raum entstehen. Wegen des Zusammenhanges der Wassertheile, besonders aber weil die Atmosphäre gegen die obere und untere Oefnung mit einer ansehnlichen Gewalt drückt, wird die Entstehung eines luftleeren Raumes, also auch die Trennung der Wassertheile verhindert.

Wenn hingegen BD > DF ist, so würde bei gleich grossen Oefnungen, durch a″ mehr Wasser einfliessen, als bei a′ abfliessen kann; es kann daher der Ausfluß nicht anders, als nach den vorhin entwickelten Gesetzen erfolgen.

Siebentes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in Flußbetten.

---

123. §.

Die Wörter Strom und Fluß sind in der gewöhnlichen Sprache fast gleichbedeutend; hier wird aber unter Strom (Fluvius, Flumen, *Fleuve*) dasjenige schiffbare fließende Gewässer verstanden, welches sich unmittelbar in das Meer oder die See ergießt; unter Fluß (Amnis, *Rivière*) hingegen, ein schiffbares fließendes Gewässer, welches seinen Ausfluß in einen Strom oder andern Fluß hat.

Die Donau, Weichsel, Elbe, Oder ꝛc. sind Ströme, hingegen die Warthe, Havel, Netze, der Mayn, Neckar ꝛc. sind nur Flüsse.

Ein kleines fließendes Wasser, welches nicht beschifft werden kann, heißt ein Bach oder Fließ (Rivus, *Ruisseau*). Stürzt es von großen Anhöhen herunter, ein Sturz- oder Gebirgsbach (Torrens, *Torrent*); ein Regenbach, wenn es vom Zusammenflusse des Regens entstehet und zuweilen vertrocknet.

Kanäle sind solche, durch Kunst angelegte Gewässer, welche zwei Flüsse oder Meere mit einander verbinden.

Wenn zur Verkürzung der Krümmungen eines Flusses, derselbe einen andern durch Kunst verfertigten Lauf erhält, so heißt dieses ein Durchstich. Ein Graben (Fossa, *Fossé*) heißt jede in die Erde gegrabene Wasserleitung, welche nicht zur Schifffahrt bestimmt ist; wird sie mit

hölzernen Wänden eingefaßt, ein Gerinne (Canalis, *Auge*).

Die Höhlungen in der Oberfläche der Erde, worin ein Strom fließt, heißt sein Bette oder Rinnsal (Alveus, *Lit*). Das Grundbette (Solum rivi, *Fond du lit*) ist zwischen beiden Ufern (Ripae, *Bords*) eingeschlossen.

Derjenige Ort, wo sich ein Bach oder Fluß mit einem andern vereinigt, oder wo ein Strom ins Meer tritt, heißt seine Mündung (Ostium, *Embouchure*). Bei einem Durchstich oder Kanal heißt der Einfluß die Einmündung, der Ausfluß die Ausmündung.

Theilt sich ein Strom in zwei Aerme, so heißt dieses eine Stromscheidung (Diffluentia). Der Ort, wo sich zwei Ströme vereinigen, ihr Zusammenfluß (Confluentia, *Confluent*, *Jonction*).

124. §.

Wenn man sich eine Ebene senkrecht auf die Richtung eines Stroms denkt, so nennt man solche den Querschnitt (Sectio transversa, *Section*) des Stroms, und die Zeichnung davon heißt ein Quer- oder Breitenprofil. Der Umfang des Querprofils, so weit er mit dem Bette zusammenfällt, die Wand des Querschnitts.

Denkt man sich längs der Richtung des Stroms eine vertikale Fläche, welche vom Wasserspiegel bis auf das Grundbette geht, so entstehet ein Längenprofil.

Den Abhang (Declivitas, *Pente*) der Oberfläche eines Stroms auf eine bestimmte Länge auszudrücken, dient das Gefälle (Libramentum, *Chûte*), welches der vertikale Abstand derjenigen Horizontallinien ist, die durch den Wasserspiegel beim Anfang und Ende der Stromlänge gehen.

Sagt man, die Elbe habe in einer gewissen Gegend auf 100 Ruthen 3 Zoll Gefälle, so heißt dies so viel: auf 100 Ruthen senkt sich der Wasserspiegel 3 Zoll.

Bei Mühlenbächen und Gräben nennt man das Gefälle, die Räusche oder Rösche.

Dividirt man das Gefälle durch die dazu gehörige Stromlänge, so pflegt man auch diesen Quotienten den **Abhang** zu nennen.

Unter **mittlerer Geschwindigkeit** des Wassers in einem Querprofile, versteht man diejenige, mit welcher dasselbe durch alle Theile des Profils fließen müßte, damit eine eben so große Wassermenge durchläuft, als wenn das Wasser mit verschiedenen Geschwindigkeiten abfließt.

Anmerk. Den abwechselnden Wasserstand der Flüsse bemerkt man durch die **Wassermerkpfähle** oder Marqueurs, indem man in eigenen Wasserstandstafeln die Höhen des Wassers an jedem Tage einträgt. Hiedurch entstehen aber Folianten, welche die Uebersicht erschweren; daher habe ich in einer Abhandlung: Von dem Nutzen einer **Wasserstandsscale**, in der angef. Sammlung die Baukunst betreffend, 1ter Band. 1798. S. 25 u. f. gezeigt, wie man dergleichen Tafeln mittelst Abscissen und Ordinaten construiren könne.

125. §.

Ist in einem Flußbette die Oberfläche des Wassers horizontal, der Boden mag eine Gestalt haben, welche er will, so wird, wenn außer dem Gewichte des Wassers keine andere Ursachen hinzu kommen, keine Bewegung desselben entstehen können, weil alle Wassertheilchen auf der Oberfläche, und in jeder Tiefe, gleich stark nach allen Seiten pressen. Ist hingegen der Wasserspiegel gegen den Horizont geneigt, so erhalten sämmtliche Wassertheilchen im Flußbette nach derjenigen Richtung, wohin die Oberfläche des Wassers ihren Abhang hat, einen stärkern Druck, als nach jeder andern Seite; es muß daher **Bewegung** nach derjenigen Richtung entstehen, wo der Druck am geringsten ist. Auch muß diese Bewegung nicht allein auf der Oberfläche, sondern auch in jeder Tiefe Statt finden, weil die Differenzen der hydrostatischen Pressungen in einerlei Vertikale für alle Tiefen gleich groß sind.

Stellt man sich vor, daß Wasser längs einer geneigten Ebene sich herunter bewegt, so müßte dasselbe, wenn sein Lauf durch nichts gehindert wird, eine beschleunigte

ewegung annehmen und immer schneller fließen, je län-
r die Bewegung dauert (50. §.), auch selbst, wenn die
iefe Ebene nach und nach weniger Neigung erhalten
llte (57. §.). Wenn nun gleich alle Flüsse von ihrer
uelle ab bis zum Meere Gefälle haben, so findet man
ch größtentheils, daß ihre Geschwindigkeit nach dem
leere hin abnimmt; es muß daher ein Widerstand vorhan-
n seyn, welcher die Bewegung des Wassers aufhält, und
durch die Geschwindigkeit desselben vermindert. Außer
idern zufälligen Ursachen, welche zu dieser Verminderung
r Geschwindigkeit beitragen, wird man sich leicht durch
nen Versuch mit der beständigen Ursache bekannt machen
nnen, welche die Bewegung des Wassers in einem Fluß-
tte verzögert.

Man bringe an einem immer auf gleicher Höhe mit
Jasser angefüllten Gefäße eine horizontale Röhre an, und
merke mittelst der Ausflußmenge die Geschwindigkeit des
Jassers in der Röhre. Unter übrigens gleichen Umständen
be man der Röhre eine mehrmal größere Länge, so müßte,
Druckhöhe und Röhrenweite unverändert bleiben, wenn
is Wasser keine Hindernisse längs der Röhrenwände fände,
ich im letzten Falle die Geschwindigkeit dieselbe bleiben.
lan wird aber eine ansehnliche Verminderung der Ge-
hwindigkeit des Wassers in der längeren Röhre finden,
odurch man anzunehmen berechtiget wird, daß das Was-
r bei seiner Bewegung längs der Röhrenwände aufgehal-
n, oder seine Geschwindigkeit verzögert wird.

Dieser Versuch beweiset ebenfalls, daß das Wasser bei
er Bewegung in einem Flußbette, längs den Wänden ei-
en Widerstand findet, dessen Ursache man darin suchen
ann, daß die Wassertheilchen vermöge ihrer Klebrigkeit
der Adhäsion, mit dem Flußbette zusammenhängen, und
ei der Bewegung, theils von den Wänden, theils von
enjenigen Wassertheilchen abgerissen werden müssen, welche
nit den Wänden stärker zusammenhängen, als unter ein-
nder, oder wo die Adhäsion größer als die Cohäsion ist.
luch muß durch das Abprellen der Wassertheile von den

Wänden, und die dadurch verursachte innere Bewegung, und vielleicht durch andere noch unbekannte Ursachen, eine Verzögerung entstehen.

Hienach wäre also außer den zufälligen Ursachen der Verzögerung des fließenden Wassers, die von Winden, Frost, Eisgängen, Wasserpflanzen, Anschwellungen beim Ausfluß, oder auch von Untiefen, Krümmungen rc. herrühren können, eine beständige Verzögerung bekannt, die bei jedem in einem Flußbette oder in einer Röhre bewegten Wasser Statt finden muß, welche auch von einigen Schriftstellern mit dem Namen der Reibung oder Frikzion belegt wird, ob es gleich sehr schwer wird, bei einer so leicht beweglichen Flüssigkeit, wie das Wasser, sich eine Frikzion zu denken, weshalb Adhäsion und Cohäsion viel wahrscheinlicher als Ursache der Verzögerung, oder als Widerstand angesehen werden können.

Wenn nun gleich nur diejenigen Wassertheile in ihrer Bewegung verzögert werden, welche unmittelbar die Wände berühren, so hängen doch sämmtliche Wassertheile mit einer gewissen Kraft zusammen, wodurch auch in den entferntern, Verzögerung entstehet, und der Widerstand unter die ganze Wassermasse verbreitet wird, obgleich die Verzögerung geringer werden muß, je größer die Entfernung von der Wand ist.

1. Anmerk. Wie sehr die Wassertheile selbst unter einander zusammenhängen, davon kann man sich durch einige sehr interessante Versuche überzeugen. Man lasse einen Wasserstrahl von unten durch ein Gefäß mit Wasser gehen, so wird dieses Gefäß bald ausgeleert seyn, weil sich das stillstehende Wasser an den durchströmenden Strahl hängt, und mit fortgeführt wird. Oder man bringe in der Ausflußröhre eines Behälters eine kleine Seitenöfnung an, und an diese eine dünne Röhre, welche in ein tiefer stehendes Gefäß mit Wasser gehet. Nach und nach wird das Wasser aus dem Gefäße in die Höhe (welche nicht zu groß seyn darf) steigen, sich mit dem strömenden Wasser der Ausflußröhre vereinigen, und so wird wegen der Adhäsion das Gefäß ausgeleert werden.

2. Anmerk. Wie stark das Wasser mit festen Körpern zusammenhängt, darüber haben Achard (physik. chem. Schriften

S. 354), Buat (a. a. O. 1. Bd. S. 57), und Huth (Gren's neues Journal der Physik, 3. Bd. S. 301) Versuche angestellt, woraus hervorgeht, daß bei Flächen von verschiedenen Metall- und Holzarten, im Durchschnitt eine Kraft von 1 Pfund erfordert wird, um eine Fläche von einem rheinländischen Quadratfuß vom Wasser loszureißen. Einige Materien äußern zwar einen stärkern Zusammenhang als andere, der Unterschied kann aber hier bei Seite gesetzt werden.

126. §.

Ein allgemein anwendbares Gesetz, welches die Geschwindigkeit des Wassers in Flußbetten unter allen Umständen genau angibt, ist bis jetzt noch nicht gefunden, und das Auffinden desselben ist deshalb um so schwieriger, weil es nicht angeht, die mancherlei, vielleicht noch unbekannten Hindernisse der Bewegung in Rechnung zu bringen. So viel läßt sich aber mit Búat annehmen, daß, wenn man fließendes Wasser in einem geraden Flußbette, wo alle Querprofile einander gleich sind, findet, und alsdann die Bewegung gleichförmig ist, in diesem Falle, die **beschleunigende Kraft**, welche aus dem Abhange der **Oberfläche des Wassers** entspringt, dem **Widerstande im Flußbette gleich seyn muß**.

Nun ist offenbar, in einem übrigens regelmäßigen Flußbette, in welchem alle Querprofile einander gleich sind, und das Wasser nach einerlei Richtung fließt, der Widerstand in dem Verhältnisse größer, je größer der Umfang eines Querprofils ist, weil ein doppelt so großer Umfang, bei übrigens gleichen Umständen, wegen des Zusammenhanges des Wassers mit den Wänden, doppelt so viel Verzögerung des Wassers verursacht, da sich wegen der Cohäsion der Wassertheile, die entstandenen Hindernisse der Bewegung, auch dem übrigen von den Wänden entfernten Wasser mittheilen. Es steht daher die Verzögerung des Wassers, oder der Widerstand, mit den Wänden in einem geraden Verhältnisse, oder es **wird in demselben Verhältnisse mehr Kraft zur Bewegung des Was-**

sers erfordert, wie die Profilwände sich vergrößern.

Die größere Geschwindigkeit des Wassers verursacht ebenfalls einen Widerstand. Denn die in Bewegung befindlichen Wassertheile müssen von den Wänden losgerissen werden, mit welchen sie zusammenhängen, und es wird erfordert, daß bei einer doppelt so großen Geschwindigkeit, nicht nur doppelt so viel Wassertheile, sondern auch jedes Wassertheilchen in halb so viel Zeit losgerissen werden muß, als bei der einfachen Geschwindigkeit; dies heißt aber offenbar viermal so viel verrichten. Bei der dreifachen Geschwindigkeit wäre dieses neunmal so viel u. s. w. Man kann daher schließen, daß sich bei übrigens gleichen Umständen, die Widerstände wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten.

Wären in zwei Querschnitten die Wände und Geschwindigkeiten des Wassers einander gleich, aber ihre Inhalte verschieden, so würde bei doppelt so großem Inhalte, der Widerstand unter doppelt so viel materielle Theile vertheilt, also für jedes einzelne Theilchen nur halb so groß seyn; man kann daher schließen, daß sich unter sonst gleichen Umständen, die Widerstände, welche die Bewegung der einzelnen Wassertheile verzögern, umgekehrt wie die Querschnitte verhalten.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß in zwei verschiedenen Flußbetten, in welchen die Bewegung des Wassers gleichförmig ist, sich die Widerstände, welche die Bewegung der Wassertheile verzögern, eben so verhalten, wie die Profilwände und Quadrate der Geschwindigkeiten, und umgekehrt wie die Inhalte der Querschnitte.

127. §.

Zur Ueberwältigung des Widerstandes in einem Flußbette, ist keine andere beständige Kraft vorhanden als die Schwere, welche jeden bewegten Körper, dessen Richtung gegen den Horizont geneigt ist, beschleuniget. Setzt man

un unter den Bedingungen des vorigen §. voraus, daß ch Wasser in einem Flußbette gleichförmig bewege, so olgt daraus, daß die Beschleunigung, welche die Schwere erursacht, von dem Widerstande aufgehoben wird, oder aß dieser Widerstand der beschleunigenden Kraft des Wassers gleich sei, weshalb die Bewegung desselben, wie bei der trägen Masse, gleichförmig bleiben muß.

Sind daher für zwei verschiedene Gewässer, welche ach einer unveränderten Richtung fließen, wo alle Querschnitte einander gleich sind, und bei welchen man annehmen kann, daß sich das Wasser durch jeden Querschnitt af einerlei Art bewege,

C, c ihre mittlere Geschwindigkeiten,

S, s die Inhalte ihrer Querprofile,

P, p ihre Wände oder die Umfänge ihrer Querprofile,

A, α ihre Gefälle, und

L, λ die dazu gehörigen Längen, auf welche die Bewegung der einzelnen Wasserfäden gleichförmig ist,

ist bekannt, daß sich die von der Schwere bewirkten Beschleunigungen zweier Massen auf einer schiefen Ebene, oder beschleunigenden Kräfte, wie die Höhen der schiefen benen dividirt durch ihre Längen verhalten (50. §.)

Nun bezeichnen in dem vorliegenden Fälle, A, α die öhen, und L, λ die Längen der schiefen Ebenen, daher halten sich die beschleunigenden Kräfte wie $\frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda}$. Aber beschleunigenden Kräfte sind den Widerständen in den tten, welche hier durch W, w bemerkt werden, gleich, her muß sich verhalten

$$W : w = \frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda}$$

Nach dem vorhergehenden §. verhalten sich aber die derstände, wie die Umfänge P, p; wie die Quadrate der

Geschwindigkeiten C^2, c^2, und umgekehrt wie die Querschnitte S, s, daher

$$W : w = \frac{P C^2}{S} : \frac{p c^2}{s} \text{ *) oder}$$

$$\frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{P C^2}{S} : \frac{p c^2}{s} \text{ daher}$$

$$\frac{p c^2}{s} \times \frac{A}{L} = \frac{P C^2}{S} \times \frac{\alpha}{\lambda} \text{ oder}$$

$$c^2 = C^2 . \frac{P}{S} \frac{L}{A} . \frac{s}{p} \frac{\alpha}{\lambda} \text{ folglich}$$

$$c = C\sqrt{\left(\frac{P . L}{S . A}\right)} . \sqrt{\left(\frac{s}{p} \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

hat man nun aus genauen Versuchen den Werth $C\sqrt{\left(\frac{P L}{S A}\right)}$, bestimmt, so läßt sich leicht für jeden Strom, unter den vorausgesetzten Umständen, die mittlere Geschwindigkeit c aus den bekannten Größen s, p, α, λ, oder eine von diesen aus den übrigen finden.

Wenn alle Größen sich auf rheinländisches zwölftheiliges Fußmaß beziehen, so ist nach einer Mittelzahl von 36 Buatschen Beobachtungen

$$C\sqrt{\left(\frac{P L}{S A}\right)} = 90{,}9 \text{ daher}$$

die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{s}{p} \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

---

*) Denn wenn in vier verschiedenen Flußbetten

W, W′, W″, w die Widerstände,
C, c, c, c die Geschwindigkeiten,
P, P, p, p die Umfänge, und
S, S, S, s die Querschnitte

welche damit zusammengehören, bezeichnete, so verhält sich

$$\left.\begin{array}{l} W : W' = C^2 : c^2 \\ W' : W'' = P : p \\ W'' : w = \frac{1}{S} : \frac{1}{s} \end{array}\right\} \text{folglich}$$

$$W : w = \frac{C^2 P}{S} : \frac{c^2 p}{s}$$

Anmerk. Die Vergleichung des Resultats der hier vorgetragenen Theorie mit der Erfahrung findet man in meinen Zusätzen zum ersten Theil der du Buatschen Hydraulik, S. 82 u. f., wo ebenfalls die hier vorgetragene Theorie von mir zu Grunde gelegt, und daraus die hier gefundene Formel entwikkelt ist. Will man diese Formel auf die Bewegung des Wassers in Flüssen anwenden, so ist nur dabei zu merken, daß sie ganz allein für diejenigen Fälle gilt, wo das Wasser eine gleichförmige Bewegung angenommen hat, daß aber, wenn die Bewegung nicht gleichförmig ist, die Profile ungleich sind, oder die Strombahn Krümmungen hat, keine Anwendung derselben Statt findet, auch bis jetzt, aus Mangel an zulänglichen Erfahrungen, kein allgemein geltender Ausdruck für dergleichen Fälle aufgestellt werden kann, und daß selbst für die unbedingte Anwendung dieses Ausdrucks, noch mehrere Erfahrungen zur Bestätigung desselben bei großen Strömen zu wünschen sind. Die von mir gemachte Beobachtung (130. §. Zusatz) stimmt übrigens gut mit der Formel überein.

Beispiel. Ein Fluß, dessen Querprofil 100 Fuß Umfang und 600 □ Fuß Inhalt hat, besitzt auf 100 Ruthen, oder 1200 Fuß, 3 Zoll Gefälle, wie groß wird die mittlere Geschwindigkeit des Wassers seyn, wenn vorausgesetzt wird, daß auf die Weite von 100 Ruthen, Profil und Richtung des Stroms beinahe ungeändert bleiben?

Hier ist $s = 600$, $p = 100$, $\alpha = 3$ Zoll $= \frac{1}{4}$ Fuß, $\lambda = 1200$ daher die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{600}{100} \cdot \frac{1}{1200 \,.\, 4}\right)}$$
$$= 3{,}21 \text{ Fuß.}$$

128. §.

Für rechtwinklichte Querprofile, wenn
h die Höhe, und
b die Breite ist, erhält man
$s = bh$
$p = b + 2h$ daher in diesem Falle
die mittlere Geschwindigkeit

$$\text{I.} \quad c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{bh}{b + 2h} \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

die Breite des Profils

$$\text{II.}\quad b = \frac{h c^2}{4131{,}4\; h \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{1}{2} c^2}$$

die Höhe des Profils

$$\text{III.}\quad h = \frac{b c^2}{8262{,}8\; b \frac{\alpha}{\lambda} - 2 c^2}$$

das Gefälle

$$\text{IV.}\quad \alpha = \frac{c^2 (b + 2h)\, \lambda}{8262{,}8\; bh} = \frac{c^2\, p \lambda}{8262{,}8\; s}$$

$$= 0{,}000121 \frac{c^2\, p \lambda}{s}$$

die Länge, welche zum Gefälle α gehört

$$\text{V.}\quad \lambda = \frac{8262{,}8\; bh\alpha}{c^2 (b + 2h)} = \frac{8262{,}8 \,.\, s \,.\, \alpha}{c^2 p}$$

1. Beispiel. Ein rechtwinklichtes Gerinne ist 3 Fuß breit und 1 Fuß hoch, sein Gefälle beträgt auf 100 Fuß, 2 Zoll. Man sucht die mittlere Geschwindigkeit des Wassers.

$b = 3$, $h = 1$, $\lambda = 100$, $\alpha = \frac{1}{6}$ daher

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{1 \,.\, 3}{3 + 2} \,.\, \frac{1}{100 \,.\, 6}\right)} = 2{,}87 \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Wie groß wird die Breite eines rechtwinklichten Gerinnes seyn müssen, wenn das Wasser in demselben $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch stehen, und bei einem Gefälle von 2 Zoll auf 100 Fuß, sich mit einer Geschwindigkeit von 3 Fuß bewegen soll?

Hier ist $h = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{1}{6}$, $\lambda = 100$, $c = 3$ daher die gesuchte Breite

$$b = \frac{\frac{3}{2} \,.\, 3^2}{4131{,}4 \,.\, \frac{3}{2} \,.\, \frac{1}{600} - \frac{1}{2} \,.\, 3^2} = 2{,}31 \text{ Fuß.}$$

3. Beispiel. Wie groß ist das Gefälle, welches ein in der Sohle 6 Fuß breiter, 3 Fuß tiefer und auf beiden Seiten mit einer einfüßigen Dossirung versehener Abzugsgraben auf 100 Ruthen haben muß, damit das Wasser sich mit einer Geschwindigkeit von 1 Fuß in demselben bewege?

Wenn die Unterbreite des Profils 6 Fuß ist, so wird die Oberbreite 12 Fuß, also der Inhalt $s = 27$ □ Fuß, $p = 6 + 2\sqrt{18} = 14{,}48$, $\lambda = 1200$ Fuß, daher das Gefälle

$$\alpha = \frac{0{,}000121 \,.\, 1 \,.\, 14{,}48 \,.\, 1200}{27} = 0{,}0779 \text{ Fuß}$$

$$= \tfrac{11}{12} \text{ Zoll.}$$

Unter eben den Voraussetzungen erhält man für einen zwei Fuß tiefen Graben

$$s = 16,\ p = 6 + 2\sqrt{8} = 11{,}7 \text{ und } \lambda = 1200 \text{ daher}$$

$$\alpha = \frac{0{,}000121 \cdot 1 \cdot 11{,}7 \cdot 1200}{16} = 0{,}106 \text{ Fuß}$$
$$= 1{,}27 \text{ Zoll.}$$

Man sieht hieraus, daß, wenn in zwei gleichen Abzugsgräben das Wasser in dem einen niedriger als in dem andern steht, der erstere ein größeres Gefälle nöthig hat als der letztere, um das Wasser mit eben der Geschwindigkeit abzuführen. Auch läßt sich hieraus erklären, weshalb bei einem Abzugsgraben, wenn in demselben bei ungeändertem Gefälle das Wasser höher steht, derselbe auch besser zieht, oder das Wasser sich in ihm schneller bewegt.

129. §.

Wird durch außerordentliche Zuflüsse die Höhe des Wassers in den Flußbetten vergrößert, so hat dieses gewöhnlich eine Vermehrung der mittleren Geschwindigkeit und des Gefälles zur Folge. Wenn daher bei ungeänderter Höhe h die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{bh}{b + 2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

und bei unveränderter mittlerer Breite b die durch Anschwellung entstandene Höhe h' und das Gefälle α' ist, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit des angeschwellten Flusses

$$c' = 90{,}9 \sqrt{\left(\frac{bh'}{b + 2h'} \cdot \frac{\alpha'}{\lambda}\right)}$$

und es verhält sich

$$c : c' = \sqrt{\left(\frac{bh\alpha}{b + 2h}\right)} : \sqrt{\left(\frac{bh'\alpha'}{b + 2h'}\right)}.$$

Sind die Gefälle nicht merklich von einander verschieden, so kann man bei sehr breiten Strömen $b + 2h = b + 2h'$ annehmen, und es ist beinahe

$$c : c' = \sqrt{h} : \sqrt{h'}$$

oder bei breiten Strömen verhalten sich die mittlern Geschwindigkeiten bei verschiedenen Anschwellungen, beinahe wie die Quadratwurzeln aus den mittlern Wassertiefen.

130. §.

Wird die **Wassermenge**, welche in jeder Sekunde durch den Querschnitt eines Flusses läuft $= M$ gesetzt, so ist in Verbindung mit den vorhin eingeführten Größen, die **Wassermenge**

$$\text{I.} \quad M = c \cdot s = 90{,}9 \cdot s \sqrt{\left(\frac{s}{p} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

$$= 90{,}9 \cdot b\,h \sqrt{\left(\frac{b\,h}{b + 2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

und hieraus der Inhalt des **Querschnitts**

$$\text{II.} \quad s = \sqrt[3]{\left(\frac{M^2\,p\,\lambda}{8262{,}8\,\alpha}\right)}$$

Ferner der Umfang oder die **Wand** des Querschnitts

$$\text{III.} \quad p = \frac{8262{,}8\,s^3\,\alpha}{M^2\,\lambda}$$

die **Breite** des rechtwinklichten Profils

$$\text{IV.} \quad b^3 - \left(\frac{M^2\,\lambda}{8262{,}8\,h^3\,\alpha}\right) b - 2\left(\frac{M^2\,\lambda}{8262{,}8\,h^3\,\alpha}\right) h = 0$$

die **Höhe** des rechtwinklichten Profils

$$\text{V.} \quad h^3 - 2\left(\frac{M^2\,\lambda}{8262{,}8\,b^3\,\alpha}\right) h - \left(\frac{M^2\,\lambda}{8262{,}8\,b^3\,\alpha}\right) b = 0$$

das **Gefälle**

$$\text{VI.} \quad \alpha = \frac{M^2\,p\,\lambda}{8262{,}8\,s^3}$$

$$= \frac{b + 2h}{8262{,}8\,b^3\,h^3}\,M^2\,\lambda$$

die dazu gehörige **Länge**

$$\text{VII.} \quad \lambda = \frac{8262{,}8\,s^3\,\alpha}{M^2\,p}$$

$$= \frac{8262{,}8\,b^3\,h^3\,\alpha}{(b + 2h)\,M^2}$$

Es wird leicht seyn, für diese allgemeinen Ausdrücke besondere Beispiele zu wählen, wobei zu bemerken ist, daß die Bestimmung der Werthe b und h die Auflösung einer kubischen Gleichung erfordert.

Zusatz. In dem 104. §. beschriebenen 4 Fuß breiten Kanal, welcher rechtwinklicht mit Bohlen ausgesetzt war, und dessen Sohle auf 100 Fuß beinahe einen Zoll Gefälle hatte, nahm die Oberfläche des Wassers bei ungehindertem Laufe und einer mittlern Tiefe von 5¾ Zoll, ein Gefälle von ¾ Zoll auf 100

Fuß an. Die auf verschiedene Art ausgemessene Wassermenge war in jeder Sekunde 2,327 Kubikfuß. Hienach ist:

$$a = \frac{2}{3\,.\,12} = \tfrac{1}{18}'; \ \lambda = 100'; \ h = \frac{5\tfrac{1}{2}}{12} = \tfrac{11}{24}' \text{ und } b = 4'.$$

Ferner $s = \tfrac{11}{6} \, \square'$ und $p = \tfrac{59}{12}'$

Bestimmt man daraus die Wassermenge, so wird

$$M = 90{,}9 \,.\, \tfrac{11}{6} \sqrt{\left[\frac{11\,.\,12}{6\,.\,59} \cdot \frac{1}{18\,.\,100}\right]} = 2{,}398 \text{ K. F.},$$

welche von den aus den Beobachtungen gefundenen 2,327′K. F. nur wenig abweichen, und so weit es hier erwartet werden kann, eine gute Uebereinstimmung geben.

131. §.

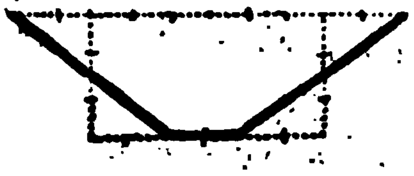
Die Gestalt, welche man einem Stromprofile bei unverändertem Flächeninhalte gibt, ist nicht gleichgültig; denn das Wasser wird desto langsamer fließen, je größer der Umfang des Profils in Bezug auf die zugehörige Fläche ist. Dieses ist mit eine von den vorzüglichsten Ursachen, daß sich die Geschwindigkeit der Flüsse bei einem niedrigen Wasserstande vermindert, und weshalb kleine Bäche, die mit großen Flüssen einerlei Gefälle haben, öfters weit langsamer fließen.

Unter allen Flächen hat die Kreisfläche den kleinsten Umfang, und da die Oberfläche des Wassers bei einem Profil als Umfang oder Wand, nicht in Rechnung kommt, so muß auch unter allen Profilen von gleichem Inhalte, dasjenige den kleinsten Umfang haben, welches einer halben Kreisfläche am nächsten kommt.

Eben dieses gilt von dem halben Quadrat in Absicht der vierseitigen Figuren, weshalb dasjenige rechtwinklichte Gerinne, welches zur Abführung einer bestimmten Wassermenge dienen soll, nicht nur das wenigste Holz erfordert, sondern auch das Wasser am schnellsten abführt, wenn die Höhe halb so groß als die Grundlinie ist.

Unter den trapezförmigen Profilen hat das halbe Sechseck den kleinsten Umfang, weil aber die Seitendossirungen desselben zu steil sind, so wird solches in der Ausübung nicht leicht angewandt werden. Um aber ein trapezförmiges Profil anzugeben, welches hinlängliche Dossirung

und dabei den möglichst kleinsten Umfang hat, so kann dazu



das rechtwinklichte Profil dienen, wenn man dessen Breite in sechs gleiche Theile theilt, und davon drei Theile zur Höhe, zehn Theile zur Oberbreite, und zwei Theile zur Unterbreite des trapezförmigen Profils nimmt, in welchem Falle alsdann die Grundlinie der Uferböschung $\frac{4}{3}$ von der Höhe ist.

Beide, sowohl das rechtwinklichte als das trapezförmige Profil, haben einerlei Inhalt und Umfang, und können daher als gleichgeltende angesehen werden.

Setzt man die Höhe eines solchen rechtwinklichten Profils $= e$, so ist

seine Breite $= 2\,e$
der Umfang $= 4\,e$
der Inhalt $= 2\,e^2$

Für das gleichgeltende trapezförmige Profil ist:

die Höhe $= e$
die Oberbreite $= \frac{10}{3}\,e$
die Unterbreite $= \frac{2}{3}\,e$
der Umfang $= 4\,e$
der Inhalt $= 2\,e^2$

und hienach überhaupt für dergleichen gleichgeltende Profile die mittlere Geschwindigkeit

$$c = 90{,}9\,\sqrt{\left(\frac{1}{2}\,e\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

die Wassermenge

$$M = 2\,e^2\,c$$
$$= 181{,}8\,e^2\,\sqrt{\left(\frac{1}{2}\,e\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

die Höhe

$$e = \sqrt{\frac{M}{2\,c}}$$
$$= \sqrt[5]{\left(\frac{M^2\,\lambda}{2\,.\,90{,}9^2\,\alpha}\right)}$$

das Gefälle

$$\alpha = \frac{c^2\,\lambda}{4131{,}4\,e}.$$

1. Beispiel. In einem rechtwinklichten Gerinne sollen in jeder Sekunde 15 Kubikfuß Wasser, mit einer mittlern Geschwindigkeit von 6 Fuß abgeführt werden; wie müssen die Abmessungen desselben beschaffen seyn, damit solches den kleinstmöglichen Abhang erhält?

$M = 15$, $c = 6$ daher:

die Höhe des Wassers im Gerinne

$$e = \sqrt{\tfrac{15}{12}} = 1{,}118 \text{ Fuß und}$$

hieraus die Breite

$$2e = 2{,}236 \text{ Fuß}$$

wonach man auf eine Weite von 120 Fuß das kleinstmögliche Gefälle findet

$$\alpha = \frac{36 \cdot 120}{4131{,}4 \cdot 1{,}118} = 0{,}935 \text{ Fuß}$$
$$= 11{,}22 \text{ Zoll.}$$

Im vorliegenden Falle fände man für ein gleichgeltendes trapezförmiges Profil die Oberbreite

$$\tfrac{10}{3}e = 3{,}72 \text{ Fuß}$$

und die Unterbreite

$$\tfrac{2}{3}e = 0{,}745 \text{ Fuß.}$$

Die gefundenen Abmessungen der Profile müssen deshalb zu dem kleinsten Gefälle gehören, weil sie dem geringsten Umfange des Profils entsprechen.

2. Beispiel. Man soll einen Kanal graben lassen, welcher auf 100 Ruthen 5 Zoll Gefälle hat, und der in jeder Sekunde 2500 Kubikfuß Wasser abführt. Wie müssen die Abmessungen seines Querprofils beschaffen seyn, damit solches die vortheilhafteste Gestalt erhält, bei welcher die wenigste Erde auszugraben nöthig ist?

Vorausgesetzt, daß die Grundlinie der Uferböschung $\tfrac{4}{3}$ der Höhe sei, so wird ein jedes anderes Profil, als das vorhin beschriebene, bei eben derselben Böschung und demselben Inhalte, einen größern Umfang geben. Aber der größere Umfang vermindert die Geschwindigkeit und erfordert daher einen größern Flächenraum des Profils, daher können nur die angegebenen Abmessungen in Ansehung der auszugrabenden Erde, und der davon abhängenden Kosten, die vortheilhafteste Gestalt geben.

Nun ist $M = 2500$, $\lambda = 100 \cdot 12 = 1200$ Fuß, und $\alpha = \frac{1}{12}$ Fuß. Aber

$$e = \sqrt[5]{\left(\frac{M^2 \lambda}{2 \cdot 90{,}9^2 \alpha}\right)}$$

oder wenn man sich der Logarithmen bedient,

$$\text{Log } e = \tfrac{1}{5} \text{ Log } \left(\frac{M^2 \lambda}{2 \cdot 90{,}9^2 \cdot \alpha}\right)$$

Hienach erhält man

$$\begin{array}{rl}
\text{Log } M^2 = 2 \text{ Log } M = & 6{,}7958800 \\
\text{Log } \lambda = & \underline{3{,}0791812} \\
\text{also Log } (M^2 \lambda) = & 9{,}8750612 \quad \text{:} \quad \text{:} \quad 9{,}8750612 \\
\text{Log } 90{,}9^2 = 2 \text{ Log } 90{,}9 = & 3{,}9171278 \\
\text{Log } 2\alpha = & \underline{0{,}9208187 - 1} \\
\text{also Log } (90{,}9^2 \cdot 2\alpha) = & 3{,}8379465 \quad \text{:} \quad \text{:} \quad \underline{3{,}8379465} \\
\text{Log } \left(\frac{M^2 \lambda}{2 \cdot 90{,}9^2 \alpha}\right) = & \underline{6{,}0371147} \\
\text{Log } e = \tfrac{1}{5} \text{ Log } \left(\frac{M^2 \lambda}{2 \cdot 90{,}9^2 \alpha}\right) = & 1{,}2074229
\end{array}$$

Nach den Tafeln stimmt hiezu die Zahl 16,122, daher ist für den Kanal

die Tiefe . . . . . $e = 16{,}122$ Fuß
die Oberbreite $\frac{10}{3} e = 53{,}74$ Fuß
die Unterbreite $\frac{2}{3} e = 10{,}75$ Fuß.

Zusatz. Bei der Untersuchung über die gleichförmige Bewegung des Wassers in Flußbetten ist allemal vorausgesetzt worden, daß die Oberfläche des Wassers mit der Sohle des Flußbetts parallel sei, weil unter dieser Bedingung nur der allgemeine Ausdruck im 127. §. Anwendung findet. Wäre bei einem Gerinne oder Kanal, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, die Sohle horizontal, so ist einzusehen, daß, wenn der Wasserspiegel mit der Sohle parallel wäre, das Wasser stillstehen müßte. Soll es fließen, so muß der Wasserspiegel gegen den Horizont geneigt seyn, also bei unveränderter Breite des Kanals, der obere Querschnitt, wo das Wasser in den Kanal fließt, höher als der untere Querschnitt am Ende des Kanals bei dem Ausflusse seyn.

Man setze, daß für den untern Querschnitt h und b die bekannte Bedeutung (128. §.) haben, daß dieser Querschnitt nebst der Wassermenge M bekannt sei. In einer Entfernung y von dem untern Querschnitt, oberhalb des Kanals, sei daselbst die Wassertiefe $= x$. Wächst nun y um dy, also x um dx, so

ist für die dünne Wasserschicht von der Dicke dy, der Abhang $\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{dx}{dy}$ daher (103. §. IV.)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{M^2 (b + 2x)}{\beta^2 b^2 x^3} \text{ oder } dy = \frac{\beta^2 b^2}{M^2} \cdot \frac{x^3 dx}{b + 2x}$$

wo $\beta^2 = 8262{,}8$ ist.

Hieraus erhält man, wenn

$b + 2x = z$ und $b + 2h = p$ gesetzt wird

$x = \frac{1}{2}(z - b)$; $dx = \frac{1}{2} dz$;

und wenn man diese Werthe substituirt und $\frac{\beta^2 b^2}{16 M^2} = A$ setzt

$dy = A (z^2 - 3zb + 3b^2 - \frac{b^3}{z}) dz$ also wenn man integrirt

$y = A (\frac{1}{3} z^3 - \frac{3}{2} b z^2 + 3 b^2 z - b^3 \text{ Log nat } z) + \text{Const.}$

Für $y = 0$ wird $x = h$ also $z = b + 2h = p$ daher

$\text{Const} = - A (\frac{1}{3} p^3 - \frac{3}{2} b p^2 + 3 b^2 p - b^3 \text{ Log nat } p)$ folglich

$$y = A \left[\tfrac{1}{3}(z^3 - p^3) - \tfrac{3}{2} b (z^2 - p^2) + 3 b^2 (z - p) - b^3 \text{ Log nat } \frac{z}{p} \right]$$

Setzt man für z und p die zugehörigen Werthe und kürzt ab, so wird

$$y = 2A \left[b^2 (x - h) - b (x^2 - h^2) + \tfrac{4}{3}(x^3 - h^3) - \tfrac{1}{2} b^3 \text{ L. nat } \frac{b + 2x}{b + 2h} \right]$$

Nun ist

$$\frac{b + 2x}{b + 2h} = 1 + \frac{2(x - h)}{b + 2h},$$

und weil nach bekannten Lehren

$\text{Log}(1 + u) = u - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{5} u^5 - \ldots$

so erhält man auch

$$\text{Log} \frac{b + 2x}{b + 2h} = \frac{2(x - h)}{b + 2h} - \frac{2(x - h)^2}{(b + 2h)^2} + \frac{8(x - h)^3}{3(b + 2h)^3} - \ldots$$

wenn man aber nur die beiden ersten Glieder dieser Reihe beibehält, weil das dritte und die folgenden Glieder so abnehmen, daß solche keinen merklichen Einfluß auf die Rechnung haben, so erhält man, wenn

$$\frac{2(x - h)}{b + 2h} - \frac{2(x - h)^2}{(b + 2h)^2} \text{ statt Log } \frac{b + 2x}{b + 2h}$$

in die Gleichung von y gesetzt, und die Glieder, welche sich aufheben, weggelassen werden

$$y = \tfrac{8}{3} A \left[x^3 - \frac{3bh(b + h)}{(b + 2h)^2} x^2 + \frac{3b^2h^2}{(b + 2h)^2} x - \frac{b^2 + bh + 4h^2}{(b + 2h)^2} h^3 \right]$$

wo allemal, wenn die Höhe x eines Querschnitts gegeben wird, die dazu gehörige Entfernung von demjenigen Querschnitte, dessen Abmessungen b, h sind, bestimmt werden kann.

Gewöhnlich ist die Länge $y = l$ gegeben, und man fragt nach der Höhe x, welche dieser Länge zugehört. In diesem Falle setze man in der obigen Gleichung l statt y und $\frac{\beta^2 b^3}{16 M^2}$ statt A; ordne die Gleichung nach den Potenzen von x, so entstehet der Ausdruck

$$x^3 - \frac{3bh(b+h)}{(b+2h)^2} x^2 + \frac{3b^2h^2}{(b+2h)^2} x = \frac{6lM^2}{\beta^2 b^3} + \frac{b^2+bh+4h^2}{(b+2b)^2} h^3$$

Die Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sind bekannte Größen, daher kann durch Auflösung dieser kubischen Gleichung, die Höhe x und das im Kanal erforderliche Gefälle $x - h$ bestimmt werden.

Beispiel. Für einen Kanal mit horizontalem Boden, dessen unterer Querschnitt 1 Fuß hoch ist, soll auf eine Entfernung von 1000 Fuß oberhalb, die Höhe des Querschnitts gefunden werden, wenn der Kanal durchgängig 5 Fuß breit ist, und in jeder Sekunde 10 Kubikfuß Wasser abfließen.

Hier ist $l = 1000$, $h = 1$, $b = 5$, und $M = 10$; daher erhält man statt des obigen Ausdrucks

$$x^3 - 1{,}83673\,x^2 + 1{,}53061\,x - 1{,}27479 = 0$$

Setzt man verschiedene Werthe für x, so ist

für $x = 1{,}4$ der Rest $+\,0{,}012$

für $x = 1{,}3$ der Rest $-\,0{,}192$

woraus man schließen kann, daß x zwischen $1{,}4$ und $1{,}3$ und zwar sehr nahe bei $1{,}4$ liegen muß.

Für $x = 1{,}39$ ist der Rest $-\,0{,}0101$

also, in Beziehung auf die Reste, sehr nahe die Höhe

$x = 1{,}394$ Fuß.

Der 1000 Fuß lange Kanal erfordert hienach ein Gefälle

$x - h = 0{,}394$ Fuß $= 4{,}7$ Zoll.

132. §.

Bei den bisherigen Untersuchungen ist nur von der mittleren Geschwindigkeit des Wassers in einem Querprofile die Rede gewesen. Die Geschwindigkeiten in jedem einzelnen Theile eines solchen Querschnitts können sehr verschieden seyn, nachdem mehrere Ursachen zur Vermehrung oder Verminderung derselben beitragen. So findet man zwischen geraden und parallelen Ufern, meistentheils in der Mitte des Wasserspiegels über der größten Tiefe, eine größere Geschwindigkeit, als auf beiden Seiten und nach dem

Grunde zu, welches sich auch sehr wohl aus dem Zusammenhange des Wassers längs den Wänden des Flußbettes und den daselbst entstehenden Hindernissen der Bewegung erklären läßt. Bei Stromkrümmungen befindet sich gewöhnlich die größte Geschwindigkeit näher nach dem konkaven als nach dem konvexen Ufer, welches von der Richtung des Stroms auf das konkave Ufer herrührt.

Die verschiedenen Geschwindigkeiten in der Oberfläche des fließenden Wassers sind Ursache, daß gewöhnlich die oberste Linie eines Querprofils, welche den Wasserspiegel bemerkt, nicht gerade, sondern gegen die Mitte höher als an den Seiten ist, weil das schneller fließende Wasser, weniger Seitendruck als das langsamer fließende äußert.

Genaue Beobachtungen über die verschiedenen Geschwindigkeiten in den Querschnitten eines Stroms, haben Brünings und Ximenes *) angestellt, und ob sich gleich aus diesen vortrefflichen Beobachtungen noch kein allgemeines Gesetz zur Bestimmung der Abnahme der Geschwindigkeit ableiten läßt, so geht doch so viel daraus hervor, daß die Geschwindigkeiten von oben nach unten zu abnehmen, und daß für einerlei Vertikallinie, bei größern Geschwindigkeiten an der Oberfläche, die Abnahmen bei einerlei Tiefen größer sind, als bei kleinern Geschwindigkeiten.

Nahe an der Oberfläche scheint zwar dieses Gesetz, nach den Brüningsschen Versuchen eine geringe Ausnahme

---

*) Man sehe hierüber:

Herrn Brünings Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, und von den Mitteln, dieselben auf allen Tiefen zu bestimmen. A. d. Holländischen übers. von Krönke, mit einer Vorrede von Herrn Wiebeking. Frankfurt a. M. 1798.

R. Woltmann, Beiträge zur hydraulischen Architektur. Dritter Band, Göttingen 1794, S. 295 u. f.

Ximenes Nuove sperienze Idrauliche, fatte ne' Canali e ne' Fiumi per verificare le principali leggi e fenomini delle acque correnti. Siena 1780.

zu leiden, indem zuweilen die größte Geschwindigkeit für eine bestimmte Tiefe etwas unter dem Wasserspiegel angegeben ist. Diese geringe Ausnahme kann aber, wenn nicht die größte Genauigkeit erfordert wird, aus der Acht gelassen werden, und man darf um so weniger darauf Rücksicht nehmen, weil es schwierig ist, mit dem Strommesser die Geschwindigkeit nahe an der Oberfläche genau anzugeben.

Anmerk. Vormals glaubte man, daß die Geschwindigkeiten des Wassers von oben nach unten zunehmen, aber schon Pitot (Description d'une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes, Mém. de l'acad. roy. des sciences. 1732. Edit. Batav. p. 504) führt Versuche auf der Seine an, nach welchen die Geschwindigkeiten von oben nach unten zu, abnehmen.

Von nachstehenden beiden Tafeln bezieht sich die erste auf Versuche des Abts Ximenes, die zweite aber auf die Brüningsschen Versuche. Die beiden letzten horizontalen Spalten derselben bestimmen die mittlere Geschwindigkeit in jeder Vertikale. Die Reihe I. gibt das Mittel aus den Erfahrungen, und II. nach der gleich folgenden Formel für v.

Tiefe unter der Oberfläche des Arno-Flusses.		Verhältniß der dazu gehörigen Geschwindigkeiten.	Geschwindigkeiten.
Soldi.	Rheinl. Fuß.		Rheinl. Zoll.
12,50	1,932	1000	38,398
18,75	2,898	987	37,898
25,00	3,864	972	37,322
31,25	4,830	971	37,284
37,50	5,796	943	36,209
43,75	6,763	944	36,247
50,00	7,729	939	36,055
56,25	8,695	940	36,094
62,50	9,661	939	36,055
68,75	10,627	911	34,980
75,00	11,593	911	34,980
81,25	12,559	890	34,174
87,50	13,526	874	33,559
93,75	14,492	862	33,099
100,00	15,458	848	32,561
106,75	16,502	780	29,950
mittlere Geschwindigkeit.	I.		35,304
	II.		36,159

Tiefe unter der Oberfläche.		Beobachtete Geschwindigkeiten					
		Namen der Flüsse, in welchen die Beobachtungen angestellt sind.					
		Nieder-Rhein.	Ober-Rhein.	Nieder-Rhein.	Waal.	Ober-Rhein.	Waal.
Rhl. Fuß.		Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.	Rhl. Z.
1		56,76	56,11	54,79	46,87	41,02	27,06
2		55,45	53,44	55,45	46,08	42,78	25,67
3		54,12	54,79	51,46	44,46	41,04	25,67
4		54,12	55,45	53,43	46,87	40,13	24,21
5		54,79	54,79	54,12	46,08	41,92	24,21
6		52,75	52,75	54,12	46,08	40,13	24,21
7		52,75	54,12	53,43	44,46	39,21	
8		54,79	52,05	52,75	43,63	37,30	
9		50,62	52,05	53,43	43,63	36,30	
10		50,62	51,46	51,46	44,46		
11		46,08	46,87	49,98	42,78		
12		45,28	44,46	48,40	41,04		
13		44,46	46,87	43,28	38,27		
14		46,08	43,63		36,30		
15			41,04		35,28		
mittlere Geschwindigkeit.	I.	51,278	50,941	52,293	43,243	40,463	25,388
	II.	53,808	52,967	52,160	44,245	40,578	26,518

133. §.

Die mittlere Geschwindigkeit in einem Querprofile muß nicht mit der mittleren Geschwindigkeit, welche in irgend einer vertikalen Tiefe desselben, vom Wasserspiegel bis aufs Grundbette, Statt findet, verwechselt werden, weil dieses nur die mittlere Geschwindigkeit für eine Linie, jenes aber für eine Fläche ist.

Aus den angeführten Versuchen läßt sich so lange, bis Theorie und mehrere Erfahrungen nichts mehr zu wünschen übrig lassen, eine diesen Versuchen größtentheils entsprechende Regel für die Ausübung ableiten, um für eine bestimmte vertikale Tiefe, wenn die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Wassers gemessen ist, die dazu gehörige

mittlere Geschwindigkeit zu finden. Sie ist von mir in den Zusätzen zum ersten Theile in der Buatschen Hydraulik S. 125 mitgetheilt, und daselbst mit mehreren Beobachtungen verglichen.

Wenn nemlich

c die Geschwindigkeit des Wassers in der Oberfläche,
h die dazu gehörige vertikale Wassertiefe, und
v die mittlere Geschwindigkeit in dieser Tiefe bezeichnet,

so kann man den Beobachtungen gemäß im Durchschnitte annehmen, daß sich die Geschwindigkeit des Wassers, auf jeden Fuß Tiefe, um einen Theil

$$= 0{,}008 \, . \, c$$

vermindert, so daß auf die ganze Tiefe von h Fuß, die Geschwindigkeit c um $0{,}008 \, . \, c \, . \, h$ abgenommen hat, und daher am Grundbette $= c - 0{,}008\,ch$ ist. Aus der obern und untern Geschwindigkeit findet man die mittlere

$$v = \frac{c + c - 0{,}008 \, . \, ch}{2} = c - 0{,}004\,ch \text{ oder}$$

$$v = c\,(1 - 0{,}004\,h)$$

wo sich alle Größen auf rheinländische Fuße beziehen. Wird c in Zollen ausgedrückt, so erhält man v ebenfalls in Zollen.

Beispiel. Für eine Tiefe $h = 12$ Fuß sei die Geschwindigkeit c an der Oberfläche $= 3$ Fuß, so ist die mittlere Geschwindigkeit für diese Vertikale

$$v = 3\,(1 - 0{,}004 \, . \, 12) = 2{,}856 \text{ Fuß.}$$

Anmerk. Wenn man für eine gegebene Tiefe zu jeder bestimmten Entfernung die entsprechenden Geschwindigkeiten senkrecht aufträgt, so entstehet daraus eine Stromgeschwindigkeitsscale. Ist die Linie, welche durch die Endpunkte der Geschwindigkeiten geht, gerade, so heißt sie eine gerade; ist sie krumm, z. B. eine umgekehrte Parabel, so heißt sie parabolisch.

Herr Wasserbaudirektor Woltmann nimmt an *), daß diese

*) Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels, von R. Woltmann. Hamburg 1790. S. 47.

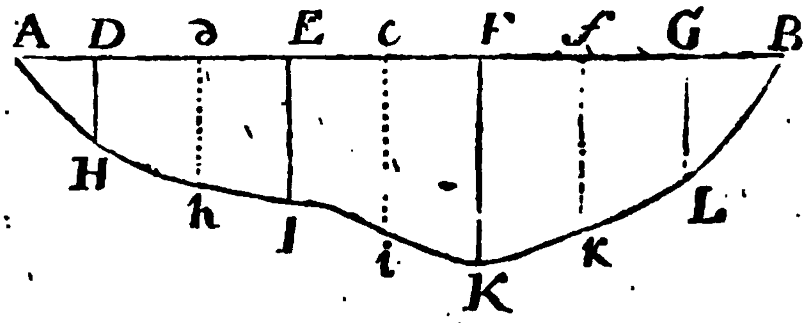
Scale einer umgekehrten Parabel entspreche, von welcher Voraussetzung aber Herr Rath Langsdorf sehr gegründet (Hydraulik 189. §.) anführt, daß sie sich von den wirklichen Beobachtungen zu sehr entferne; weil aber, außer dieser Voraussetzung, die vorhandenen Versuche noch unzählig viele andere Hypothesen zulassen, da es noch zu sehr an einem Geschwindigkeitsmesser fehlt, welcher in jeder Tiefe die Geschwindigkeit des Wassers so genau angibt, daß man mit Zuverlässigkeit hierüber etwas entscheiden könnte, so ist die von mir angegebene Formel deshalb gewählt, weil sie möglichst einfach für die Ausübung ist, und sich nie weit von den bekannten Erfahrungen entfernt. Wenn erst einmal, unter allen möglichen Umständen, zuverlässige Versuche bekannt sind, dann wird sich hierüber etwas mit Gewißheit bestimmen lassen, welches aber jetzt noch zu früh ist, daher man sich mit einer leichten Annäherung behelfen muß.

134. §.

Weil es in einem unregelmäßigen Flusse nicht möglich ist, die Wassermenge desselben, nach der 130. §. gefundenen allgemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen zu bestimmen, so bleibt nichts übrig, als mit Hülfe eines brauchbaren Stromgeschwindigkeitsmessers, die einzelnen Geschwindigkeiten eines Querprofils auszumitteln, und hienach die Wassermenge zu berechnen. Da es aber ebenfalls in der Ausübung, und besonders bei tiefen Flüssen, nicht leicht ist, die verschiedenen Geschwindigkeiten in jeder Tiefe zu messen, und man selten mit einem Instrument versehen ist, um die Geschwindigkeiten bis auf das Grundbett genau zu finden, so muß man sich in den meisten Fällen mit Bestimmung der Geschwindigkeiten an der Oberfläche des Wassers begnügen, da man dann die mittlere Geschwindigkeit für jede Tiefe nach dem vorhin gefundenen Ausdruck berechnen kann.

Zur Ausmessung der Geschwindigkeit des Wassers nahe an der Oberfläche kann man sich des im XXIV. Kapitel 280. §. beschriebenen Stromquadranten bedienen, welcher sich unter allen Instrumenten, die hiezu angewandt werden können, vorzüglich empfiehlt. Kommt es demnächst darauf an, die Wassermenge eines Flusses zu bestim-

men, so wird erfordert, daß man sich eine solche Stromgegend wähle, wo das Bett fest und nicht sehr uneben ist, die Ufer aber auf eine gewisse Weite in gerader paralleler Richtung gehen. Daselbst wird in einer auf die Richtung des Stroms senkrechten Fläche, ein Querprofil ABKH dergestalt gemessen, daß man auf der Oberfläche AB in verschiedenen Entfernungen AD, DE, EF, FG, GB die dazu gehörigen Tiefen DH, EI, FK, GL mit dem Senkblei mißt, und zugleich die dazu gehörigen Geschwindigkeiten an der Oberfläche bei D, E, F, G beobachtet, woraus dann leicht die mittlere Geschwindigkeit für jeden vertikalen Streifen, und hieraus die Wassermenge gefunden werden kann.



Wenn z. B. bei einer Ausmessung die Weiten AD = 5, DE = 6, EF = 6, FG = 6, GB = 3 Ruthen, und die Tiefen DH = 4, EI = 7, FK = 10, GL = 6 Fuß gefunden sind. Wenn ferner die Geschwindigkeiten in der Oberfläche bei D = 2,8; bei E = 3,1; bei F = 4,5 und bei G = 3,2 Fuß beobachtet sind, so kann hieraus leicht die mittlere Geschwindigkeit für jede zugehörige Tiefe gefunden werden. Theilt man alsdann die Weiten DE, EF, FG durch d, e, f in gleiche Theile, und zieht die Vertikallinien dh ei, fk, so darf nur der Inhalt jeder Fläche, wie Adh, deih, efki, fBk, mit der dazu gehörigen mittlern Geschwindigkeit multiplizirt werden, so gibt die Summe aller Produkte die gesuchte Wassermenge.

Es sei der Inhalt von Adh = 288 □ Fuß
deih = 504 " "
efki = 710 " "
fBk = 432 " "

und die berechneten mittleren Geschwindigkeiten
für DH = 2,755 Fuß
für EI = 3,013 "
für FK = 4,320 " und
für GL = 3,125 "

so erhält man hiedurch die Wassermenge für die Fläche

Adh	=	288 . 2,755	=	793,4	Kubikfuß	
deih	=	504 . 3,013	=	1518,5	„	„
efki	=	710 . 4,320	=	3067,2	„	„
fBk	=	432 . 3,123	=	1349,1	„	„
				6728,2	Kubikfuß.	

Es fließen daher durch das ganze Stromprofil ABKH in jeder Sekunde 6728,2 K. F. Wasser.

Die Ausmessung der Stromprofile bei breiten Strömen ist mit Schwierigkeiten verbunden und erfordert besondere Kunstgriffe. Einige Mittel, dergleichen Profile aufzunehmen, findet man in meinen Zusätzen zu du Buats Hydraulik, S. 130.

135. §.

Ueber die Bewegung des Wassers in Flüssen, findet man außer den bereits angeführten Langsdorf-, Bossut- und Buatschen Schriften, noch in nachstehenden Unterricht:

Herrn Bernhard's, Neue Grundlehren der Hydraulik, mit ihrer Anwendung auf die wichtigsten Theile der Hydrotechnik. A. d. Französischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von K. C. Langsdorf. Leipzig und Frankfurt 1790. 5tes Kapitel. S. 278 u. f.

J. F. Lempe, Lehrbegriff der Maschinenlehre, mit Rücksicht auf den Bergbau. Ersten Theils zweite Abtheilung, oder der technischen Maschinenlehre zweiter Band. Leipzig 1797. 2tes Kap. S. 10 u. f.

Fabre, Essai sur la théorie des torrens et des rivières, à Paris. An VI (1797). I. Part. Sect. 1—5. p. 2. etc.

Wiebeking und Krönke, Allgemeine auf Geschichte und Erfahrung gegründete theoretisch-praktische Wasserbaukunst. Erster Band. Darmstadt 1798. S. 391 u. f.

P. S. *Girard*, Essai sur le mouvement des eaux courantes, et la figure qu'il convient de donner aux canaux etc. à Paris, 1804.

Prony, Recherches Physico-mathematiques sur la théorie des eaux courantes. à Paris, 1804.

Noch befinden sich von mir, in den Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin, Jahrg. 1814—15. Berlin 1818. S. 137. u. Jahrg. 1818—19. Berl. 1820. S. 9. Untersuchungen über die Bewegung des Wassers, wenn auf die Contraction, welche beim Durchgange durch verschiedene Oeffnungen Statt findet, und auf den Widerstand, welcher die Be-

wegung des Wassers längs den Wänden der Behältnisse verzögert, Rücksicht genommen wird,
in welcher außer den Bossut, Michelotti, Dubuat, Brünings und Woltmannschen auch auf die Funkschen Versuche Rücksicht genommen ist. Die letztern Versuche findet man in
F. C. T. Funk, Beiträge zur allgemeinen Wasserbaukunst. Lemgo 1808.
und in dessen
Versuch einer Darstellung der wichtigsten Lehren der Hydrotechnik. Berlin 1820.

Achtes Kapitel.

Vom Abflusse und Aufstau bei Wehren, Ueberfällen und Einbauen, in Flüssen und Kanälen.

---

136. §.

Bei Ueberfällen in einem Flusse kann man in Absicht des Ausflusses unterscheiden:

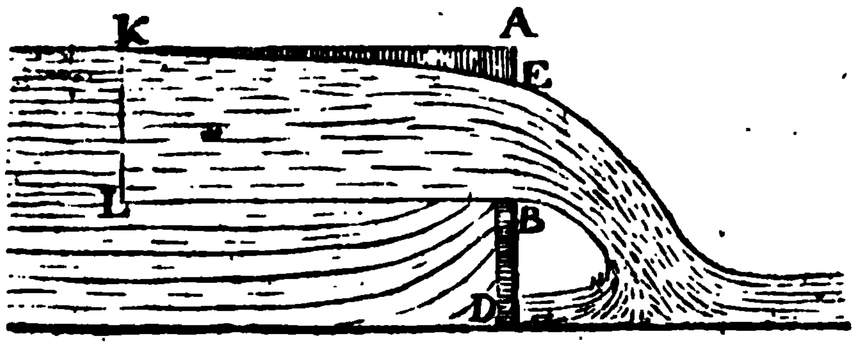
a) vollkommene Ueberfälle (*Reversoirs complets*), wenn der Wasserspiegel des Unterwassers niedriger als die Oberfläche der Ueberlaßschwelle liegt, und

b) unvollkommene Ueberfälle (*Reversoirs non complets, Demi-reversoirs*), wo der Wasserspiegel des Unterwassers höher als die Ueberlaßschwelle liegt.

Bei den Ueberfällen in Flüssen und Kanälen ist der Unterschied zwischen den im dritten Kapitel betrachteten zu bemerken, daß das Wasser hier schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit vor dem Ueberfalle ankommt, und daher der ungesenkte Wasserspiegel nicht horizontal angenommen werden kann.

Zieht man von da, wo der Wasserspiegel oberhalb des Wehres noch beinahe horizontal ist, und mit dem vorherfließenden Wasser einerlei Neigung hat, eine Horizontale KA. bis über das Wehr, so ist AB der Wasserstand des Wehrs oder Ueberfalls. Man setze daß

$h = AB$ den Wasserstand,
$k = BD$ die Höhe des Ueberfalls,
b die Breite desselben,
B die mittlere Breite des Flußbettes, und
M die Wassermenge bezeichnet, so ist



$\frac{M}{(h+k)B}$ die mittlere Geschwindigkeit des Wassers vor dem Ueberfalle, zu deren Hervorbringung, mit Bezug auf die Ausflußöfnung, eine Druckhöhe

$$\left(\frac{M}{\alpha \cdot B(h+k)}\right)^2$$

erfordert wird.

Bei Ueberfällen, wo man den obern Wasserspiegel als stillstehend annehmen kann, wäre der erforderliche Wasserstand (107. §.)

$$= \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}}$$

weil aber das Wasser oberhalb des Ueberfalls schon eine Geschwindigkeit besitzt, welcher die Höhe $\left(\frac{M}{\alpha \cdot (h+k)B}\right)^2$ zugehört, so wird dadurch im vorliegenden Falle, ein Theil des erforderlichen Wasserstandes entbehrlich, und man erhält den Wasserstand bei einem vollkommenen Ueberfalle

$$h = \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{M}{\alpha(h+k)B}\right)^2$$

oder wenn man für Ueberfälle ohne Flügelwände $\alpha = 5$ setzt, so ist

$$h = \left(\frac{3M}{10 \cdot b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{0{,}2 \cdot M}{(h+k)B}\right)^2.$$

Für Ueberfälle mit Flügelwänden, oder wenn B = b ist, erhält man $\alpha = 6,76$ (100. §.) also

$$h = \left(\frac{2\,M}{9\,.\,b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{0,148\,.\,M}{(h+k)\,B}\right)^2$$

Zur Bestimmung von h ist zwar diese Größe selbst noch im zweiten Gliede vorhanden, weil aber der Werth dieses Gliedes nur klein ist, so wird man mit Hülfe einer Näherungsmethode den wahren Werth von h so genau bestimmen können, als es erfordert wird, ohne deßhalb die Gleichung noch verwickelter zu machen.

Beispiel. In einem 100 Fuß breiten und 4 Fuß tiefen Flusse, welcher in jeder Sekunde 1400 Kubikfuß Wasser abführt, soll ein vollkommener Ueberfall 5 Fuß hoch und 80 Fuß breit erbaut werden; man fragt, wie viel wird die Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle betragen, wenn der Ueberfall mit keinen Flügelwänden versehen ist?

Es ist $b = 80$; $B = 100$; $k = 5$ Fuß, und $M = 1400$ Kubikfuß, daher die Höhe

$$h = \left(\frac{3\,.\,1400}{10\,.\,80}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{0,2\,.\,1400}{100\,(5+h)}\right)^2$$

Nun ist $\left(\frac{3\,.\,1400}{10\,.\,80}\right)^{\frac{2}{3}} = 3,021$

Setzt man daher etwa $h = 3$, so findet man das letzte Glied der Gleichung

$$\left[\frac{0,2\,.\,1400}{100\,(5+3)}\right]^2 = 0,122$$

folglich die gesuchte Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle

$$h = 3,021 - 0,122 = 2,899 \text{ Fuß}$$

wofür man ohne Nachtheil

$h = 2,9$ Fuß annehmen kann.

Hienach ist die ursprüngliche Oberfläche des Flusses, oberhalb des Ueberfalles, um

$5 - 4 + 2,9 = 3,9$ Fuß erhöhet.

137. §.

Um die Breite des Ueberfalls zu entwickeln, so ist

$$h = \left(\frac{3\,M}{10\,.\,b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{0{,}2\,.\,M}{B\,(h+k)}\right)^2 \text{ oder}$$

$$h + \left(\frac{0{,}2\,.\,M}{B\,(h+k)}\right)^2 = \left(\frac{3\,M}{10\,.\,b}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ oder}$$

$$\left[h + \left(\frac{0{,}2\,.\,M}{B\,(h+k)}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{3\,M}{10\,.\,b} \text{ folglich}$$

die Breite des Ueberfalls

$$b = \frac{3\,M}{10\,.\left[h + \left(\frac{0{,}2\,.\,M}{B\,(h+k)}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Beispiel. In einem Flusse, dessen mittlere Breite 100 Fuß, und dessen Wassermenge in jeder Sekunde 1672 Kubikfuß beträgt, soll ein 5 Fuß hoher vollkommener Ueberfall ohne Flügelwände angelegt werden. Wie breit muß die Oefnung des Ueberfalls seyn, damit die Wasserhöhe über demselben 4 Fuß betrage?

Hier ist $M = 1672$, $h = 4$, $k = 5$ und $B = 100$, daher die Breite des Ueberfalls

$$b = \frac{3\,.\,1672}{10\,.\left[4 + \left(\frac{0{,}2\,.\,1672}{100\,.\,9}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 59{,}59 \text{ F.}$$

138. §.

Die Wassermenge M zu bestimmen muß ein ähnliches Verfahren wie 136. §. beobachtet werden. Man setze

$$\left(\frac{M}{\alpha B\,(h+k)}\right)^2 = N \text{ so ist}$$

$$\left(\frac{M}{\frac{2}{3}\,\alpha\,b}\right)^{\frac{2}{3}} - N = h \text{ oder}$$

$$\left(\frac{M}{\frac{2}{3}\,\alpha\,b}\right)^{\frac{2}{3}} = h + N \text{ daher}$$

$$\frac{M}{\frac{2}{3}\,\alpha\,b} = (h+N)^{\frac{3}{2}} \text{ und hieraus}$$

die Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3}\,\alpha\,b\,(h+N)^{\frac{3}{2}}$$

Für einen Ueberfall ohne Flügelwände ist

$$M = \tfrac{10}{3} b (h + N)^{\frac{3}{2}}$$

und mit Flügelwänden

$$M = \tfrac{2}{2} b (h + N)^{\frac{3}{2}}$$

Bei der Bestimmung des Werths von M kann man zuerst $N = 0$ setzen, daraus sehr nahe M finden, und wenn dieser Werth in N gesetzt wird, so ergibt sich alsdann die Wassermenge mit hinlänglicher Genauigkeit.

Beispiel. Wie viel Wasser wird über einen vollkommenen Ueberfall ohne Flügelwände in jeder Sekunde fließen, von welchem bekannt ist, daß seine Breite 62, seine Höhe 5 Fuß, die Höhe des Oberwassers über dem Ueberfalle 4, und die ganze Breite des Flusses vor dem Ueberfalle 100 Fuß beträgt?

Weil $h = 4$, $b = 62$, $B = 100$, und $k = 5$ Fuß ist, so erhält man, wenn $N = 0$ gesetzt wird

$$\tfrac{10}{3} b \sqrt{h^3} = \tfrac{10}{3} \cdot 62 \cdot \sqrt{64} = 1653{,}3.$$

Mittelst dieses ungefähren Werths für M kann man N berechnen und erhält

$$N = \left(\frac{0{,}2 \cdot 1653{,}3}{100 \cdot (4 + 5)}\right)^2 = 0{,}135$$

daher ist die gesuchte Wassermenge etwas kleiner als

$$M = \tfrac{10}{3} \cdot 62 \, (4{,}135)^{\frac{3}{2}} = 1737{,}7 \text{ Kubikfuß.}$$

Anmerkung. Der oben gefundene Werth von der Wassermenge M, ist eigentlich nur ein Näherungswerth. Eine vollständige Bestimmung führt aber auf sehr weitläuftige Ausdrücke, wie man sich aus der folgenden Untersuchung überzeugen kann.

Vorausgesetzt, daß das Wasser, ehe es vor der Ausflußöffnung anlangt, die Geschwindigkeit $c = \frac{M}{B(h+k)}$ besitzt, so werden die einzelnen Wassertheile in der Ausflußöffnung so gepreßt, als wenn ein Druck von der Höhe $\frac{c^2}{\alpha^2}$ schon vorhanden wäre. Jeder Punkt der Ausflußöffnung, dessen Tiefe unter dem Wasserspiegel $= x$ sei, leidet daher einen Druck von der Höhe $\frac{c^2}{\alpha^2} + x$ und diese Druckhöhe erzeugt eine Geschwindigkeit

$v = \alpha\sqrt{\left(\frac{c^2}{\alpha^2} + x\right)}$ (100 §.), wenn v die Geschwindigkeit desjenigen Wassertheilchens in der Ausflußöffnung bezeichnet, dessen Tiefe unter dem Wasserspiegel $= x$ ist. Die gesammte Wassermenge m, welche vom Wasserspiegel ab, bis zur Tiefe x in der Breite b abfließt, ist daher

$$m = \int b v dx = \alpha b \int dx \sqrt{\left(\frac{c^2}{\alpha^2} + x\right)} = \tfrac{2}{3}\alpha b\left(\frac{c^2}{\alpha^2} + x\right)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $m = 0$ also $0 = \frac{2}{3}\alpha b \frac{c^3}{\alpha^3} + \text{Const.}$ oder

$\text{Const.} = -\frac{2}{3}\alpha b \frac{c^3}{\alpha^3}$ daher das vollständige Integral

$$m = \tfrac{2}{3}\alpha b \left[\left(\frac{c^2}{\alpha^2} + x\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{c^3}{\alpha^3}\right].$$

Für $x = h$ wird $m = M$, also

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha b \left[\left(\frac{c^2}{\alpha^2} + h\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{c^3}{\alpha^3}\right]$$

oder weil $c = \frac{M}{B(h+k)}$ ist, so erhält man zur Vergleichung der Werthe b, B, h, k und M nachstehenden Ausdruck:

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha b \left[\left(h + \frac{M^2}{\alpha^2 B^2 (h+k)^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{M^3}{\alpha^3 B^3 (h+k)^3}\right]$$

welcher bis auf das letzte Glied, welches nie bedeutend seyn kann, mit dem bereits gefundenen überein kommt. Zur Uebersicht der Genauigkeit, mit welcher im vorstehenden Beispiele M berechnet worden ist, setze man, weil dieser Werth für M offenbar etwas zu groß ist, $M = 1735$ als Näherungswerth, so wird nach dem vorstehenden Ausdruck

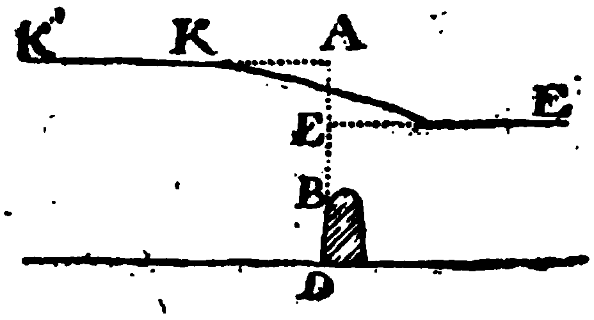
$$M = \tfrac{10}{3} \cdot 62 \left[\left(4 + \frac{0{,}04 \cdot 1735^2}{100^2 \cdot 9^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{0{,}008 \cdot 1735^3}{100^3 \cdot 9^3}\right]$$

$$= \tfrac{620}{3}\left(8{,}45008 - 0{,}05731\right) = 1734{,}5 \text{ K. F.}$$

so daß hienach M zwischen 1734,5 und 1735 liegen muß.

139. §.

Bei unvollkommenen Ueberfällen, wo der Spiegel des Unterwassers EE' höher als die Ueberlaßschwelle oder der Scheitel B des Wehrs BD liegt, läßt sich der Abfluß des Wassers so ansehen, als wenn dasselbe von der



Höhe AE, wie bei einem vollkommenen Ueberfall abflösse; durch den übrigen Theil EB aber, wo das Unterwasser gegen stehet, kann sich die Geschwindigkeit nicht mehr vermehren, daher wird solches durch EB mit derjenigen Geschwindigkeit ausfließen, welche der Höhe AE zugehört.

Den lothrechten Abstand des ungesenkten Oberwasserspiegels vom Spiegel des Unterwassers oder AE nennt man die Stauhöhe, welches eigentlich diejenige Höhe ist, auf welche sich der Oberwasserspiegel durch den Einbau des Wehrs BD erhoben hat.

Nimmt man zu Erleichterung der Rechnung, den Spiegel des Oberwassers K'K als stillstehend oder horizontal an, und setzt, daß

h = ED die Tiefe des Flusses unterhalb des Wehrs,
H = AE die Stauhöhe,
k = BD die Höhe des Wehres,
b die Breite desselben,
B die Breite des Flusses, und
M die Wassermenge bezeichne,

so ist die durch AE fließende Wassermenge, wie bei einem vollkommenen Ueberfall 103. §.

$$\tfrac{2}{3}\,\alpha\, bH\sqrt{H}.$$

Nun ist ferner EB = h — k und die in E erlangte Geschwindigkeit $= \alpha\sqrt{H}$, daher die mit dieser Geschwindigkeit abfließende Wassermenge durch BE

$$\alpha\, b\,(h-k)\sqrt{H}$$

Beide Wassermengen zusammengenommen, geben den ganzen Abfluß über das Wehr, daher

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha bH\sqrt{H} + \alpha b\,(h-k)\sqrt{H} \text{ oder}$$
$$= \alpha\,(\tfrac{2}{3}H + h - k)\, b\sqrt{H}.$$

In der Voraussetzung, daß das Wasser oberhalb des Wehrs als stillstehend angesehen wird, und der Ueberfall mit keinen Flügelwänden versehen ist, erhält man die Wassermenge

$$M = 5\,(\tfrac{2}{3}H + h - k)\, b\sqrt{H}$$

und wenn das Wehr Flügelwände hat

$$M = 6{,}76\ (\tfrac{2}{3} H + h - k)\ b \sqrt{H}.$$

Beispiel. An dem Ausflusse eines Sees befindet sich ein 2 Fuß hoher und 10 Fuß breiter unvollkommener Ueberfall ohne Flügelwände. Die Tiefe des Wassers unterhalb des Wehrs ist 3 Fuß, und die Höhe des Aufstaues 4 Fuß; man fragt, wie viel Wasser wird in jeder Sekunde abfließen?

$h = 3$, $k = 2$, $H = 4$ und $b = 10$, daher die gesuchte Wassermenge

$$M = 5\ (\tfrac{2}{3} \cdot 4 + 3 - 2)\ 10 \sqrt{4} = 366{,}6 \text{ K. F.}$$

140. §.

Wenn sich der unvollkommene Ueberfall in einem Flusse befindet, wo das Wasser schon mit einer gewissen Geschwindigkeit vor demselben anlangt, und nicht als stillstehend angesehen werden kann, so erhält man nach 138. §. die durch AE fließende Wassermenge =

$$\tfrac{2}{3} \alpha b\ (H + N)^{\frac{3}{2}}$$

die Geschwindigkeit in E ist alsdann $= \alpha \sqrt{(H + N)}$ daher die durch EB fließende Wassermenge =

$$\alpha b\ (h - k) \sqrt{(H + N)}$$

Diese beiden Abflüsse zusammengenommen geben die gesammte Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3} \alpha b\ (H + N) \sqrt{(H + N)} + \alpha b\ (h - k) \sqrt{(H + N)}$$

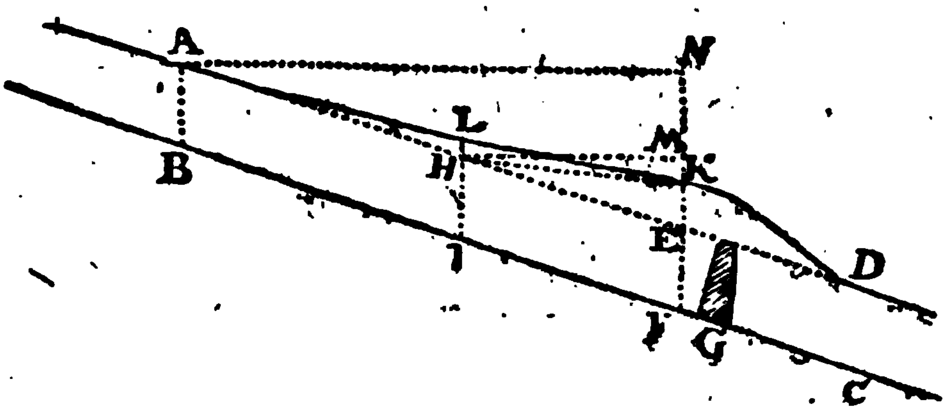
$$= \alpha b\ [\tfrac{2}{3}\ (H + N) + h - k] \sqrt{(H + N)}$$

wo $N = \left(\frac{M}{\alpha B\ (H + h)}\right)^2$ ist.

Die Anwendung dieser Formel in besondern Fällen verursacht eine etwas weitläuftige Rechnung, wie man sich aus meinen Zusätzen zu Buats Hydraulik, S. 291. überzeugen kann.

141. §.

Die ursprüngliche Oberfläche AED eines Flusses, dessen Sohle BC mit dem Wasserspiegel parallel ist, sei durch den Einbau eines Wehrs bis zur größten



Höhe K angeschwellt oder aufgestauet, so ist KE die Stauhöhe (*Hauteur du remou*). Die durch den Einbau G verursachte Anschwellung erstrecke sich bis A, woselbst der Fluß noch seine ursprüngliche Tiefe hat, so nennt man AK die Stauweite (*Amplitude du remou*).

Man setze die Stauhöhe KE = H und ziehe zu der Oberfläche des Aufstaues LK in K die Tangente KH bis an den ursprünglichen Wasserspiegel des Flusses; ferner sei auf irgend eine Länge λ H

α das ursprüngliche Gefälle des Flusses,

α' das Gefälle im höchsten Punkte bei K;

zieht man nun HM horizontal, so verhält sich

$$\alpha : \lambda = ME : HM \text{ und}$$
$$\lambda : \alpha' = HM : MK \text{ daher}$$
$$\alpha : \alpha' = ME : MK \text{ oder}$$
$$\alpha - \alpha' : \alpha' = ME - MK : MK$$

Nun ist ME − MK = KE = H daher

$$MK = \frac{H \cdot \alpha'}{\alpha - \alpha'}$$

Aus der vorstehenden Proportion erhält man ferner

$$HM = \frac{\lambda}{\alpha'} MK \text{ oder}$$

$$HM = \frac{\lambda}{\alpha'} \frac{H \cdot \alpha'}{\alpha - \alpha'} = \frac{\lambda \cdot H}{\alpha - \alpha'}$$

Setzt man nun nach Buat (Hydr. 154. §.) die Stauweite AK = $\frac{1}{1}\frac{2}{0}$ HM so wird, wenn A die Stauweite A = AK bezeichnet

$$A = \tfrac{12}{10} \frac{H \lambda}{\alpha - \alpha'}$$

Nach 128. §. IV. ist, wenn die Breite des Flusses $= b$ und die ursprüngliche Tiefe $= h$ gesetzt wird

$$\alpha = \frac{c^2 (b + 2h) \lambda}{8262,8\, bh}$$

oder wenn man die Wassermenge M setzt, so ist

$$\frac{M}{bh} = c \text{ oder } \frac{M^2}{b^2 h^2} = c^2 \text{ daher}$$

$$\alpha = \frac{M^2 (b + 2h) \lambda}{8262,8\, b^3 h^3}$$

und auf eine ähnliche Art

$$\alpha' = \frac{M^2 [b + 2(H + h)] \lambda}{8262,8\, b^3 (H + h)^3}$$

Werden die hier gefundenen Ausdrücke für α, α' in die Gleichung von A gesetzt und gehörig abgekürzt, so erhält man die Stauweite

$$A = \frac{15700\, H b^3}{M^2 \left(\frac{b + 2h}{h^3} - \frac{b + 2(H + h)}{(H + h)^3} \right)}$$

$$= \frac{15700\, H b^3 h^3 (H + h)^3}{M^2 [(b + 2h)(H + h)^3 - (b + 2(H + h)) h^3]}$$

Beispiel. Durch einen Einbau ist die Oberfläche eines Baches 2 Fuß hoch aufgestauet worden; wie weit erstreckt sich dieser Aufstau, wenn bekannt ist, daß die Wassermenge des Baches in jeder Sekunde 40 Kubikfuß, seine Breite 4 Fuß, und seine mittlere Tiefe 3 Fuß beträgt?

$H = 2$, $h = 3$, $b = 4$ und $M = 40$ daher die gesuchte Stauweite

$$A = \frac{15700 \cdot 2 \cdot 64 \cdot 27 \cdot 125}{1600 [10 \cdot 125 - 14 \cdot 27]} = 4861 \text{ Fuß}$$

$$= 405 \text{ Ruthen } 1 \text{ Fuß.}$$

142. §.

Nach den Ueberfällen, wodurch das Grundbette eines Flusses erhöht wird, können noch durch Einbaue von Brükken, Buhnen ꝛc., welche die Breite des Flußbettes allein verengen, Anschwellungen bewirkt werden.

Setzt man die Breite des Flusses vor Anlegung des
B Einbaues $= B$, die Breite, in welcher das Wasser nach dem
b Einbaue abfließt $= b$, die mittlere Geschwindigkeit des

Wassers bei der Breite $B = c$, und die Höhe, um welche der Wasserspiegel bei dem Einbaue erhöht wird oder die **Stauhöhe** $= H$, so ist die zwischen dem Einbaue erforderliche Geschwindigkeit $= \frac{cBh}{b(h+H)}$, zu deren Hervorbringung eine Höhe

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{cBh}{b(h+H)}\right)^2$$

nöthig wäre. Weil aber das Wasser schon die Geschwindigkeit c besitzt, wozu die Druckhöhe $\frac{c^2}{\alpha^2}$ gehört, so darf sich die Oberfläche des Wassers nur noch um die Größe

$$\frac{c^2}{\alpha^2}\left(\frac{Bh}{b(h+H)}\right)^2 - \frac{c^2}{\alpha^2}$$

erheben, damit die erforderliche Geschwindigkeit zwischen dem Einbau erzeuget wird.

Hienach wird die **Stauhöhe**

$$H = \frac{c^2}{\alpha^2}\left[\left(\frac{Bh}{b(h+H)}\right)^2 - 1\right]$$

In dem vorstehenden Ausdruck könnte man H entwikkeln. Weil aber dadurch ein weitläuftiger Ausdruck entsteht, so kann man zuvörderst, um einen ungefähren Werth zu finden, $H = \frac{c^2}{\alpha^2}\left(\frac{B^2}{b^2} - 1\right)$ setzen und mit Hülfe dieses, etwas zu großen Werthes, H nach der vorstehenden Formel berechnen.

Für Brückenpfeiler mit spitzen Vordertheilen, oder bei schrägen Einbauen, erhält man (100. §.) $\alpha = 7,54$ daher

$$H = 0,0176\ c^2\left[\left(\frac{Bh}{b(h+H)}\right)^2 - 1\right]$$

und bei Brückenpfeilern mit geraden Vordertheilen, oder bei steilen Einbauen ist $\alpha = 6,76$ daher

$$H = 0,0219\ c^2\left[\left(\frac{Bh}{b(h+H)}\right)^2 - 1\right].$$

1. **Beispiel.** Ein Fluß, dessen uneingeschränkte Breite 300 Fuß und dessen Tiefe 6 Fuß beträgt, ist durch den Einbau einer Brücke mit zugespitzten Vordertheilen so beschränkt worden, daß nur noch zwischen den Brückenpfeilern eine Weite von

200 Fuß zum Durchfließen des Wassers übrig bleibt. Wie viel wird sich wegen dieser Brücke der Wasserspiegel erheben, wenn bekannt ist, daß die mittlere Geschwindigkeit des Flusses vor Anlegung der Brücke 4 Fuß betragen hat.

$B = 300$, $b = 200$, $h = 6$, $c = 4$ und $\alpha = 7{,}54$ daher ist $0{,}0176 \cdot 4^2 \left(\frac{300^2}{200^2} - 1\right) = 0{,}352$ ein ungefährer Werth für H und man erhält hienach nahe genug die gesuchte Stauhöhe

$$H = 0{,}0176 \cdot 4^2 \cdot \left[\left(\frac{300 \cdot 6}{200 \cdot 6{,}35}\right)^2 - 1\right] = 0{,}283 \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Durch eine angelegte Buhne, welche beinahe senkrecht auf die Richtung des Stroms liegt, ist ein 500 Fuß breiter und 6 Fuß tiefer Fluß, dessen mittlere Geschwindigkeit 3 Fuß beträgt, auf 350 Fuß eingeschränkt worden. Wie viel Aufstau wird oberhalb der Buhne wegen dieser Verengung entstehen?

$B = 500$, $b = 350$, $h = 6$, $c = 3$, $\alpha = 6{,}76$ daher ist $0{,}0219 \cdot 3^2 \left(\frac{500^2}{350^2} - 1\right) = 0{,}205$ ein ungefährer Werth. Hieraus erhält man die gesuchte Stauhöhe

$$H = 0{,}0219 \cdot 3^2 \left[\left(\frac{500 \cdot 6}{350 \cdot 6{,}2}\right)^2 - 1\right] = 0{,}179 \text{ Fuß.}$$

143. §.

Um die nöthige Verengung eines Flusses zur Bewirkung eines bestimmten Aufstaues anzugeben, kömmt es darauf an, die Breite b zu entwickeln. Nun ist

$$H = \frac{c^2}{\alpha^2}\left[\left(\frac{B\,h}{b\,(h+H)}\right)^2 - 1\right] \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha^2 H}{c^2} = \left(\frac{B\,h}{b\,(h+H)}\right)^2 - 1 \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha^2 H}{c^2} + 1 = \frac{B^2 h^2}{b^2 (h+H)^2} \text{ daher}$$

$$b^2 = \frac{B^2 h^2}{(h+H)^2 \left(\frac{\alpha^2 H}{c^2} + 1\right)} \text{ folglich}$$

die Breite zwischen dem Einbaue

$$b = \frac{B\,h}{(h+H)\sqrt{\left(\frac{\alpha^2 H}{c^2} + 1\right)}}.$$

Beispiel. Um wie viel wird man einen 400 Fuß breiten und 8 Fuß tiefen Fluß einschränken müssen, daß seine Tiefe oberhalb der Verengung einen halben Fuß größer wird, wenn bekannt ist, daß derselbe eine mittlere Geschwindigkeit von 4 Fuß hat.

$B = 400$, $h = 8$, $H = \frac{1}{2}$, $c = 4$, $\alpha^2 = 45{,}7$, daher die zum Durchfließen des Wassers noch übrige Breite

$$b = \frac{400 \cdot 8}{8{,}5\sqrt{\left(\frac{45{,}7}{16 \cdot 2} + 1\right)}} = 241{,}6 \text{ Fuß.}$$

Es wird daher erfordert, daß der Einbau auf eine Länge von

$$400 - 241{,}6 = 158{,}4 \text{ Fuß}$$

in den Fluß hinein gebauet werde.

Anmerk. Man sieht hieraus, daß durch eine beträchtliche Verengung des Stroms nur eine geringe Erhöhung seiner Oberfläche bewirkt wird, welches auch den Erfahrungen gemäß ist. Wenn aber der Endzweck nicht Erhöhung der Oberfläche, sondern Verschaffung mehrerer Tiefe für die Schifffahrt ist, so wird dieser schon mit einem weit kürzern Einbaue dadurch erreicht, daß alsdann der Strom an der seichten Stelle eine beträchtlich größere Geschwindigkeit erhält, und durch Ausspülung des Grundbettes, wenn solches nicht aus festem Gestein besteht, eine größere Tiefe bewirkt wird.

Neuntes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

144. §.

Sehr lange Zeit nahm man an, daß eine Röhrenleitung (*Tuyau de conduite*) gleiche Wassermenge gebe, die Röhre mogte lang oder kurz seyn, wenn nur Druckhöhe und Röhrenweite ungeändert blieben. Herr du Buat hatte das große Verdienst, zuerst einen allgemeinen Ausdruck mitge-

theilt zu haben, welcher mit den bekannten Erfahrungen gut übereinstimmt, und der blos den Fehler hat, daß er wegen seiner verwickelten Form nur mit vieler Weitläuftigkeit Anwendung findet. Um diese zu vermeiden, und doch den Erfahrungen so nahe zu kommen, als es für die Ausübung nöthig ist, wo man weder das Wasser durch Barometerröhren fließen läßt, noch eine so ängstliche Genauigkeit mit Rücksicht auf die kleinsten Umstände verlangt, welche man in Fällen, die weit mehr Einfluß auf die Bewegung des Wassers haben, dennoch nicht erreichen kann; unter diesen Umständen wird hier diejenige Theorie über die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen vorgetragen werden, welche in meinen Zusätzen zu Buat's Hydraulik, S. 86 u. f. enthalten ist, und die, wie sich aus den daselbst angeführten Vergleichungen mit der Erfahrung ergibt, für die Ausübung hinlänglich genau mit den Versuchen übereinstimmt.

Wenn, wie bisher, unter Druckhöhe, der lothrechte Abstand des Wasserspiegels im Behälter, vom Mittelpunkte der Ausflußöfnung der Röhrenleitung verstanden wird, so kann man sich vorstellen, daß von der ganzen Druckhöhe ein Theil zur Erzeugung der Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung verwandt wird, der übrigbleibende Theil aber, als Druck zur Ueberwältigung der Hindernisse der Bewegung oder des Widerstandes in der Röhrenleitung aufgeht. Erstere nenne ich Geschwindigkeitshöhe, letztere Widerstandshöhe.

h h' c Wenn daher für eine Röhrenleitung, h die Druckhöhe und h' die Widerstandshöhe ist, so erhält man die Geschwindigkeitshöhe $= h - h'$. Ist nun c die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser in der Röhrenleitung bewegt, so ist zu deren Hervorbringung eine Höhe $\frac{c^2}{\alpha^2}$ erforderlich, wo man wegen der Zusammenziehung bei dem Eintritte in die Röhre, $\alpha = 6{,}42$ (100. §.) setzen muß. Nun ist

$$\frac{c^2}{\alpha^2} = h - h'$$

daher findet man aus der bekannten Druckhöhe und Geschwindigkeit c, die Widerstandshöhe

$$h' = h - \frac{c^2}{a^2}$$

145. §.

Wenn man sich einen Behälter mit einer daran befindlichen geraden Röhre vorstellt, so muß in dieser Röhre der Widerstand, welcher von der Adhäsion des Wassers und der Röhrenwände, von der Abprallung der Wassertheile von diesen Wänden, und von andern Hindernissen herrührt, desto größer seyn, je länger unter übrigens gleichen Umständen die Röhre wird, weil in einer doppelt so langen Röhre, doppelt so viel Hindernisse zu überwältigen sind, und dazu ein doppelt so großer Druck oder eine doppelt so große Widerstandshöhe erfordert wird; man kann daher schließen, daß sich die Widerstandshöhen wie die Längen der Röhren verhalten.

Dasselbe gilt von den Durchmessern verschiedener Röhren, wenn alles übrige gleich gesetzt wird; ist der eine Durchmesser doppelt so groß als der andere, so muß auch die Widerstandshöhe eben so wachsen, weil in demselben Verhältnisse mehr Hindernisse entstehen.

Die Widerstandshöhe muß aber auch noch von den verschiedenen Geschwindigkeiten abhängen, mit welchen das Wasser durch einerlei Röhre fließt. Denn bei einer doppelt so großen Geschwindigkeit müssen sich noch einmal so viel Wassertheile, jedes in halb so viel Zeit als bei der einfachen Geschwindigkeit, losreißen; daher werden sich unter übrigens gleichen Umständen die Widerstandshöhen wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten.

Endlich wird die Widerstandshöhe desto kleiner seyn können, je größer die Fläche der drückenden Wassersäule oder der Querschnitt der Röhre ist, weil alsdann jedes einzelne Wassertheilchen weniger Widerstand in seiner Bewegung leidet; nun verhalten sich die Querschnitte der Röh-

ten, wie die Quadrate ihrer Durchmesser, daher müssen sich bei verschiedenen Röhrenweiten die Widerstandshöhen umgekehrt wie die Quadrate der Durchmesser der Röhren verhalten.

Man setze, es wären bei zwei verschiedenen Röhrenleitungen

H, h die Druckhöhen,
H', h' die Widerstandshöhen,
L, l die Längen der Röhren,
D, d die Durchmesser derselben, und
C, c die mittleren Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser aus den Röhren läuft,

so verhält sich nach dem Vorhergehenden, wenn man die einzelnen Verhältnisse zusammen setzt (auf eine ähnliche Art wie 127. §.)

$$H' : h' = \frac{L D C^2}{D^2} : \frac{l d c^2}{d^2} \text{ also}$$

$$\frac{H' l d c^2}{d^2} = \frac{h' L D C^2}{D^2} \text{ oder}$$

$$c^2 = \frac{L C^2}{D H'} \cdot \frac{d h'}{l} \text{ folglich}$$

$$c = C \surd\left[\frac{L}{D H'}\right] \cdot \surd\left[\frac{d h'}{l}\right]$$

Da die vorhin gemachten Schlüsse mit der Natur übereinstimmen, so müssen auch bei verschiedenen Röhrenleitungen die Zahlen, welche dem Werthe $C\surd\left[\frac{L}{DH'}\right]$ entsprechen, aus allen richtig angestellten Versuchen einander gleich seyn, oder wenigstens nicht sehr von einander abweichen. Berechnet man nun diese Werthe nach 51 sehr verschiedenen Versuchen, die Herr du Buat (55. §.) anführt, bei welchen Röhren von einem bis 18 Zoll Weite, und von 10 bis 700 Fuß Länge vorkommen, so findet man nach meiner in den Anmerkungen (S. 88. a. a. O.) geführten Rechnung, wenn sich alle Größen auf pariser Zollmaß beziehen

$$C \surd\left[\frac{L}{D H'}\right] = 152{,}47$$

oder wenn dieser Ausdruck auf rheinländisches Fußmaß gebracht wird

$$C\sqrt{\left[\frac{L}{DH'}\right]} = 44{,}79.$$

Die Vergleichung dieses Werths mit den Versuchen zeigt, daß derselbe am besten für Geschwindigkeiten von 6 bis 24 Zoll mit der Erfahrung übereinstimmt.

Setzt man die gefundene Zahl in die für α gefundene Gleichung, so wird

$$c = 44{,}79\sqrt{\left[\frac{dh'}{l}\right]}$$ und weil (144. §.)

$$h' = h - \frac{c^2}{\alpha^2},$$ so erhält man

$$c = 44{,}79\sqrt{\left[\frac{d\left(h - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)}{l}\right]}$$ oder

$$c^2 l = 44{,}79^2\, d\left(h - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)$$ also

$$\frac{c^2 l}{44{,}79^2\, d} + \frac{c^2}{\alpha^2} = h$$ oder

$$c^2 = \frac{h}{\frac{l}{44{,}79^2\, d} + \frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\alpha^2 h}{\frac{\alpha^2}{44{,}79^2}\frac{l}{d} + 1}$$

Nun ist $\alpha = 6{,}42$ und $\alpha^2 = 41{,}22$ also $\frac{\alpha^2}{44{,}79^2} = 0{,}0205$ wofür man $0{,}02 = \frac{1}{50}$ annehmen kann; es ist daher die mittlere Geschwindigkeit, womit das Wasser aus einer Röhrenleitung fließt, wenn sich alle Größen auf preußisches Fußmaß beziehen

$$c = \sqrt{\left[\frac{41{,}22\, h}{0{,}02\frac{l}{d} + 1}\right]}$$

$$c = 6{,}42\sqrt{\left[\frac{50\, dh}{l + 50\, d}\right]}$$

1. Anmerk. In Fällen, wo eine größere Genauigkeit erfordert wird, kann man sich für preußisches Fußmaß des Ausdrucks

$$c = \frac{-l + \sqrt{[l^2 + (176017\, l + 12121336\, d)\, dh]}}{7{,}87 + 542\, d}$$

bedienen, welcher in meiner am Ende des 155. §. angeführten Abhandlung vollständig entwickelt ist.

2. Anmerk. Ueber die Abnahme der Geschwindigkeit des Wassers, wenn kurze Röhren bei unveränderter Druckhöhe nach und nach verlängert werden, findet man 98. §. II. Tafel die Resultate aus meinen Versuchen.

146. §.

Wenn in einem besonderen Falle die mittlere Geschwindigkeit bekannt ist, so erhält man daraus die Wassermenge

$$M = \tfrac{1}{4}\pi d^2 c$$
$$= 5{,}04\, d^2 \sqrt{\left[\frac{50\, d\, h}{l + 50\, d}\right]}$$

weil $\frac{1}{4}\pi \cdot 6{,}42 = 5{,}04$ ist.

Beispiel. Bei einer geraden Röhrenleitung beträgt die Druckhöhe 5 Fuß, die Länge der Röhre 48 Fuß, und ihr Durchmesser 2 Zoll; wie viel Wasser wird bei unveränderter Druckhöhe in jeder Sekunde ausfließen?

$h = 5$, $l = 48$, $d = \frac{1}{6}$ Fuß, daher die Wassermenge

$$M = 5{,}04 \cdot \tfrac{1}{36} \sqrt{\left[\frac{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot 5}{48 + 50 \cdot \frac{1}{6}}\right]} = 0{,}12 \text{ Kubikfuß}$$
$$= 207{,}36 \text{ Kubikzoll.}$$

147. §.

Aus der gefundenen Gleichung

$$c = \sqrt{\left[\frac{41{,}22\, h}{0{,}02\, \frac{l}{d} + 1}\right]} \text{ erhält man}$$

$$\frac{41{,}22\, h\, d}{0{,}02\, l + d} = c^2 \text{ und hieraus}$$

die Druckhöhe

$$h = \frac{(0{,}02\, l + d)\, c^2}{41{,}22\, d}$$

Nun ist ferner

$$(0{,}02\, l + d)\, c^2 = 41{,}22\, h\, d$$

$$0{,}02\, l = \frac{41{,}22\, h\, d}{c^2} - d \text{ folglich}$$

die Länge der Röhrenleitung

$$l = \left[\frac{41{,}22\, h}{c^2} - 1\right] 50 \cdot d$$

Sollte in den vorstehenden Ausdrücken zur Bestimmung der Werthe von h und l die Geschwindigkeit c nicht gegeben seyn, so kann solche allemal mittelst M und d gefunden werden.

148. §.

Wenn es darauf ankömmt, den Durchmesser d aus der Wassermenge M, Druckhöhe h und Länge l zu finden, so hat man nach 146. §.

$$5{,}04\ d^2 \sqrt{\left[\frac{50\ d\ h}{l + 50\ d}\right]} = M \text{ oder}$$

$$25{,}4\ d^4 \cdot \frac{50\ d\ h}{l + 50\ d} = M^2 \text{ daher}$$

$$d^5 = \frac{M^2}{25{,}4\ .\ 50\ h}\ (l + 50\ d) \text{ folglich}$$

$$d^5 - \left[\frac{M^2}{25{,}4\ .\ h}\right] d - \left[\frac{M^2}{25{,}4\ .\ h}\right] \frac{l}{50} = 0$$

woraus d mittelst der von mir bei andern Gelegenheiten angewandten, für die Ausübung sehr bequemen Regel zur Auflösung höherer Gleichungen, durch Annäherung gefunden werden kann.

Beispiel. Wie groß wird man den Durchmesser einer geraden 100 Fuß langen Röhrenleitung bei einer Druckhöhe von 5 Fuß annehmen müssen, damit solche in jeder Sekunde einen halben Kubikfuß Wasser liefert?

$M = \frac{1}{2}$, $h = 5$ und $l = 100$ also

$$\frac{M^2}{25{,}4\ h} = \frac{1}{4\ .\ 25{,}4\ .\ 5} = 0{,}001968 \text{ und}$$

$$\left[\frac{M^2}{25{,}4\ h}\right] \frac{l}{50} = \frac{0{,}001968\ .\ 100}{50} = 0{,}003936 \text{ daher}$$

$$d^5 - 0{,}001968\ d - 0{,}003936 = 0.$$

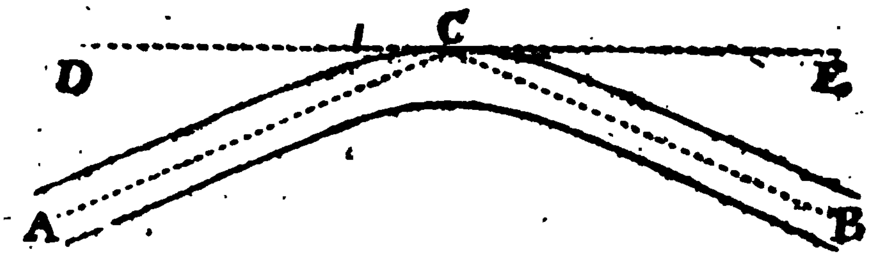
Für $d = 0{,}34$ findet man einen Rest $= -\ 0{,}000062$
für $d = 0{,}35$ findet man diesen Rest $= +\ 0{,}000628$
wonach man aus den Resten schließen kann, daß d zwischen 0,34 und 0,35 liegen muß, und zwar näher bei 0,34 als bei 0,35, weshalb man nach Verhältniß der Reste 0,341 annehmen und wenn es erfordert wird, die Rechnung noch genauer ausführen könnte. Es ist demnach der gesuchte Durchmesser der Röhre

$$d = 0{,}341 \text{ Fuß} = 4{,}09 \text{ Zoll.}$$

149. §.

Behält eine Röhre ihre unveränderte Weite, so entstehet, wenn Krümmungen (Curvaturae, Coudes) in derselben vorkommen, dadurch ein Aufenthalt in der Bewegung des Wassers, und es wird ein Theil der Druckhöhe zur Ueberwältigung des Widerstandes, der von den Krümmungen herrührt, verwandt werden.

Wenn eine sonst gerade Röhre so gebogen ist, daß die verlängerten Axen AC und BC in C zusammen treffen, so sagt man, die Krümmung bei C ist von



einer Anprallung (Illisio, *Bricole*). Zieht man alsdann im Punkte C die Tangente DE, so ist DCA = BCE der Anprallungs- oder Bricolenwinkel, ACB aber der Krümmungswinkel. Finden in einer Krümmung mehrere dergleichen Anprallungen Statt, so sieht man was unter einer Krümmung von zwei, drei und mehreren Anprallungen verstanden wird.

Unter übrigens gleichen Umständen verhält sich nach den Versuchen des Herrn du Buat (Hydr. 1. B. 104. §. u. f.) der Widerstand, welcher von den Krümmungen einer Röhrenleitung herrührt, wie das Quadrat der Geschwindigkeit des Wassers, multiplizirt mit der Summe der Quadrate von den Sinussen aller Anprallungswinkel; vorausgesetzt, daß diese Winkel ein gewisses Maß von etwa 36 bis 40 Grad nicht überschreiten und keine scharfe Ecken in der Röhre sind. Ist nun

c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre,

S^2 die Summe von den Quadraten der Sinusse sämmtlicher Anprallungswinkel,

so findet man den Versuchen gemäß (Buat Hyd. 107. §.), daß die Widerstandshöhe um einen gewissen Theil

$$k = 0{,}00387\ c^2\ S^2$$

vermehrt werden muß, wenn sich alle Größen auf rheinländisches Fußmaß beziehen.

Wäre z. B. eine Röhre so gekrümmt, daß in derselben 5 Anprallungen Statt fänden, von welchen bei dreien der Anprallungswinkel 24 und bei den zwei übrigen 32 Grad beträgt, so ist bei 5 Fuß Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} S^2 &= 3\,(\sin 24^\circ)^2 + 2\,(\sin 32^\circ)^2 \\ &= 0{,}49629 \quad + 0{,}56162 \\ &= 1{,}05791 \end{aligned}$$

und derjenige Theil der Druckhöhe, welcher auf die Ueberwältigung des Widerstandes in den Krümmungen verwandt wird

$$k = 0{,}00387 \,.\, 25 \,.\, 1{,}05791 = 0{,}10235 \text{ Fuß.}$$

150. §.

Noch weit nachtheiliger ist es, wenn anstatt der Krümmungen, die Röhren scharfe Ecken haben; denn schon bei der Bewegung fester Körper, welche, wenn sonst keine Hindernisse vorhanden sind, ihre Bewegung in krummen Linien ohne Verlust der Geschwindigkeit fortsetzen (8. §.), entstehet ein beträchtlicher Verlust an der Geschwindigkeit, wenn die Körper plötzlich ihre Richtung ändern (7. §.), daher dieses um so mehr bei dem Wasser Statt finden wird, weshalb man bei Röhrenleitungen auf alle Weise verhindern muß, daß keine scharfe Biegungen der Röhren vorkommen. Auch ist es zuträglich die Röhren da, wo sie gebogen sind, etwas weiter zu machen.

Anmerk. Um zu übersehen, wie groß der Verlust des Wassers oder die Verminderung der Geschwindigkeit der Röhren mit scharfen Biegungen ist, können die Versuche von Venturi (Recherch. etc. Prop. VII. Exp. 23) dienen. Von drei Röhren, deren jede 15 Zoll Länge und 14,5 Linien im Durchmesser hatte, war die erste ganz gerade, die zweite in der Form eines Quadranten gebogen, und die dritte hatte in der Mitte eine scharfe Biegung unter einem rechten Winkel. Die Röhren wurden so an den Behälter gebracht, daß ihre Axen oder centrischen Linien in einerlei Horizontalebene lagen, und man fand bei gleicher Druckhöhe die Wassermenge in jeder Sekunde, bei

der geraden Röhre	153,6	K. Z.
nach einem Viertelzirkel gebogenen Röhre	138,2	" "
nach einem rechten Winkel gebogenen Röhre	98,7	" "

also wurde die Wassermenge bei der um einen rechten Winkel gebogenen Röhre, gegen die gerade Röhre um $\frac{1}{14}$ vermindert.

151. §.

Um in dem allgemeinen Ausdrucke für die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in Röhrenleitungen, auch auf den Widerstand in den Krümmungen Rücksicht zu nehmen, so muß 145. §. die Widerstandshöhe h′ noch um k vermehrt werden, alsdann ist

$$h' + k = h - \frac{c^2}{\alpha^2} \text{ oder}$$

$$h' = h - \frac{c^2}{\alpha^2} - 0{,}00387\ c^2\ S^2$$

daher, wenn auf eine ähnliche Art wie 145. §. aus

$$c = 44{,}79 . \sqrt{\left[\frac{d\left(h - \frac{c^2}{\alpha^2} - 0{,}00387\ c^2\ S^2\right)}{l}\right]}$$

die mittlere Geschwindigkeit entwickelt wird,

$$c = \sqrt{\left[\frac{41{,}22\ h}{0{,}02\ \frac{l}{d} + 0{,}16\ S^2 + 1}\right]}$$

Beispiel. Eine gekrümmte Röhrenleitung hat 6 Fuß Druckhöhe und 3 Zoll Röhrenweite; wie viel Wasser wird in jeder Sekunde ausfließen, wenn diese Röhre nach ihren Krümmungen gemessen, 50 Fuß lang ist und drei Biegungen macht, deren Anprallungswinkel bei jeder 24 Grad beträgt?

Hier ist $h = 6$, $l = 50$, $d = \frac{1}{4}$ und
$S^2 = 3\ (\text{Sin } 24^\circ)^2 = 0{,}49629$ daher
die mittlere Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\left[\frac{41{,}22\ .\ 6}{0{,}02\ .\ 50\ .\ 4 + 0{,}16\ .\ 0{,}496 + 1}\right]}$$
$$= 6{,}897 \text{ Fuß}$$

und hieraus die gesuchte Wassermenge
$$M = 0{,}785\ .\ \tfrac{1}{16}\ .\ 6{,}897 = 0{,}338 \text{ Kubikfuß.}$$

152. §.

Es ist öfters erforderlich denjenigen Theil der Druckhöhe h zu wissen, welcher als Widerstandshöhe h′ zur Ueberwältigung der Hindernisse längs einer Röhre von ge-

gebener Länge l und Weite d für eine bestimmte Geschwindigkeit c erfordert wird. Nach 145. §. ist

$$44{,}79 \sqrt{\left[\frac{d\,h'}{l}\right]} = c \text{ oder}$$

$$44{,}79^2 \left[\frac{d\,h'}{l}\right] = c^2 \text{ daher}$$

bei einer geraden Röhre die Widerstandshöhe

$$h' = \frac{l\,c^2}{44{,}79^2\,d}$$

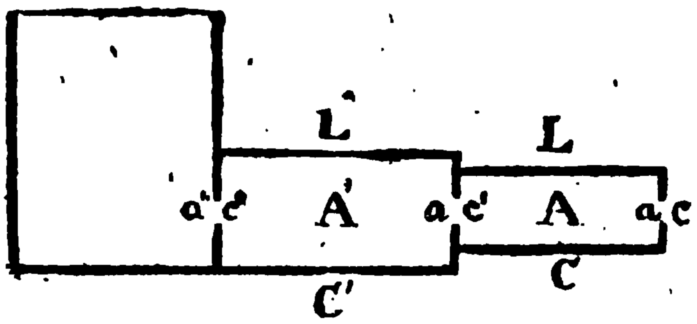
Für eine gekrümmte Röhre erhält man 149. §. die Widerstandshöhe

$$h' = \frac{l\,c^2}{44{,}79^2\,d} + k$$

$$= \frac{l\,c^2}{2006\,.\,d} + 0{,}00387\,S^2\,c^2.$$

153. §.

Wenn mehrere mit einem Behälter verbundene Röhren von verschiedener Weite, bei jedem Ein- und Ausfluß mit einer Oefnung in einer dünnen Platte versehen sind, so bezeichnen bei derjenigen Röhre, aus welcher das Wasser in die freie Luft strömt,



a den Inhalt der Ausflußöfnung,
c die Geschwindigkeit in derselben,
A den Inhalt des Röhrenquerschnitts,
D dessen Durchmesser,
C die Geschwindigkeit in der Röhre, und
L die Länge derselben.

Ferner haben die Größen $a'\,c'\,A'\,D'\,C'\,L'$ für die zweite Röhre eben die Bedeutung, und wenn überhaupt nur zwei Röhren von der Länge L, L' angebracht sind, sei

a'' der Inhalt der Oefnung, durch welche das Wasser mit der Geschwindigkeit
c'' aus dem Behälter fließt.

Fände nun das Wasser bei der Bewegung durch die Röhren L′, L keinen Widerstand, so würde nach 121. §. zur Hervorbringung der Geschwindigkeit c und wegen der Contraction in den Oefnungen a″ a′ a eine Druckhöhe

$$(\text{I.}) \quad = c^2\left[\frac{\left(\frac{a}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{a'}\right)^2+\left(\frac{a}{a''}\right)^2}{\alpha^2}-\frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{a}{A'}\right)^2}{\alpha^2}\right]$$

erfordert.

Nun findet man nach 152. §. die Widerstandshöhe, welche zur Ueberwältigung der Hindernisse bei einer Röhre L nöthig ist

$$= \frac{C^2 L}{44{,}79^2\, D}$$

oder weil $C = \frac{ac}{A}$ ist

$$(\text{II.}) \quad = \left(\frac{ac}{A}\right)^2 \frac{L}{44{,}79^2\, D}$$

Eben so ist wegen der Hindernisse in der Röhre L′, die erforderliche Widerstandshöhe

$$(\text{III.}) \quad = \left(\frac{ac}{A'}\right)^2 \frac{L'}{44{,}79^2\, D'}.$$

Nimmt man diese zur Bewegung des Wassers erforderliche Höhen I. II. III. zusammen, so erhält man die gesammte Druckhöhe

$$h = c^2\left[\frac{\left(\frac{a}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{a'}\right)^2+\left(\frac{a}{a''}\right)^2}{\alpha^2}-\frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{a}{A'}\right)^2}{\alpha^2}+\frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2\frac{L}{D}+\left(\frac{a}{A'}\right)^2\frac{L'}{D'}}{2006}\right]$$

E F G oder wenn man die drei Glieder in der Parenthese durch E, F, G bezeichnet, so ist die gesammte Druckhöhe

$$h = c^2\,[E - F + G]$$

die mittlere Geschwindigkeit

$$c = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{[E - F + G]}}$$

und wenn die Wassermenge $= M$ gesetzt wird, so ist, weil $M = ac$ oder $\frac{M^2}{a^2} = c^2$, die Druckhöhe

$$h = \frac{M^2}{a^2}\,[E - F + G] \text{ oder}$$

die Wassermenge

$$M = \frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{[E - F + G]}}.$$

Beispiel. Am Ende einer 400 Fuß langen und 3 Zoll weiten geraden Röhrenleitung, befindet sich in einer dünnen Platte eine 8 Linien weite Oefnung. Wie viel Wasser wird in jeder Sekunde auslaufen, wenn der Wasserspiegel des Behälters unverändert 30 Fuß hoch über der Ausflußmündung stehet?

Hier ist $h = 30$, $L = 400$, $a = 0{,}785 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18}$, $A = 0{,}785 \cdot \frac{1}{16}$ also $\frac{a^2}{A^2} = \frac{16}{6561}$.

Im vorliegenden Falle ist aber $a' = A$ daher wenn, wie erfordert wird, für die Oefnung a wie bei einer dünnen Wand der Werth $\frac{1}{\alpha^2} = 0{,}0417$ und für a' wie bei einer Ansatzröhre dieser Werth $= 0{,}0243$ gesetzt wird, so ist

$$E = \frac{\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2}{\alpha^2} = 0{,}0417 + 0{,}0243 \cdot \frac{16}{6561} = 0{,}04176$$

$$F = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{a}{A}\right)^2 = 0{,}0417 \cdot \frac{16}{6561} = 0{,}000102$$

$$G = \frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2 \frac{L}{D}}{2006} = \frac{16 \cdot 400}{6561 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2006} = 0{,}00194$$

Dieses gibt $E - F + G = 0{,}0438$ daher findet man die Wassermenge

$$M = \frac{0{,}785 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} \sqrt{30}}{\sqrt{0{,}0438}} = 0{,}0601 \text{ Kubikfuß.}$$

154. §.

Das Gesetz, wonach die Werthe von E, F, G bei mehrern Röhren bestimmt werden, ist leicht zu übersehen. Bei fünf Röhren und sechs Oefnungen ist

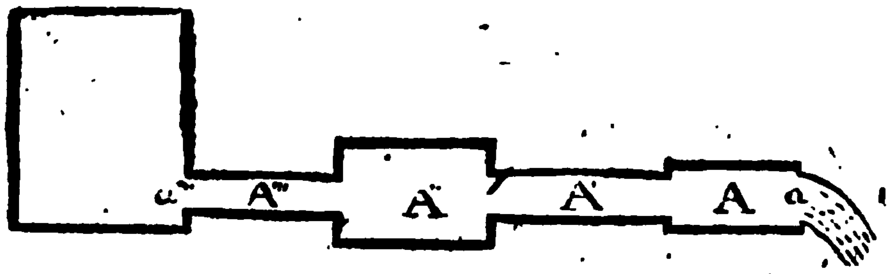
$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'''}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''''}\right)^2 \pm \left(\frac{a}{a'''''}\right)^2\right]$$

$$F = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right)^2 + \left(\frac{a}{A''}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'''}\right)^2 + \left(\frac{a}{A''''}\right)^2\right]$$

wo die übereinander stehenden Glieder der Reihe E und F, zusammengehörige Werthe heißen können.

Sind einige oder sämmtliche Röhrenenden nicht mit Platten verschlossen, in welchen sich Oefnungen befinden, so können Fälle eintreten, daß zusammengehörige Glieder der vorstehenden Reihen wegfallen. Denn da diese Glieder die erforderliche Druckhöhe zur Erzeugung der Geschwindigkeiten in den Oefnungen a, a', a'', a''', a'''', a''''' ausdrücken, so wird, wenn die folgende Röhre weiter ist als die vorhergehende, am Ende der engern Röhre keine neue Druckhöhe nothwendig, weil keine Contraction vorhanden ist, und das Wasser ohne Hinzusetzung eines neuen Drucks, sich in der folgenden weitern Röhre ausbreitet, und die der Weite dieser Röhre entsprechende kleinere Geschwindigkeit annehmen wird. Es fallen daher in den Reihen E und F diejenigen zusammengehörigen Glieder weg, welche zu einer dergleichen Oefnung gehören.

Wenn z. B. vier Röhren vorhanden sind, die sich nach der beistehenden Figur verengen und erweitern, so wäre allgemein



$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'''}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''''}\right)^2\right]$$

$$F = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right)^2 + \left(\frac{a}{A''}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'''}\right)^2 \qquad\qquad \right]$$

Nun findet bei den Oefnungen a, a', a''' keine Contraction Statt, daher fallen die ersten, zweiten und vierten Glieder in den Parenthesen weg, und man behält

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a''}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''''}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$F = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{A''}\right)^2 \qquad\qquad \right]$$

oder weil $a = A$, $a'' = A'$ und $a'''' = A'''$ ist, so erhält man

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \left(\frac{A}{A'''}\right)^2\right]$$

$$F = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{A}{A''}\right)^2.$$

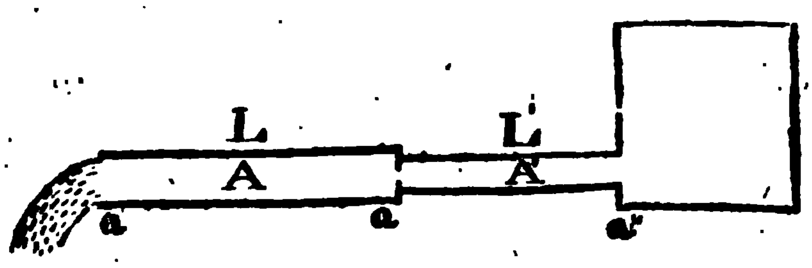
und ohne Abänderung

$$G = \frac{1}{2006}\left[\left(\frac{A}{A}\right)^2\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2\frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2\frac{L''}{D''} + \left(\frac{A}{A'''}\right)^2\frac{L'''}{D'''}\right]$$

In Absicht des Werths von α ist zu bemerken, daß derselbe den Umständen gemäß nach 100. §. für jede Oefnung a, a′ u. s. w. bestimmt werden muß.

155. §.

Wäre in einem besondern Falle die erste Röhre, welche das Wasser aus dem Behälter erhält, zwar enger wie die folgende, aber zwischen beiden eine Platte mit einer



Oefnung $a' < A'$, so können alsdann die zusammengehörigen Glieder der Reihen E, F für diese Oefnung nicht wegfallen. Nun erhält man für beide Röhren allgemein

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$F = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]$$

da dann nur für die Oefnung a, die (ersten) Glieder wegfallen. Nun ist $a = A$, $a'' = A'$ daher mit Rücksicht auf die verschiedenen Contractionen

$$E = 0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0243\left(\frac{A}{A'}\right)^2$$

$$F = 0{,}0417\left(\frac{A}{A'}\right)^2 \text{ also,}$$

$$E - F = 0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 - 0{,}0174\left(\frac{A}{A'}\right)^2$$

wonach man die gesammte erforderliche Druckhöhe h zur Erzeugung der Geschwindigkeit c beim Ausflusse finden kann. Diese ist

$$h = c^2\left[0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2 - 0{,}0174\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2\frac{L'}{D'}}{2006}\right]$$

Ist die Einmündung bei $a'' = A'$ so beschaffen, daß

die Contraction daselbst bei Seite gesetzt werden kann, so fällt das dritte Glied $\left(\frac{a}{a'}\right)^2$ weg, und man erhält

$$h = c^2 \left[0{,}0417 \left(\frac{A}{a}\right)^2 - 0{,}0417 \left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'}}{2906} \right]$$

156. §.

Soll die Contraction eben so wie es im Vorhergehenden angegeben ist, in Rechnung gebracht werden, so wird erfordert, daß die Oefnungen in den Scheidewänden weit genug von einander abstehen, oder daß die Röhren nicht zu kurz sind, weil sonst bei mehrern kurz auf einander folgenden Oefnungen in dünnen Wänden, die Contraction nur einmal in Rechnung gebracht werden darf, auch wohl wenn die Oefnungen sehr nahe auf einander folgen, der Contractionscoeffizient sich demjenigen bei einer kurzen Ansatzröhre nähert.

Nachstehende mit Zuziehung des Königl. Professors Herrn Hobert von mir angestellte Versuche können zum Beweise dieser Behauptung dienen. Die ganze Vorrichtung bei den Versuchen war mit der 97. §. beschriebenen einerlei, sämmtliche 1 Zoll weite Röhren und $\frac{1}{24}$ Zoll dicke Scheidewände waren aus Messing genau bearbeitet und polirt; die Mitte der Oefnungen in den Scheidewänden paßte genau auf die Mitte der Röhren. Bei jedem Versuche lag die Axe der Röhren und Oefnungen horizontal, die jedesmalige Druckhöhe am Anfange des Versuchs war 3 Fuß und nachdem die Oefnung $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ Zoll weit war, beobachtete man mit dem 97. §. beschriebenen Sekundenpendel die Zeit, in welcher sich ein Gefäß mit 845 oder 1630 Kubikzoll Wasser anfüllte, wobei sich der Wasserspiegel im Behälter jedesmal nahe $6\frac{1}{25}$ Zoll senkte.

Hienach ist wie 98. §. die hypothetische Zeit des Ausflusses so bestimmt worden, als wenn weder Contraction noch andere Hindernisse der Bewegung Statt fänden; dies gibt die hypothetische Zeit für 845 Kubikzoll Ausfluß = 107,12 Sekunden und für 1630 Kubikzoll Ausfluß

= 52,87 Sekunden. Nur bei den Versuchen in der folgenden sechsten Tafel wurden 4156 Kubikzoll Wasser abgelassen.

Nachstehende sechs Tafeln enthalten die Resultate aus den mehrmals wiederholten Versuchen, und berechtigen außer den bereits angeführten Folgerungen zu noch mehreren andern, über die es zu weitläuftig ist, hier nähere Untersuchungen anzustellen.

Erste Tafel.

Versuche mit einer Scheidewand, in der Einmündung der einen Zoll weiten Röhren, bei 3 Fuß anfänglicher Druckhöhe.

N.	Durchmess. der Einmündung. Zoll.	Länge der Röhre. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Ausgelassene Wassermenge. Kubikzoll.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	$\frac{1}{4}$	0	174	845	0,616
2	$\frac{1}{4}$	12	169	845	0,634
2*	$\frac{1}{4}$	12	174	845	0,616
3	$\frac{1}{4}$	24	167	845	0,641
4	$\frac{1}{4}$	48	165	845	0,649
5	$\frac{1}{2}$	0	$85\frac{1}{2}$	1630	0,618
6	$\frac{1}{2}$	12	73	1630	0,724
7	$\frac{1}{2}$	24	73	1630	0,724
8	$\frac{1}{2}$	36	75	1630	0,705
9	$\frac{1}{2}$	48	76	1630	0,695

* Das Wasser folgte nur dem Untertheile der innern Röhrenwand.

Zweite Tafel.

Versuche mit einer Scheidewand, in der Ausmündung der einen Zoll weiten Röhren, bei 3 Fuß anfänglicher Druckhöhe.

N.	Länge der Röhren.	Durchmess. der Ausmündung.	Beobachtete Zeit.	Ausgelaufene Wassermenge.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge
	Zoll.	Zoll.	Sekunden.	Kubikzoll.	
1	0	$\frac{1}{4}$	174	845	0,616
2	12	$\frac{1}{4}$	173	845	0,619
3	24	$\frac{1}{4}$	173	845	0,619
4	36	$\frac{1}{4}$	173	845	0,619
5	60	$\frac{1}{4}$	175	845	0,612
6	0	$\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	1630	0,618
7	36	$\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	1630	0,626
8	60	$\frac{1}{2}$	$85\frac{1}{2}$	1630	0,618

Dritte Tafel.

Versuche mit zwei Scheidewänden, in einen Zoll weiten Röhren, bei 3 Fuß anfänglicher Druckhöhe.

N.	Durchmesser d. Einm. Zoll.	Länge der Röhren. Zoll.	Durchmesser d. Ausm. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekund.	Ausgelaufene Wassermenge. Kubikzoll	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	¼	¼	¼	173	845	0,619
2	¼	1	¼	172	845	0,622
3	¼	12	¼	230	845	0,465
4	¼	60	¼	232	845	0,461
5	½	¼	½	84½	1630	0,626
6	½	½	½	85	1630	0,622
7	½	1	½	86	1630	0,614
8	½	2	½	93	1630	0,568
9	½	3	½	104	1630	0,509
10	½	5	½	100½	1630	0,487
11	½	12	½	110	1630	0,481
12	½	24	½	110½	1630	0,478
13	½	36	½	111	1630	0,476
14	½	60	½	112	1630	0,472
15	½	12	¼	176	845	0,609
16	¼	12	½	175	845	0,612

Vierte Tafel.

Versuche mit drei Scheidewänden, in einen Zoll weiten Röhren, bei 3 Fuß anfänglicher Druckhöhe, wenn jedesmal 845 Kubikzoll Wasser ausliefen.

N.	Durchmesser der Einmündung.	Länge der ersten Zwischenröhre.	Durchmesser d. mittlern Oefnung.	Länge der zweiten Zwischenröhre.	Durchmesser der Ausmünd.	Beobachtete Zeit.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Sek.	
1	¾	¾	¾	¼	¾	172	0,622
2	¼	2	¾	12	¼	285	0,376
3	½	12	½	12	½	235	0,454
4	¾	12	½	12	¾	230	0,465
5	½	12	½	12	½	177	0,605
6	¼	12	¼	12	¾	175	0,612

Fünfte Tafel.

Versuche mit vier Scheidewänden, in einen Zoll weiten Röhren, bei 3 Fuß anfänglicher Druckhöhe, wenn jedesmal 845 Kubikzoll Wasser ausliefen.

N.	Durchmesser der Einmündung.	Länge der ersten Zwischenröhre.	Durchmesser der zweit. Oefnung.	Länge der zweit. Zwischenröhre.	Durchmesser der dritten Oefnung.	Länge d. dritten Zwischenröhre	Durchmesser der Ausmündung.	Beobachtete Zeit.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Zoll.	Sek.	
1	¾	¾	¾	¼	¾	¼	¾	172	0,622
2	¼	12	¼	12	¼	12	¼	323	0,331
3	½	24	½	12	½	24	¼	237	0,452
4	¾	24	½	12	¼	12	½	238	0,450

Sechste Tafel.

Versuche mit cylindrischen Röhren von ungleicher Weite, die Ein- und Ausflußröhre einen, die Mittelröhre zwei Zoll weit, bei 3 Fuß anfänglicher Druckhöhe, wenn jedesmal 4156 Kubikzoll Wasser abliefen.

N.	Länge der Einflußröhre. Zoll.	Länge der Mittelröhre. Zoll.	Länge der Ausflußröhre. Zoll.	Beobachtete Zeit. Sekunden.	Verhältniß zur hypothetischen Wassermenge.
1	3	12	12	60	0,612
2	24	12	12	$64\frac{3}{4}$	0,567
3	24	12	36	$70\frac{1}{4}$	0,523

157. §.

Wenn (154. §.) $E - F + G = B$ gesetzt wird, so ist B ganz allgemein die Druckhöhe h, welche eine Geschwindigkeit c erzeugt, oder

$$h = c^2 B.$$

Diese Druckhöhe kann man sich aus zwei Theilen bestehend vorstellen, wovon der eine

h'' die Widerstandshöhe zur Ueberwältigung der Hindernisse längs den Wänden der Röhre und beim Durchgange durch die verschiedenen Oeffnungen; und der andere Theil h''

$h - h''$ auf die Geschwindigkeitshöhe zur Hervorbringung und Unterhaltung der Geschwindigkeit c so verwendet wird, als wenn keine Contraction noch sonstige Hindernisse vorhanden wären.

Es ist daher

$$h - h'' = \frac{c^2}{4g} \text{ oder}$$

$$h'' = h - \frac{c^2}{4g} = c^2 B - \frac{c^2}{4g}$$

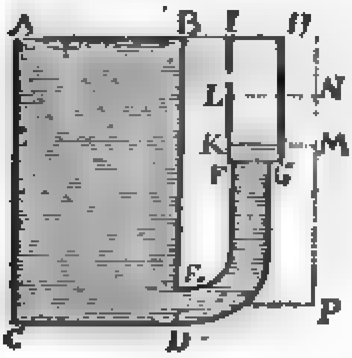
d. h. man findet denjenigen Theil der Druckhöhe, welcher auf den Widerstand und die Contraction verwendet wird, oder die **Widerstandshöhe**

$$h'' = c^2 \left(B - \frac{1}{4g} \right)$$

$$= c^2 \left(\frac{4gB - 1}{4g} \right)$$

158. §.

Mit einem sehr weiten Gefäße ABCD, welches beständig bis AB mit Wasser angefüllt erhalten wird, sei eine gleichweite Röhre DEFG verbunden, und mit dieser eine zweite vertikale Röhre FGHI. Die Oefnung DE sei durch eine Scheibe verschlossen, und in den Röhren befinde sich Wasser bis in K. Ist nun die lothrechte Höhe des Wassers



K im Gefäße AD über der Oefnung ED = HP = K; die lothrechte Höhe des Wassers in den Röhren über dieser
h Oefnung, oder PM = h; die Länge der centrischen Linie in den Röhren, vom Mittelpunkte der Oefnung DE bis
λ zur Oberfläche bei K = λ; der Querschnitt der Röhre FH = A und der Röhre DG = a, so wird bei plötzlicher Hinwegnahme der Scheibe bei DE, wenn K > h ist, das Wasser durch die Oefnung DE in die Röhre treten,
b und damit es irgend eine lothrechte Höhe MN = b er-
t reiche, dazu eine gewisse Zeit t erfordert werden.

Um diese Zeit für den Fall, daß K − h > b ist, genauer als 118. §. in Rechnung zu bringen, muß zugleich darauf Rücksicht genommen werden, daß das Wasser in der Röhre seine Bewegung von 0 anfängt, und wie jeder andere Körper, eine beschleunigte Bewegung erhält. Es ist aber die Druckhöhe, welche zur Ueberwältigung des Widerstandes in den Röhren und zur Erzeugung der Geschwindigkeit verwandt wird, veränderlich; im Anfange der Zeit t = K − h; am Ende derselben = K − h − b. Ist

nun h nicht beträchtlich groß, so kann man die Druckhöhe als beständig ansehen und $= K - h - \frac{1}{2} b$ setzen, da dann

$$K - h - \tfrac{1}{2} b - h''$$

nur noch auf die Hervorbringung der Geschwindigkeit des Wassers verwendet wird. Bei der zunehmenden Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren ist aber h″ veränderlich und hängt von der jedesmaligen Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren ab. Damit nun für h″ ebenfalls ein mittlerer Werth in die Rechnung gebracht werde, so sei c die mittlere Geschwindigkeit, welche der Druckhöhe $K - h - \frac{1}{2} b - h''$ entspricht, alsdann ist

$$c^2 = 4g\,(K - h - \tfrac{1}{2} b - h'') \text{ und}$$

$$h'' = c^2 \cdot \frac{4gB - 1}{4g} \ (157.\ \S.) \text{ daher}$$

$$h'' = 4g\,(K - h - \tfrac{1}{2} b - h'')\, \frac{4gB - 1}{4g} \text{ oder}$$

$$h'' = (K - h - \tfrac{1}{2} b)\, \frac{4gB - 1}{4gB}.$$

Hieraus findet man die Höhe der Wassersäule, welche so auf die Bewegung des Wassers wirkt, als wenn keine Hindernisse vorhanden wären, oder

$$K - h - \tfrac{1}{2} b - h'' = K - h - \tfrac{1}{2} b - (K - h - \tfrac{1}{2} b)\, \frac{4gB - 1}{4gB}$$

$$= \frac{K - h - \frac{1}{2} b}{4gB}$$

und man kann den Druck derselben als bewegende Kraft ansehen, die auf das Wasser in den Röhren wirkt.

Die gesammte Wassermasse in den Röhren, welche in Bewegung gesetzt werden soll, ist anfänglich $= a\lambda$, wenn man Fk als sehr klein annimmt und am Ende der Zeit $t = a\lambda + Ab$. Wird hier ebenfalls ein Mittelwerth angenommen, so erhält man $a\lambda + \frac{1}{2} Ab$. Diese Wassersäule, welche im Gefäße BC auf die Oefnung $DE = a$ drückt, welche ebenfalls in Bewegung gesetzt werden muß, ist $= aK$. Diese drei Massen bewegen sich aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten; ist daher für irgend einen Zeitpunkt die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre $FH = c$, so findet man die Geschwindigkeit des Wassers

in der Röhre DG $= \frac{Ac}{a}$, daher ist auch die Geschwindigkeit, mit welcher die im Gefäße drückende Wassersäule der Oefnung DE zuströmen muß $= \frac{Ac}{a}$ *) und man erhält (63. §.) die Momente der Trägheit dieser Massen

$$= \left(\frac{Ac}{a}\right)^2 (a\lambda + aK) + \tfrac{1}{2} c^2 Ab.$$

Eine Masse N mit der Geschwindigkeit c in der Röhre FH zu bewegen, sei dem vorstehenden Ausdruck gleichgültig (61. §.), so erhält man

$$c^2 N = \left(\frac{Ac}{a}\right)^2 (a\lambda + aK) + \tfrac{1}{2} c^2 Ab$$

und es ist die auf die Geschwindigkeit c in der Röhre FH reduzirte Masse

$$N = \frac{A^2}{a} (\lambda + K) + \tfrac{1}{2} Ab.$$

Hieraus findet man die Beschleunigung G der Wassermasse N, wenn man γN als das Gewicht der bewegten Masse und $\gamma A \frac{K - h - \frac{1}{2} b}{4gB}$ als die bewegende Kraft ansieht, die auf die Wassermasse N, welche auf die Röhre FH reduzirt ist, wirkt. Alsdann ist (34. §.)

$$G = g \frac{\gamma A (K - h - \frac{1}{2} b)}{4gB \cdot \gamma N}$$

oder wenn man für N substituirt und gehörig abkürzt

$$G = \frac{a (K - h - \frac{1}{2} b)}{4B (A\lambda + AK + \frac{1}{2} ab)}$$

Mit dieser Beschleunigung wird in der Röhre FH das Wasser in der Zeit t den Weg b durchlaufen, es ist daher (35. §.) $t = \sqrt{\frac{b}{G}}$ oder man findet die gesuchte Zeit

$$t = 2 \sqrt{\left[\frac{Bb (A\lambda + AK + \frac{1}{2} ab)}{a (K - h - \frac{1}{2} b)}\right]}$$

*) Im Gefäße BC kommt zwar weit mehr Wasser in Bewegung, weil die Abhäsion der Wassersäule aK, auch noch viel des sie umgebenden Wassers mit sich fort reißt; aber eben dadurch wird die Geschwindigkeit des Wassers im Gefäße gerade in demselben Verhältniß geschwächt, weshalb man die eingeführte Wassersäule aK ohne beträchtlichen Fehler beibehalten kann.

Für $a = A$, wird

$$t = 2\sqrt{\left[\frac{Bb(\lambda + K + \frac{1}{2}b)}{K - h - \frac{1}{2}b}\right]}$$

Hat das Wasser in der Röhre FH am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit y erlangt, so ist (35. §.)

$$y = 2\sqrt{G}\sqrt{b} \text{ oder}$$

$$y = \sqrt{\left[\frac{ab(K - h - \frac{1}{2}b)}{B(A\lambda + AK + \frac{1}{2}ab)}\right]}.$$

Wäre nur die Röhre FH mit dem Gefäße BC verbunden, also $h = o$, $\lambda = o$ und $A = a$, so wird in diesem Falle

$$y = \sqrt{\left[\frac{b(K - \frac{1}{2}b)}{B(K + \frac{1}{2}b)}\right]}.$$

Wird hingegen vorausgesetzt, daß an der Einmündung bei DE irgend eine bewegende Kraft vorhanden ist, welche statt des Wassers im Gefäße BC gegen die Oefnung DE eben so preßt als eine Wassersäule von der Höhe $= K$, und man bringt das Wasser im Gefäße BC als bewegte Wassermasse nicht in Rechnung, so wird die Geschwindigkeit

$$y = \sqrt{\left[\frac{b(K - h - \frac{1}{2}b)}{B\left(\frac{A}{a}\lambda + \frac{1}{2}b\right)}\right]}.$$

1. Anmerk. Die vorgesetzten Grenzen und weil hier die Gesetze, nach welchen veränderliche Kräfte wirken, nicht als bekannt vorausgesetzt werden können, erlauben keine schärfere Auseinandersetzung der vorstehenden für die Lehre von den Pumpen sehr wichtigen Untersuchung. Um wenigstens zu zeigen, auf welche verwickelte und für die Ausübung beinahe unbrauchbare Ausdrücke, eine größere Genauigkeit führt, dient nachstehende Betrachtung.

Wenn eine veränderliche Kraft P, die veränderliche Masse M vom Anfange der Bewegung durch den Weg x führt, und die Masse M am Ende dieses Weges die Geschwindigkeit y erlangt hat, so ist (38. §. 2. Anmerk. III.)

$$2ydy = 4g\frac{P}{M}dx$$

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung ist im vorliegenden Falle, wenn angenommen wird, daß in der Röhre FH das Wasser über KM die Höhe x erreicht hat

$$\frac{P}{M} = \frac{K - h - x - h''}{\frac{A}{a}(\lambda + K) + x}$$

wo h'' die veränderliche Widerstandshöhe $= y^2 \left(B - \frac{1}{4g}\right)$ ist (157. §.).

Man setze $\frac{A}{a}(\lambda + K) = \alpha$ und $B - \frac{1}{4g} = \beta$, so wird

$$4g\beta y^2 dx + (\alpha + x)\, 2y\, dy = 4g(K - h - x)\, dx.$$

Von dieser Differenzialgleichung findet man das Integral, wenn, zur bessern Uebersicht, vorher $\alpha + x = z$ gesetzt und nachher wieder weggeschafft wird

$$y^2(\alpha + x)^{4g\beta} = \frac{(K - h + \alpha)(\alpha + x)^{4g\beta}}{\beta} - \frac{4g(\alpha + x)^{4g\beta + 1}}{4g\beta + 1} + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$ daher das vollständige Integral

$$y^2(\alpha + x)^{4g\beta} =$$

$$\frac{(K - h + \alpha)\left[(\alpha + x)^{4g\beta} - \alpha^{4g\beta}\right]}{\beta} - \frac{4g\left[(\alpha + x)^{4g\beta+1} - \alpha^{4g\beta+1}\right]}{4g\beta + 1}$$

und hieraus

(I.) $y^2 =$

$$\frac{[(4g\beta + 1)(K - h + \alpha) - 4g\beta(\alpha + x)](\alpha + x)^{4g\beta} - [(4g\beta + 1)(K - h + \alpha) - 4g\beta\alpha]\alpha^{4g\beta}}{\beta(4g\beta + 1)(\alpha + x)^{4g\beta}}$$

wonach also die Geschwindigkeit y, welche das Wasser in der Röhre FH bei jeder Höhe x erreicht, bekannt ist.

Wenn das Wasser seine größte Höhe in der Röhre FH erreicht hat, so wird $y = 0$, daher wenn x' diese größte Höhe bezeichnet,

$$[(4g\beta + 1)(K - h + \alpha) - 4g\beta(\alpha + x')](\alpha + x')^{4g\beta} =$$

$$[(4g\beta + 1)(K - h + \alpha) - 4g\beta\alpha]\alpha^{4g\beta} \text{ also}$$

(II.) $\text{Log}(\alpha + x') =$

$$\text{Log}\,\alpha + \frac{1}{4g\beta}\text{Log}\left[\frac{(4g\beta + 1)(K - h + \alpha) - 4g\beta\alpha}{(4g\beta + 1)(K - h + \alpha) - 4g\beta(\alpha + x')}\right]$$

Weil aber x' noch in dem Nenner des letzten Logarithmen enthalten ist, so läßt sich x' nur durch Näherung dadurch bestimmen, daß man zuerst einen ungefähren Werth für x' etwas kleiner als $2(K - h)$ annimmt.

Wollte man aus (I.) die Zeit bestimmen, in welcher das

Wasser auf irgend eine Höhe x steigt, so kommt es darauf an, die Gleichung (38. §. 2. Anmerk.)

$$dt = \frac{dx}{y}$$

zu integriren, welches in sehr weitläuftige Rechnungen verwickelt.

Man vergleiche mit dem Vorhergehenden, Herrn Langsdorf Maschinenlehre, 1ter Bd. 73. und 74ster §. S. 205, wo ungeachtet die Masse M unveränderlich angenommen ist, dennoch sehr weitläuftige Ausdrücke entstehen.

2. Anmerk. Es schien mir nicht undienlich zu seyn, über das Steigen des Wassers in vertikalen Röhren einige Versuche anzustellen. Zu diesem Ende bediente ich mich eines 4 Fuß höhen und $1\frac{1}{2}$ Fuß weiten mit Wasser angefüllten Gefäßes, und einer gläsernen 5 Fuß langen und etwa $\frac{1}{2}$ Zoll weiten Röhre, die an beiden Enden offen und daselbst genau abgeschliffen war. Mittelst einer ledernen an einem Stabe befestigten Scheibe konnte man das unterste Ende der Röhre wasserdicht verschließen, und wenn die so verschlossene Röhre mitten im Gefäße vertikal befestiget war, konnte man die Scheibe plötzlich wegziehen, damit das Wasser des Gefäßes frei in die Röhre stieg. Weil die Röhre nicht durchgängig gleiche Weite hatte, so erlauben zwar diese Versuche keine genaue Vergleichung mit der Theorie, mit geringen Abweichungen dienen sie aber die Uebereinstimmung der vorhin gefundenen Formeln mit der Erfahrung zu zeigen.

In der nachstehenden Tafel bestimmen die vertikalen Spalten

I. die Entfernung des Wasserspiegels im Behälter von der Einmündung der vertikalen Röhre (K);

II. die Höhe des in der Röhre befindlichen Wassers über der Einmündung (h);

III. die beobachtete größte Höhe, auf welche das Wasser in der Röhre über die Oberfläche des Wassers im Behälter gelangte;

IV. die Differenz zwischen der Wasserhöhe über der Einmündung und der Wasserhöhe in der Röhre, oder die anfängliche Druckhöhe (K — h);

V. die größte Höhe, auf welche das Wasser in der Röhre, über den anfänglichen Wasserspiegel in [illegible]öhre stieg (x);

N. der Versuche.	I. K Zoll.	II. h Zoll.	III. h + x′ — K Zoll.	IV. K — h. Zoll.	V. x′ Zoll.
1	12	0	8¾	12	20¾
2	24	0	14	24	38
3	24	12	9½	12	21½
4	35	0	21	35	56
5	36	0	21¾	36	57¾
6	36	12	17¾	24	41¾
7	36	24	10¾	12	22¾
8	36	30	5¼	6	11¼
9	39	36	2½	3	5½

159. §.

Bei der Anordnung einer Röhrenleitung ist vorzüglich darauf Rücksicht zu nehmen, daß da, wo sich die Röhren wenden oder eine andere Richtung erhalten, die Biegung keine scharfe Ecke erhält, sondern bogenförmig gemacht wird, wobei es zuträglich ist, den Halbmesser der Biegung so groß als möglich anzunehmen, auch die Röhre, so weit die Biegung geht, allmählich zu erweitern. Wenn mehrere Röhren zusammenstoßen, so müssen alle plötzliche Verengungen vermieden werden, weil dadurch eine Contraction entstehet, wodurch die Wassermenge vermindert wird. Dagegen kann bei dem Eintritte des Wassers in die Röhren, die nöthige Erweiterung nach der Gestalt des zusammengezogenen Strahls (95. §.), und in gewissen Fällen die (96. §.) beschriebene Erweiterung der Ausmündung angebracht werden, wodurch eine Vermehrung der Wassermenge bewirkt wird.

Wenn eine Röhrenleitung in die Höhe steigt und dann wieder abfällt, so sammlet sich leicht in den höchsten Stellen Luft an, welche den Durchfluß des Wassers verhindert, daher man an den höchsten Stellen derselben,

kleine vertikale Luftröhren oder Windstöcke (*Columnariae*, *Ventouses*) anbringt, durch welche die Luft entweichen kann, ohne daß etwas Wasser verloren geht. In den tiefsten Stellen der Röhren pflegen sich hingegen leicht Schlamm und andere Unreinigkeiten anzusetzen, daher man daselbst, oder wenn die Röhrenleitung lang ist, etwa alle 25 Ruthen, viereckige Kasten oder Wechselhäuschen (*Regards*) anbringt, damit sich die Unreinigkeit in denselben absetzen kann.

Zur Fortleitung des Wassers bedient man sich der bleiernen, eisernen, hölzernen oder gebrannten thönernen Röhren, worunter die bleiernen den Vorzug verdienen, aber auch sehr kostbar sind.

Ueber die Anlage der Röhrenleitungen sehe man:

M. Vitruvius Pollio, Baukunst. Aus der römischen Urschrift übersetzt von A. Rode. II. Bd. Leipzig 1796. VIII. Buch, 7. Kap. S. 171 u. f.

J. *Leupold* Theatrum Machinarum Hydrotechnicarum, Leipzig 1724. XI. XII. und XIII. Kapitel von hölzernen, thönernen und bleiernen Röhren.

Belidor, Architectura Hydraulica, 1. Th. 4. Buch, 4. Kap. 1367. §. u. f.

Gesammlete Nachrichten, den Röhrenbau sowohl mit hölzernen als töpfernen Röhren betreffend. Leipziger Intelligenzblatt v. J. 1764. S. 559 u. f.

Bossut angef. Hydrodynamik, 2ter Band. 10tes Kapitel. 658. §. u. f.

Langsdorf angef. Hydraulik, 10. Kap. 137. §. u. f.

Zehntes Kapitel.

Von springenden Strahlen.

---

160. §.

Stellt man sich einen beständig gleich voll erhaltenen Behälter vor, an welchem sich eine Röhre befindet, in deren Wand eine Sprungöfnung oder Mündung (*Ajutage*) angebracht ist, durch welche das Wasser ausströmt, so gibt dies eine Darstellung von der Art, wie ein Springwerk, welches hier vorausgesetzt ist, bewerkstelliget werden kann. Die Röhre, in welcher das Wasser zur Sprungöfnung fließt, heißt die Leitröhre, und wenn sie vom Behälter vertikal abgeht, wird sie auch Fallröhre (*Tuyau de descente*) genannt, da dann zuweilen noch eine besondere engere Leitröhre angebracht ist.

Außer dieser Einrichtung kann auch noch dadurch ein springender Strahl (*Jet*) von sehr beträchtlicher Höhe hervorgebracht werden, wenn, wie bei Spritzen, statt der Druckhöhe des Wassers, eine andere Kraft zur Bewirkung eines Drucks angebracht wird.

Bei der Beurtheilung der Strahlhöhe, die hier immer, wenn nichts besonders dabei erinnert ist, vertikal angenommen wird, kommt es vorzüglich darauf an, welches die größte Geschwindigkeit ist die das Wasser erhält, wenn es die Mündung verlassen hat, weil der Strahl mit dieser Geschwindigkeit zu steigen anfängt. Nun findet bei einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre keine Zusammenziehung des Strahls Statt, weil derselbe in der ganzen Weite der Röhre fortströmt, daher steigt auch in diesem Falle der Strahl mit einer Geschwindigkeit, die der mittlern Geschwindigkeit des Wassers in der Ansatzröhre gleich ist. Bei einer Oefnung in einer dünnen Platte hingegen zieht sich der Wasserstrahl nach dem Ausflusse zusammen und erhält einen kleineren Querschnitt, also eine größere Geschwindig-

keit, mit welcher er aufwärts steigt, die $\frac{24}{25}$ von der Geschwindigkeit in der Oefnung ist (92. §.).

Wenn ein Wasserstrahl in die Höhe steigt, so hat er den Widerstand der Luft zu überwältigen, die er verdrängen muß; so bald er aber seine größte Höhe erreicht hat und sich nicht mehr in Absicht der Ausdehnung verändert, so ist von Seiten der Luft kein fernerer Widerstand zu erwarten, da der Druck der Luft gegen alle Theile des Strahls, und gegen das Wasser im Behälter, sehr nahe derselbe ist. Weil es nun überdies in der Ausübung selten auf eine sehr große Genauigkeit bei Bestimmung der Strahlhöhen ankommt, so ist man berechtiget, wenn die übrigen nicht sehr beträchtlichen Hindernisse bei Seite gesetzt werden, anzunehmen, daß ein Wasserstrahl diejenige Höhe erreicht, welche ein fester Körper erlangen würde, der mit der größten Geschwindigkeit des Strahls, womit das Wasser aufwärts steigt, in die Höhe geht, da alsdann auf den Widerstand der Luft bei der anfänglichen Bewegung nicht Rücksicht genommen wird. Ist daher

z die vertikale Strahlhöhe,

u die größte Geschwindigkeit, welche das Wasser erhält, wenn es seine Mündung verlassen hat, so wird (20. §.)

$$z = \frac{u^2}{4g}$$

161. §.

Wenn c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Mündung ist, so erhält man für eine Sprungöfnung in einer dünnen Platte

$$u = \frac{24}{25}\,c \text{ und } u^2 = 2{,}4414\;c^2 \text{ daher}$$

die Strahlhöhe (*Hauteur du jet*)

$$z = \frac{2{,}4414}{4g}\,c^2 = 0{,}03906\;c^2.$$

Der Werth von c^2 läßt sich leicht nach dem vorigen Kapitel finden, denn man bezeichne durch

h die gesammte Druckhöhe,
L die Länge der Leitröhre,
D den Durchmesser derselben,
A den Inhalt ihres Querschnitts, und durch
a den Inhalt der Sprungöfnung;

so ist nach 153. §. für preußisches Fußmaß

$$c^2 = \frac{h}{0{,}0417 + \left(-0{,}0174 + \frac{L}{2006 \cdot D}\right)\frac{a^2}{A^2}}$$

daher die Strahlhöhe

$$z = \frac{h}{1{,}0676 + \left(-0{,}445 + 0{,}0127\frac{L}{D}\right)\frac{a^2}{A^2}}$$

Ist die Leitröhre sehr kurz, so wird $L = 0$ also

$$z = \frac{h}{1{,}0676 - 0{,}445\frac{a^2}{A^2}}$$

und wenn die Leitröhre sehr weit ist, so daß man $\frac{a^2}{A^2} = 0$ setzen kann

$$z = 0{,}9367\ h \text{ oder nahe genug}$$
$$z = \tfrac{15}{16} \cdot h.$$

162. §.

Bestehet die Sprungöfnung aus einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre, so findet außerhalb der Mündung keine Zusammenziehung des Strahls Statt, daher ist $u = c$; also die Strahlhöhe

$$z = 0{,}016\ c^2$$

Nun ist 153. §.

$$c^2 = \frac{h}{0{,}0243 + \frac{L}{2006 \cdot D} \cdot \frac{a^2}{A^2}}$$

daher die Strahlhöhe

$$z = \frac{h}{1{,}518 + 0{,}03116\frac{L}{D} \cdot \frac{a^2}{A^2}}$$

Für $L = 0$ wird

$$z = 0{,}66 \cdot h.$$

Zur Vergleichung der vorstehenden Ausdrücke mit der Erfahrung können die von Bossut (Hydrod. 2ter Bd. 581 und 582. §.) und die von Mariotte*) angestellten Versuche dienen, weil aber beide Verfasser die Länge ihrer Leitröhre nicht genau angegeben haben, so mußte solche nach einer ungefähren Schätzung hier angenommen werden. Die Abmessungen beziehen sich sämmtlich auf pariser Maß, und es durfte zur Berechnung der Strahlhöhen keine Veränderung mit den vorstehenden Ausdrücken vorgenommen werden, weil man sich leicht überzeugen kann, daß sie außer dem rheinländischen Fußmaße auch für jedes andere Fußmaß gelten.

Noch ist nachstehender Tafel die letzte Colonne beigefügt worden, um daraus zu übersehen, wie die von Mariotte gegebene Regel, nach welcher

$$x = 10 \left[\sqrt{(3h + 225)} - 15 \right] \text{ seyn soll,}$$

mit der Erfahrung übereinstimmt, wenn mit ihm vorausgesetzt wird, daß eine Druckhöhe von $5\frac{1}{12}$ Fuß einen 5 Fuß hohen Strahl hervorbringt. Hiebei ist aber von Mariotte weder auf Leitröhre noch Sprungöfnung Rücksicht genommen worden. Auch wird man sich, bei einigen Versuchen von Mariotte, die wenige Uebereinstimmung der Rechnung mit den Erfahrungen leicht daraus erklären können, daß es mit großen Schwierigkeiten verbunden ist, sehr hohe Strahlen genau auszumessen. Die sehr genauen Bossut'schen Versuche, sowohl in der folgenden Tafel, als auch die im 164. §. angeführten, stimmen weit besser mit der Rechnung.

---

*) Oeuvres de M. *Mariotte*, T. II. à Leyde. 1717. Traité du mouvement des eaux etc. IV. Part. 1. Disc. p. 436.

Man hat von dieser Abhandlung eine deutsche Uebersetzung unter dem Titel:

Des weyland vortrefflichen Herrn Mariotte Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik ꝛc. Von D. J. C. Meinig. Leipzig 1723.

Versuche mit Sprungöfnungen in einer dünnen Platte.

N.	Versuche von.	Länge der Leitröhre.	Durchmess. der		Druckhöhe.	Strahlhöhe nach der		
			Leitröhre.	Mündung.		Erfahrung.	obiger Formel.	Regel von Mariotte.
		Fuß.	Zoll.	Linien.	Fuß.	Fuß.	Fuß.	Fuß.
1	Mar.	—	f. weit	3	5,5	5,389	5,15	5,40
2	Mar.	—	f. weit	4	5,6	5,396	5,15	5,40
3	Mar.	—	f. weit	6	5,6	5,396	5,15	5,40
4	Bossut	5	0,792	2	11	9,917	10,28	10,62
5	Bossut	4	0,792	4	11	9,653	10,02	10,62
6	Bossut	2	0,792	8	11	7,835	8,05	10,62
7	Bossut	5,5	$5\frac{3}{4}$	2	1	10,012	10,29	10,62
8	Bossut	4,5	$5\frac{3}{8}$	4	11	10,466	10,29	10,62
9	Bossut	3,66	$5\frac{3}{4}$	8	11	10,542	10,29	10,62
10	Mar.	12	3	6	12,333	12,000	11,54	11,81
11	Mar.	24	3	2	24,417	22,167	22,85	23,27
12	Mar.	24	3	4	24,417	22,833	22,85	23,27
13	Mar.	24	3	6	24,417	22,833	22,85	23,27
14	Mar.	26	3	3	26,083	22,000	24,41	24,14
15	Mar.	26	3	6	26,083	24,208	24,41	24,14
16	Mar.	26	3	10	26,083	23,750	24,41	24,14
17	Mar.	35	3	3	34,958	28,000	32,72	31,62
18	Mar.	35	3	4	34,958	30,000	32,72	31,62
19	Mar.	35	3	6	34,758	31,708	32,71	31,62
20	Mar.	35	3	15	34,958	27,000	31,05	31,62
	Versuch mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre.							
21	Bossut	1,33	$3\frac{2}{5}$	4	11	7,125	7,26	10,62

Weit genauer mit der Erfahrung stimmt die von mir in den Zusätzen zu Buat (286. §.) gegebene Anweisung zur Berechnung der Strahlhöhe. Sie ist aber zu weitläuftig, als daß hier davon Anwendung gemacht werden könnte, da sich selten ein Fall in der Ausübung ereignet, der eine solche Genauigkeit erforderte.

163. §.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß unter übrigens gleichen Umständen die Strahlen durch Oefnungen in einer dünnen Platte höher gehen, als wenn die Springöfnungen mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre versehen sind. Bei einer konischen Sprungöfnung von 5 Zoll 10 Linien Länge, die oben 4 und unten 9 Linien weit war, fand Herr Bossut unter einer Druckhöhe von 11 Fuß die Strahlhöhe 9 Fuß $6\frac{1}{4}$ Zoll, dahingegen war diese Höhe bei einer 4 Linien weiten Oefnung in einer dünnen Platte, 10 Fuß $5\frac{5}{6}$ Zoll, und bei einer 4 Linien weiten und 5 Zoll 10 Linien hohen Röhre nur 7 Fuß $3\frac{1}{2}$ Zoll, so daß der Strahl seine größte Höhe bei einer Oefnung in einer dünnen Platte, seine geringste aber bei einer cylindrischen Röhre erreichte, welches auch mit Mariotte's Beobachtungen übereinstimmt.

Bei den Versuchen über die Höhe der vertikal aufwärts steigenden Strahlen, neigte Bossut die Richtung der Strahls ein wenig schief, und fand, daß der Strahl dadurch noch eine etwas größere Höhe erreichte.

164. §.

Außer der vertikalen Höhe, welche ein Strahl erreicht, kann auch noch die Frage entstehen, wie weit er bei einer gegebenen Lage der Sprungöfnung spritzt, oder wie groß die Sprungweite ist. Setzt man zuerst den einfachsten Fall, daß die Axe der Gußmündung eines Springwerks horizontal liegt, und bezeichnet durch

- u die mittlere Geschwindigkeit des ausspringenden Strahls im Punkte der größten Zusammenziehung,
- H die Erhöhung der Mündung über einer Horizontalebene,
- W die Sprungweite des Strahls auf dieser Ebene,

so ist (29. §.)

$$W^2 = \frac{u^2}{g} H \text{ oder}$$

$$W = u\sqrt{\frac{H}{g}} = 0{,}253\ u\sqrt{H}.$$

Hieraus erhält man, weil $u = \frac{25}{16}\, c$ ist (92. §.), für eine Oefnung in einer dünnen Platte

$$W = 0{,}395\, c \sqrt{H}$$

und 162. §. für eine kurze Ansatzröhre

$$W = 0{,}253 \,.\, c \sqrt{H}.$$

Befindet sich an dem Behälter keine Leitröhre, so daß die Sprungöfnung unmittelbar an der Wand des Behälters angebracht ist, so wird, wenn h die Druckhöhe bezeichnet, $c = \alpha \sqrt{h}$, daher bei der Oefnung in einer dünnen Wand

$$W = 0{,}395 \,.\, 4{,}89 \,.\, \sqrt{h} \sqrt{H}$$
$$= 1{,}9316 \sqrt{(hH)}$$

und bei einer kurzen Ansatzröhre

$$W = 0{,}253 \,.\, 6{,}42 \sqrt{h} \sqrt{H}$$
$$= 1{,}624 \,.\, \sqrt{(hH)}$$

wo die beiden letzten Ausdrücke für jedes Fuß- oder Zollmaß gelten.

Beispiel. In der vertikalen dünnen Wand eines Behälters befindet sich bei 9 Fuß Druckhöhe eine Oefnung, 4,2986 Fuß über einer horizontalen Ebene. Wie weit wird der Strahl auf derselben springen?

$$h = 9,\ H = 4{,}2986 \text{ daher}$$

die Sprungweite

$$W = 1{,}9316 \sqrt{(9 \,.\, 4{,}2986)} = 12{,}014.$$

In nachstehender Tafel sind die beiden ersten Versuche von Bossut (Hyd. 2. Bd. 583. §.), und der dritte von Venturi (Rech. p. 74) bei Oefnungen in dünnen Wänden angestellt.

N.	Durchmesser der Oefnung. Linien.	Druckhöhe. Fuß.	Höhe H. Fuß.	Sprungweite nach der Erfahrung. Fuß.	Sprungweite nach der Berechnung. Fuß.
1	6	9	4,2986	12,270	12,014
2	6	4	4,2986	8,222	8,010
3	18	2,708	4,5	6,792	6,743

165. §.

In einem Gefäße, dessen Boden mit der Horizontalebene, worauf der Strahl fällt, gleich hoch liegt, befinde sich in einer vertikalen Wand desselben eine Oefnung, so erhält man allgemein (29. §.)

$$W^2 = \frac{u^2}{g} H. \quad \text{Aber (106. §. VIII.)}$$

$$u^2 = \alpha^2 h \text{ daher die Sprungweite}$$

$$W = \frac{\alpha}{\sqrt{g}} \sqrt{[h \cdot H]}$$

Nun sind α, g bestimmte Größen, daher hängt die Sprungweite vom Produkte der Höhen h . H ab. Aber H + h ist die ganze Höhe des Wassers über der Ebene, worauf die Sprungweite genommen wird, und es ist daher das Produkt H . h am größten, wenn h = H ist; folglich sprizt der Strahl auf einer mit dem Boden des Gefäßes gleichliegenden Horizontalebene am weitesten, wenn sich die Ausflußöfnung auf der halben Höhe des Wassers im Gefäße befindet.

Auch läßt sich einsehen, daß bei Oefnungen in gleicher Entfernung über oder unter der Mitte der Wasserhöhe, die Sprungweiten gleich groß sind.

166. §.

β Wenn die Axe der Sprungöfnung unter einem schiefen Winkel β gegen den Horizont aufwärts gerichtet ist, so erhält man (26. §.) allgemein die Sprungweite auf derjenigen Horizontalebene, welche durch die Mitte der Oefnung geht,

$$W = \frac{u^2}{2g} \text{Sin } 2\beta = 0{,}032 \; u^2 \text{ Sin } 2\beta$$

daher für eine Oefnung in einer dünnen Platte (161. §.)

$$W = 0{,}078125 \; c^2 \text{ Sin } 2\beta$$

und für eine kurze Ansatzröhre (162. §.)

$$W = 0{,}032 \; c^2 \text{ Sin } 2\beta$$

Wenn sich die Sprungöfnung unmittelbar in der Wand eines Behälters befindet, so daß die Leitröhre wegfällt, so erhält man, wenn h die Druckhöhe bezeichnet, $c^2 = \alpha^2 h$, daher für Oefnungen in einer dünnen Wand

$$W = 0{,}078125 \; . \; 23{,}91 \; h \text{ Sin } 2\beta$$
$$= 1{,}868 \; h \text{ Sin } 2\beta$$

und für eine kurze Ansatzröhre

$$W = 0{,}032 \; . \; 41{,}22 \; h \text{ Sin } 2\beta$$
$$= 1{,}319 \; h \text{ Sin } \alpha.$$

Noch ergibt sich aus 27. §.

daß die Sprungweiten unter übrigens gleichen Umständen einander gleich sind, wenn sich die Neigungswinkel der Axen der Sprungöfnungen gegen den Horizont zu 90 Grad ergänzen.

Auch folgt aus 28. §.

daß die größte Sprungweite, unter übrigens gleichen Umständen, einem Neigungswinkel von 45 Grad entspricht;

ferner:

daß die größte Sprungweite doppelt so groß ist als die vertikale Strahlhöhe, wenn der Strahl gerade aufwärts gerichtet ist,

und endlich:

daß die größte Sprungweite viermal so groß ist, als die lothrechte Höhe vom Scheitel des Strahls, bis zum Horizont.

1. Beispiel. In der Wand eines Behälters ist eine kurze Ansatzröhre unter einem Winkel von 40 Grad gegen den Horizont geneigt; wie groß wird die Sprungweite auf dem Horizonte der Oefnung seyn, wenn über derselben 36 Fuß Druckwasser stehet?

$$h = 36,\ \mathrm{Sin}\ 2\beta = \mathrm{Sin}\ 80^\circ = 0{,}9848 \text{ daher}$$

die gesuchte Sprungweite

$$W = 1{,}319\ .\ 36\ .\ 0{,}9848 = 46{,}76 \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Bei dem Gußrohr einer Feuerspritze, beträgt die Geschwindigkeit des Wassers in der Mündung 60 Fuß; welche Höhe wird der vertikal aufwärtssteigende Strahl erreichen, und wie viel wird die größte Sprungweite betragen?

$$c = 60, \text{ daher}$$

wenn die Gußröhre als eine kurze Ansatzröhre angesehen werden kann, die Strahlhöhe (162. §.)

$$z = 0{,}016\ .\ 60^2 = 57{,}6 \text{ Fuß}$$

und weil für die größte Sprungweite $W = 2z$ ist, so findet man

$$W = 115{,}2 \text{ Fuß.}$$

Eilftes Kapitel.

Vom Stoße oder hydraulischen Druck des Wassers.

167. §.

Wird eine Fläche von einem fließenden Wasser gestoßen, so läßt sich allemal ein Gewicht angeben, welches mittelst eines Fadens über einer Rolle, die Fläche nach entgegengesetzter Richtung des strömenden Wassers ziehen

und solche in Ruhe erhält oder mit dem fortwährenden Stoße des Wassers, welcher hier als hydraulischer Druck angesehen werden kann, im Gleichgewichte ist. Wenn dieses Gewicht in Pfunden ausgedrückt wird, so sagt man, der Wasserstoß betrage eben so viele Pfunde.

In Absicht der Körpers, welcher vom Wasser gestoßen wird, kann man den geraden oder senkrechten und den schiefen Stoß gegen eine Ebene, außerdem aber noch den Stoß gegen Körper von verschiedentlich geformten Oberflächen unterscheiden, wobei in Beziehung auf das anstoßende Wasser folgende Fälle zu bemerken sind:

I. Der Stoß isolirter Strahlen,
wenn der Wasserstrahl von allen Seiten mit freier Luft umgeben ist, indem er gegen die Fläche stößt.

II. Der Stoß im unbegrenzten Wasser,
wobei das Wasser zwar in einem Bette eingeschlossen ist, die gestoßene Fläche aber in Bezug auf den Querschnitt des Wassers, nur sehr klein angenommen wird.

III. Der Stoß im begrenzten Wasser oder in Gerinnen,
wenn sich zwischen der gestoßenen Fläche und den Wänden des Kanals oder Gerinnes, worin sich das Wasser bewegt, nur ein geringer Zwischenraum befindet.

So einfach und leicht die Lehre vom Stoße fester Körper ist, so vielen kaum übersteiglichen Schwierigkeiten ist die Theorie vom Stoße flüssiger Massen unterworfen, und wenn schon bei der Bewegung des Wassers keine ganz zureichende Resultate erhalten wurden, so läßt sich dies um so weniger bei dem Stoße des Wassers erwarten. Die folgenden Untersuchungen müssen daher auch nur als Annäherungen betrachtet werden, welche sich nicht zu weit von der Erfahrung entfernen.

168. §.

Die bewegende Kraft P theile der Masse Q in der Zeit t die Geschwindigkeit c mit, so ist (35. §. IX.) die Kraft

$$P = \frac{c}{2gt} Q$$

wo P den Druck bezeichnet, welchen die Masse Q gegen einen unbeweglichen Widerstand ausübt, wenn Q in der Zeit t die Geschwindigkeit c erlangt hat.

Bewegt sich das Wasser mit einer Geschwindigkeit c senkrecht gegen eine unbewegliche Ebene, welche man als Widerstand ansehen kann, und die in jeder Sekunde gegen die Ebene strömende Wassermenge ist $= M$, das Gewicht von einem Kubikfuß Wasser $= \gamma$ *), so ist das Gewicht dieser Wassermenge $= M\gamma$. Nun kann man sich vorstellen, daß die stoßende Wassermasse in irgend einem Zeittheilchen t' ihre Geschwindigkeit c erhalten habe, alsdann ist das Gewicht der Wassermenge die in jedem Zeittheilchen t' zum Stoße gelangt $= t'M\gamma$. Bezeichnet daher P den hydraulischen Druck, welchen die Masse $t'M\gamma = Q$ gegen einen ruhenden Widerstand ausübt, so ist $t' = t$ also $P = \frac{c}{2gt}\, t'M\gamma$, und man findet den hydraulischen Druck oder Stoß des Wassers gegen eine unbewegliche Fläche

$$P = \frac{c}{2g} M\gamma$$

vorausgesetzt, daß sämmtliche Wassertheile die Fläche treffen.

---

*) Nach der Maß- und Gewichtordnung für die k. preußischen Staaten, Berlin 1816. §. 18. wiegt der preußische Kubikfuß destillirtes Wasser, im luftleeren Raume, bei einer Temperatur von 15 Grad des Reaumurschen Quecksilberthermometers, 66 preußische Pfund, welche mit dem cölnischen Markgewichte übereinkommen. Für andere Temperaturen findet man eine Tafel berechnet in meinem

Nachtrag zur Vergleichung der in den k. preußischen Staaten eingeführten Maße und Gewichte. Berlin 1817. S. 18.

Hienach hängt der Stoß des Wassers ab:

I. von der **Wassermenge**, welche in jeder Sekunde gegen die Fläche stößt, und

II. von der **Geschwindigkeit**, mit welcher das Wasser die Fläche trift.

f Bezeichnet man ferner durch f den Flächeninhalt vom
Querschnitte des anschlagenden Wassers, bei ungeschwäch-
h ter Geschwindigkeit c, und durch h die Fallhöhe, welche
der Geschwindigkeit c zugehört, so ist $M = fc$ und $c^2 = 4gh$
(16. §.) daher der **Stoß gegen eine unbewegliche
Fläche** oder

$$P = \frac{c^2}{2g} f\gamma \text{ oder auch}$$
$$= 2hf\gamma.$$

Hieraus folgt, daß sich bei gleichen Querschnitten der anstoßenden Wasserstrahlen, die senkrechten **Stöße des Wassers, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten**, oder **wie die**, den **Geschwindigkeiten zugehörigen Höhen** verhalten.

169. §.

Der senkrechte Stoß des Wassers gegen eine **bewegte
Ebene**, oder der **relative Stoß** wird sich auf eine
ähnliche Art bestimmen lassen, weil es darauf ankommt,
wie viel Wasser in jeder Sekunde anschlägt, und mit wel-
cher Geschwindigkeit das Wasser die Fläche trift. Bewegt
sich das Wasser mit der Geschwindigkeit c und die Fläche,
deren Inhalt dem Querschnitte f des anstoßenden Wassers
v gleich ist, mit der Geschwindigkeit v nach eben derselben
Richtung, und es ist $c > v$, so kann nicht die gesammte
Wassermenge $M = c \cdot f$ zum Stoße gelangen, weil, indem
die Fläche in einer Sekunde um den Weg v weiter geht,
das mit der Geschwindigkeit c nachfolgende Wasser $c \cdot f$
um den Weg v zurückbleibt, also nur die Wassermenge
$(c - v) f$ zum Stoße gelangt. Jedes Wassertheilchen,

welches die Ebene erreicht, wirkt mit der Geschwindigkeit c — v in dieselbe, es ist daher der relative Stoß

$$\text{I.} \quad P = \frac{c-v}{2g}(c-v) f\gamma$$

$$= \frac{(c-v)^2}{2g} f\gamma$$

Könnte man annehmen, daß sämmtliche Wassertheile des Zuflusses M zum Stoße gelangen, welches der Fall wäre, wenn die Fläche f jeden Augenblick durch eine andere ersetzt würde, so daß kein Wassertheilchen ohne zu stoßen fortfließen könnte, wie dieses nahe genug bei enggeschaufelten unterschlächtigen Rädern der Fall ist, so wäre die in jeder Sekunde anschlagende Wassermenge $= M = cf$. Die Geschwindigkeit, mit welcher jedes Wassertheilchen in die Fläche wirkt, bleibt $= c - v$, daher ist unter der obigen Voraussetzung, der relative Stoß

$$\text{II.} \quad P = \frac{c-v}{2g} cf\gamma$$

$$= \frac{c-v}{2g} M\gamma$$

Anmerk. Der Ausdruck I. kommt mit der von Parent gegebenen Theorie vom Stoße des Wassers überein. Man s. dessen Abhandlung:

Sur la plus grande perfection possible des machines, par M. *Parent*. Mémoires de l'académie de Paris, année 1704. Ed. Bat. p. 433.

Aehnliche Resultate, wie die im zuletzt gefundenen Ausdruck für den relativen Stoß, findet man in nachstehenden Schriften:

Sur les roues hydrauliques, par M. le Chevalier de *Borda*. Mémoires de l'acad. de Paris, annés 1767. Paris 1770.

Theorie des Wasserstoßes in Schußgerinnen, mit Rücksicht auf Erfahrung und Anwendung, vom Professor Gerstner. Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 2ter Bd. Prag 1795. S. 179 u. f.

Mathematical and Philosophical Dictionary, by Ch. *Hutton*. London 1795. Art. Mill. p. 110.

Langsdorf, angeführte Maschinenlehre, 1ter Band. 12. Kap. S. 119 u. f.

170. §.

Stößt ein isolirter Strahl gegen eine unbewegliche Ebene senkrecht, und das Wasser kann sich auf derselben hinlänglich ausbreiten, damit kein Wassertheilchen ohne zu stoßen abfließen kann, so werden alle Bedingungen, welche dem allgemeinen Ausdrucke (168. §.) zum Grunde liegen, erfüllt, daher läßt sich auch für den Stoß isolirter Strahlen, der hydraulische Druck

$$P = \frac{c}{2g} M\gamma = 2hf\gamma$$

annehmen.

Die sorgfältigen Versuche von Bossut (Hydrod. 2. Bd. 830. §.) und Langsdorf (Lehrbuch der Hyd. 204. §.) geben eben dieses Resultat, wobei vorausgesetzt ist, daß der Durchmesser der gestoßenen Fläche wenigstens viermal so groß als der Durchmesser des isolirten Strahls ist.

Ist hingegen die gestoßene Fläche kleiner, so daß nicht sämmtliches Wasser zum Stoße gelangt, so kann auch die Formel (168. §.) keine Anwendung finden. Aus Hrn. Langsdorf's Versuchen folgt, daß wenn die gestoßene Fläche dem Querschnitte des Strahls vor seiner Ausbreitung gleich ist, so wird der Stoß nur halb so groß, wie bei einer hinlänglich großen Fläche, also

$$P = fh\gamma.$$

171. §.

Setzt man bei dem senkrechten Stoße des unbegrenzten Wassers gegen eine Ebene, den Inhalt derselben $= f$, so ist ebenfalls der Querschnitt des auf die Ebene strömenden Wassers $= f$. Weil aber von diesem Wasser nicht alle Theile desselben zum Stoße gelangen, da sich in einer gewissen Entfernung vor der Fläche, die Wasserfäden von ihrer vorigen Richtung ablenken, so muß der Stoß geringer als nach dem allgemeinen Ausdrucke (168. §.) gefunden werden. Hiezu kommt noch, daß wegen der Wirkung auf das Hintertheil der Fläche, ein besonderer Effekt ent-

stehet, der nicht in Rechnung gebracht ist; es bleibt daher nichts übrig als diejenigen Resultate anzunehmen, welche aus den besten hieher gehörigen Versuchen gezogen sind.

Bossut, d'Alembert und Condorcet haben über den Stoß im unbegrenzten Wasser sehr vielfältige Versuche *) angestellt, und ziehen daraus die Regel (Chap. V. p. 173) daß der senkrechte Stoß sehr nahe dem Gewichte einer Wassersäule gleich sei, welche die gestoßene Fläche zur Grundfläche, und die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe zur Höhe habe; man findet daher den senkrechten Stoß gegen eine unbewegliche Fläche im unbegrenzten Wasser oder

$$P = hf\gamma = \frac{c^2}{4g} f\gamma = \frac{c}{4g} M\gamma,$$

welches halb so viel ist, als nach dem 168. §.

Zur Bestimmung des relativen Stoßes im unbegrenzten Wasser, lassen sich die allgemeinen Ausdrücke im 169. §. mit den erforderlichen Abänderungen anwenden.

172. §.

Bei dem Stoße im begrenzten Wasser oder in Gerinnen, wo sich zwischen der gestoßenen Fläche und den Wänden des Gerinnes, so weit es mit Wasser angefüllt ist, nur ein geringer Zwischenraum befindet, muß nothwendig die Stoßfläche eine gewisse Geschwindigkeit haben, und nebst den Seitenwänden des Gerinnes höher als der Querschnitt des zuströmenden Wassers seyn, wenn alle vor der Stoßfläche anlangende Wassertheile, zum Stoße gelangen sollen.

Bossut folgert aus den im vorigen §. angeführten Versuchen, so weit solche in einem engen Kanal angestellt

---

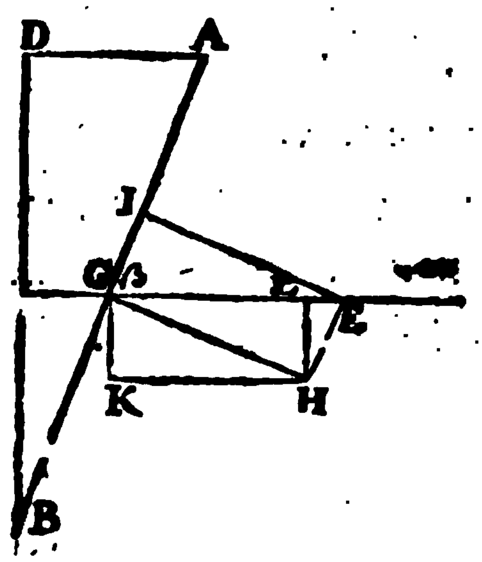
*) Nouvelles expériences sur la Résistance des fluides, Par M. M. d'*Alembert*, le Marquis de *Condorcet* et l'Abbé *Bossut*. (M. Bossut, Rapporteur.) à Paris 1777.

Von diesen Versuchen befindet sich ein Auszug im zweiten Bande der Bossut'schen Hydrodynamik.

sind (Hydrodyn. 2. Band 952. §.), daß der senkrechte Stoß gegen die Schaufeln eines unterschlächtigen Wasserrades in einem Schußgerinne, beinahe doppelt so groß als die Gewalt ist, welche die Schaufelfläche eben so tief unter Wasser gesetzt, in einem unbegrenzten Strome leiden würde.

Hienach wird es leicht seyn, den Umständen gemäß, von den allgemeinen Ausdrücken im 169. §. Gebrauch zu machen.

173. §.



Eine Fläche AB sei gegen die Richtung eines einzelnen anstoßenden Wasserfadens EG unter dem Einfallswinkel EGA $= \beta$ geneigt; ist nun P die Kraft, mit welcher das Wasser eine Ebene BD, welche senkrecht auf der Richtung EG desselben stehet, stoßen würde, so kann daraus der Normalstoß Q senkrecht auf die schiefe Ebene AB bestimmt werden.

Man nehme GE $=$ P, zeichne das Rechteck GHEI, so ist nach dem Parallelogramm der Kräfte, wenn EG in die Seitenkräfte EH und EI $=$ GH zerlegt wird, GH $=$ Q. Aber

$$GH = GE \operatorname{Sin} \beta$$

daher der Normalstoß

$$Q = P \operatorname{Sin} \beta.$$

Die Kraft EH $= P \operatorname{Cos} \beta$, parallel mit der Ebene, kann in Absicht des Stoßes nichts wirken und geht verloren.

Aus der Kraft, welche von dem anstoßenden Wasser, als Stoß gegen die Ebene AB verwandt wird, läßt sich durch Zerlegung in die Seitenkräfte, sowohl der Seitenstoß Q' nach der Richtung KG, senkrecht auf EG, als auch der Parallelstoß Q'' nach der Richtung EG des anstoßenden Wassers finden, wenn das Rechteck HLGK

gezeichnet wird. Hienach wird Q′ durch KG, und Q″ durch LG vorgestellt, und es ist

$$KG = GH \cos \beta \text{ daher}$$

der Seitenstoß

$$Q' = P, \sin \beta \cos \beta$$

Ferner ist

$$LG = GH \sin \beta \text{ daher}$$

der Parallelstoß

$$Q'' = P \sin \beta^2.$$

Setzt man, daß die Fläche BD, die Projektion der ganzen schiefen Fläche AB ist und nimmt an, daß der Querschnitt des anstoßenden Wassers der Projektion BD gleich sei, so gelten noch die vorigen Schlüsse und man findet hienach den Stoß gegen eine schiefe Ebene nach der Richtung des anstoßenden Wassers oder, den Parallelstoß, wenn der senkrechte Stoß auf ihre Projektion, mit dem Quadrate vom Sinus des Einfallswinkel multiplizirt wird.

Auch folgt hieraus ferner, daß sich die Parallelstöße gegen verschiedene schiefe Ebenen von einerlei Projektion, wie die Quadrate der Sinusse ihrer Einfallswinkel verhalten.

174. §.

Wie weit die vorhergehenden allgemeinen Sätze mit der Erfahrung übereinstimmen, kann nur nach richtigen Versuchen genau ausgemittelt werden. So viel läßt sich einsehen, daß, weil beim unbegrenzten Wasserstoß nicht alle Wassertheile zum Stoße gelangen, und schon in einer Entfernung von der schiefen Ebene nach mancherlei Richtungen abfließen, ohne die Ebene unter einem bestimmten Neigungswinkel zu treffen, auch hier keine Uebereinstimmung zu erwarten ist. Dahingegen stimmt bei dem Stoße isolirter Strahlen die Erfahrung sehr genau mit den Resultaten des vorigen §. überein, wie man sich aus den vortrefflichen Versuchen des Herrn Langsdorf überzeugen kann.

Anmerkung. Diese Versuche, wovon 79 in Absicht des senkrechten Stoßes, und 66 zur Ausmittelung des schiefen Stoßes isolirter Strahlen angestellt sind, findet man im vierzehnten Kapitel von Hrn. Langsdorf Lehrbuch der Hydraulik beschrieben. Um die schöne Uebereinstimmung der Theorie mit diesen Erfahrungen zu übersehen, sind ohne Auswahl nachstehende sieben Versuche, die mit 2 Zoll weiten Ausflußöfnungen unter beinahe gleichen Druckhöhen angestellt sind, hier angeführt und mit der Theorie verglichen.

N. der Versuche	Wasserhöhe in pariser		Größe des Einfallswinkels.		Beobachteter Wasserstoß in nürnberger Pfund.	Verhältniß des beobachteten Wasserstoßes.	Verhältniß des Wasserstoßes nach der Theorie.
	Zoll.	Lin.	Grad	Min.			
1	39	1	90		6,3250	1,000	1,000
2	39	1	70	16	5,6700	0,896	0,885
3	39	2	60	16	4,5583	0,721	0,753
4	39	3	50	46	3,3933	0,536	0,599
5	39	3	39	46	2,5450	0,402	0,408
6	39	1	30	16	1,8685	0,295	0,254
7	39	1	26	16	1,1500	0,182	0,195

175. §.

Es ist schon angeführt, weshalb bei dem schiefen Stoße des unbegrenzten Wassers keine Uebereinstimmung zwischen 173. §. und der Erfahrung zu erwarten ist, und es fehlt bis jetzt noch an einer vollständigen Theorie hierüber. Die zu diesem Ende von Bossut, d'Alembert und Condorcet angestellten Versuche beweisen hinlänglich, daß ein ganz anderes Verhältniß als das vom Quadrate des Sinus des Einfallswinkels Statt findet, wie man sich aus der von Bossut (Hydrod. 2. Bd. 991. §.) nach den Versuchen berechneten Tafel, welche die Verhältnisse des Widerstandes für verschiedene Einfallswinkel angibt,

überzeugen kann. Eine bessere Uebereinstimmung mit diesen Versuchen gibt die Voraussetzung, daß sich die Parallelstöße, wie die simplen Sinusse der Einfallswinkel verhalten, obgleich bei kleinen Winkeln, beträchtliche Abweichungen entstehen.

Bis Theorie und Erfahrung hierüber mehr Aufklärung geben, kann man zu Folge der angeführten Versuche den Parallelstoß

$$Q'' = [\operatorname{Sin}\beta^2 + (1 - \operatorname{Sin}\beta)\,0{,}4]\,P$$

annehmen, ohne sich auf weitläuftige Formeln einzulassen, die sich doch auch nur auf ein Tatonnement gründen.

Anmerk. Nachstehende Tafel enthält in der zweiten Spalte die von Bossut aus den Versuchen gezogenen Verhältnisse, für den schiefen Stoß bei einerlei Projektion und Geschwindigkeit, wenn der senkrechte Stoß auf die Projektion = 10000 gesetzt wird. In der dritten Spalte sind die Parallelstöße unter der Voraussetzung berechnet, daß sich dieselben wie Quadrate von den Sinussen der Einfallswinkel verhalten, und in der letzten ist die obige Formel zum Grunde gelegt.

Einfallswinkel. Grade.	Verhältniß des Parallelstoßes nach der Erfahrung.	Verhältniß nach den ☐☐ der Sinus der Einfallswinkel.	Verhältniß nach obiger Formel.
90	10000	10000	10000
84	9893	9890	9912
78	9578	9568	9655
72	9084	9045	9241
66	8446	8346	8710
60	7710	7500	8036
54	6925	6545	7509
48	6148	5523	6550
42	5433	4478	5801
36	4800	3455	5104
30	4404	2500	4500
24	4240	1654	4027
18	4142	955	3719
12	4063	432	3600
6	3999	109	3691

In der letzten Spalte fangen zwar die Zahlen zu wachsen an, wenn $\beta = 11° \ 33'$ wird, so daß man für $\beta = 0$ endlich 0,4 erhält, daher dieser Ausdruck auch nicht wohl auf Winkel zwischen 6 und 0 Grad angewandt werden kann. Im zweiten Theil der Nouv. Archit. Hydraulique par Prony in den Eclairciss. p. 20, findet man einen weitläuftigen und schwer aufzulösenden Ausdruck für den schiefen Stoß, welcher aber ebenfalls zuletzt für kleinere Winkel größere Werthe gibt.

In Absicht der Theorie vom Stoße des Wassers ist überhaupt zu merken, daß solche noch sehr mangelhaft, und darin noch vieles zu leisten übrig ist. Im Vorhergehenden hat man sich, dem Zwecke gemäß, an die einfachsten Darstellungen halten müssen, deren Resultate sich nicht zu weit von der Erfahrung entfernen, und welche keinen zu verwickelten Calcul mit sich führen. Genauere Untersuchungen erfordern aber, daß

man sehr wohl unterscheide, ob sich die gestoßene Fläche gegen das Wasser, oder dieses gegen die ruhende Fläche bewege, so wie auch die Form des hinteren Theiles vom gestoßenen Körper nicht gleichgültig ist. Nach einem größeren Umfange findet man die Theorie des Wasserstoßes in nachstehenden Schriften bearbeitet:

Examen maritime théorique et pratique, ou Traité de mécanique appliqué à la construction et à la manoeuvre des Vaisseaux et autres Bâtiments. Par Don George *Juan*. Traduit de l'espagnol avec des additions, par M. Levêque. Tome I. à Nantes 1783. (Liv. II. Chap. 1—9).

De Lagrange, sur la percussion des fluides. Mémoires de l'acad. des sciences de Turin, Années 1784—85. I. Partie pag. 95.

Du Buat Principes d'Hydraulique. Nouvelle édition, T. II. Paris 1786. III. Partie p. 131 etc.

Prony, angef. N. Archit. Hydraul. 1. Th. 1. Bd. im vierten Abschnitt. 867—955 §.

Langsdorf, Lehrbuch der Hydraulik, im vierzehnten Kapitel.

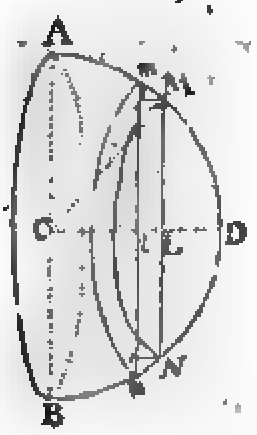
Der Viceadmiral Chappmann hat zwar in den neuen Abhandlungen der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften, 1795, 2tes Quartal, eine Formel für den schiefen Stoß des unbegrenzten Wassers mitgetheilt, welche sich auf die von ihm angestellten Versuche gründet, ohne daß dabei auf die sehr wichtigen Bossut'schen Versuche Rücksicht genommen wäre. Der Formel selbst liegt keine Theorie zum Grunde. Auch führt Chappmann an, daß der Widerstand nicht dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei; eine Behauptung, welche den bis jetzt bekannt gewordenen Erfahrungen widerspricht, daher es zu wünschen wäre, daß die hieher gehörigen Versuche und die Art, wie solche angestellt worden sind, vollständig mitgetheilt werden mögen.

176. §.

Weil schon der Stoß des Wassers gegen schiefe Ebenen so vielen Schwierigkeiten ausgesetzt und noch nicht hinlänglich berichtiget ist, so lassen sich auch keine befriedigende Resultate erwarten, wenn diese Theorie auf den Stoß runder Körper angewendet wird.

Anmerk. Will man als ein Beispiel den parallelen Stoß gegen die Oberfläche einer Kugel ausmitteln, so kommt es auf die dabei anzunehmende Voraussetzung an:

1. Wenn sich die Parallelstöße wie die Quadrate der Sinus der Einfallswinkel verhalten, so sei



Q der Parallelstoß auf die Halbkugel ABD in beistehender Figur.

P der senkrechte Stoß auf die Projektion ACB,

q der Parallelstoß auf das unbestimmte Stück, MDN,

p der senkrechte Stoß auf dessen Projektion MLN,

$r = AC = CD$ der Halbmesser der Kugel, gegen welche das Wasser nach der Richtung DC strömt.

$x = DL$ und $y = ML$.

Nun verhält sich

Kr. Fläche MN : Kr. Fläche AB $= p : P$ oder

$\pi(2rx - x^2) : \pi r^2 = p : P$ daher ist

$p = \frac{P}{r^2}(2rx - x^2)$ und das Differential

$dp = \frac{2P}{r^2}(r - x)\,dx$

Wächst $DL = x$ um den unendlich kleinen Theil $Ll = dx$ und man zieht mn durch l mit MN parallel und Mr, No, auf mn senkrecht, so wächst $ML = y$ um $mr = dy$. Der Stoß q gegen die krumme Oberfläche MDN wächst alsdann um dq und der Stoß p gegen die Kreisfläche MLN um dp. Nur dq wirkt gegen die krumme Oberfläche MmnN und dp gegen die Fläche mron; es verhält sich daher

$$dq : dp = (\mathrm{Sin}\, mMr)^2 : 1^2$$
$$= mr^2 : Mm^2$$
$$= CL^2 : CM^2$$
$$= (r-x)^2 : r^2 \text{ daher ist}$$

$$dq = \frac{(r-x)^2}{r^2}\,dp$$

Aber $dp = \frac{2P}{r^2}(r-x)\,dx$ daher

$$dq = \frac{(r-x)^2}{r^2} \cdot \frac{2P}{r^2}(r-x)\,dx = \frac{2P}{r^4}(r-x)^3\,dx$$

Integrirt man diesen Ausdruck, so wird

$$q = \frac{2P}{r^4}\int (r-x)^3\,dx$$

$$q = \frac{2P}{r^4}\left[r^3x - \tfrac{3}{2}r^2x^2 + rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right] + \mathrm{Const.}$$

wo Const $= 0$ ist, weil für $x = 0$ auch $q = 0$ wird.

Für $x = r$ ist $q = Q$ daher

$$Q = \frac{2P}{r^4}\left[r^4 - \tfrac{3}{2} r^4 + r^4 - \tfrac{1}{4} r^4\right] \text{ oder}$$

$$Q = \tfrac{1}{2} P.$$

II. Sezt man, daß sich die Parallelstöße, wie die Sinus der Einfallswinkel verhalte, so wird

$$dq = \frac{r - x}{r}\, dp \text{ oder}$$

$$dq = \frac{r - x}{r} \cdot \frac{2P}{r^2}(r - x)\, dx$$

$$= \frac{2P}{r^3}(r - x)^2\, dx$$

Integrirt man, so ist

$$q = \frac{2P}{r^3}\int (r - x)^2\, dx$$

$$= \frac{2P}{r^3}\left[r^2 x - r x^2 + \tfrac{1}{3} x^3\right]$$

daher wie oben

$$Q = \frac{2P}{r^3}\left[r^3 - r^3 + \tfrac{1}{3} r^3\right] \text{ oder}$$

$$Q = \tfrac{2}{3} P.$$

III. Wollte man den im vorigen §. für den Parallelstoß angegebenen Ausdruck

$$dq = [\operatorname{Sin}\beta^2 + 0{,}4 - 0{,}4 \operatorname{Sin}\beta]\, dp$$

annehmen, so ist hier

$$\operatorname{Sin}\beta = \frac{r - x}{r} \text{ daher}$$

$$dq = \left[\frac{(r - x)^2}{r^2} + 0{,}4 - 0{,}4\,\frac{r - x}{r}\right] dp$$

$$= [r^2 - 1{,}6\, r x + x^2]\, \frac{dp}{r^2} \text{ oder}$$

$$= [r^2 - 1{,}6\, r x + x^2]\, \frac{2P}{r^4}(r - x)\, dx$$

$$= \frac{2P}{r^4}\left[r^3 - 2{,}6\, r^2 x + 2{,}6\, r x^2 - x^3\right] dx$$

davon das Integral, gibt

$$q = \frac{2P}{r^4}\left[r^3 x - 1{,}3\, r^2 x^2 + \frac{2.6}{3}\, r x^3 - \tfrac{1}{4} x^4\right]$$

und hieraus wie vorher

$$Q = \tfrac{19}{30} P.$$

Von diesen drei verschiedenen Resultaten stimmt keines mit meinen an einem andern Orte bekannt gemachten sorgfältigen

Versuchen *) über den Stoß des Wassers in einem Flusse gegen eine Kugel. Diese gaben:

$$Q = 0{,}7886 \,.\, P$$

anstatt daß die vorhergehenden Ausdrücke den Stoß des Wassers gegen die Kugeloberfläche kleiner finden lassen. Es scheint überhaupt, daß, so wenig wie man bis jetzt von dem senkrechten Stoße unmittelbar auf die Größe des schiefen Stoßes schließen kann, sich eben so wenig ein richtiger Schluß, von dem Stoße des Wassers gegen eine schiefe Ebene, auf den Stoß gegen eine krumme Oberfläche machen läßt. Aus dem von mir gefundenen Stoße in Vergleichung mit den Bossut'schen Versuchen geht etwa so viel hervor, daß bei gleicher Projektion der Stoß gegen eine Halbkugel beinahe so groß sei, als der Parallelstoß gegen eine schiefe Ebene, welche mit der Richtung des Wassers einen Winkel von 62 bis 65 Grad einschließt.

Zwölftes Kapitel.

Von den oberschlächtigen Wasserrädern.

177. §.

Wenn bei einem Gefälle von wenigstens 7 bis 8 Fuß eine Maschine mittelst eines Wasserrades in Bewegung gesetzt werden soll, so bedient man sich dazu gewöhnlich eines **oberschlächtigen Rades** (Rota directa, *Roue à pots*), bei welchem das Wasser am Scheitel des Rades einfällt und von den am Umfange desselben befindlichen Zellen aufgefangen wird, wodurch eine Bewegung des Rades entstehet.

---

*) **Versuche mit dem Stromquadranten**, in Beziehung auf die Bestimmung der Geschwindigkeit der Flüsse. In der Sammlung nützlicher Aufsätze und Nachrichten, die Baukunst betreffend. Jahrgang 1799. 2. Band, Seite 55 u. f.

Die vortheilhafteste Anordnung dieser Räder zu bestimmten Zwecken, gehört in die Maschinenlehre und wird daselbst abgehandelt werden. Hier kommt es lediglich darauf an, in gegebenen Fällen die Kraft zu bestimmen, welche von dem Wasser an einem dergleichen Rade ausgeübt werden kann, weshalb auch nur so viel von der Construction dieser Räder angeführt wird, wie zur Beurtheilung ihres Effekts nöthig ist.

178. §.

An einem Rade, dessen vertikaler Durchmesser AB (Fig. 1.) ist, befinde sich auf der einen Seite des Um- Taf. I.
fangs ein Theil eines Wasserringes oder ein wasserhalten- Fig. 1.
der Bogen, dessen centrische Linie DFE ist, und bei welchem alle Querschnitte nach der Richtung des Mittelpunktes C einander gleich sind. Man sucht das statische Moment, oder die Kraft, mit welcher dieser wasserhaltende Bogen das Rad umzudrehen strebt.

Denkt man sich über und unter dem horizontalen Querschnitte IH ein vertikales Wasserprisma KL, welches mit dem Bogen DFE einerlei vertikale Höhe MN hat, so läßt sich beweisen, daß dieses Prisma eben so auf die Umdrehung des Rades, wie der wasserhaltende Bogen DFE wirkt. Man nehme in der centrischen Linie des Bogens einen äußerst kleinen Theil mn an, und ziehe durch m, n die Querschnitte $m'm''$ und $n'n''$ nach dem Mittelpunkte C, so wird durch diese Querschnitte eine Wasserschicht $m'n'n''m''$ begrenzt. Durch m und n ziehe man ferner die Horizontallinien mp, nq, so wird dadurch in dem Prisma KL eine horizontale Wasserschicht pqq' abgeschnitten, welche man mit der des wasserhaltenden Bogens als zusammengehörig betrachten kann, und man sieht leicht ein, daß sich der ganze Bogen und das ganze Prisma in solche zusammengehörige Wasserschichten eintheilen läßt. Man ziehe mG senkrecht auf CH und verlängere qn bis o, so ist das $\triangle$ mon $\sim$ CGm, weil beide rechtwinklicht und $\angle$ nmo = mCG; es verhält sich daher

Taf. I. Fig. 1.

$$mn : mo = mC : CG \text{ also}$$
$$CG \cdot mn = mC \cdot mo \text{ oder}$$
$$CG \cdot mn = CF \cdot pq.$$

Nun findet man das statische Moment der sehr dünnen Wasserschicht $m'n'n''m''$

$$= CG \cdot mn \cdot m'm'' \cdot \gamma$$
$$= CG \cdot mn \cdot IH \cdot \gamma$$

und das statische Moment der zugehörigen Schicht pqq'

$$= CF \cdot pq \cdot qq' \cdot \gamma$$
$$= CF \cdot pq \cdot IH \cdot \gamma.$$

Es ist aber $CG \cdot mn = CF \cdot pq$; daher sind die statischen Momente der zusammengehörigen Schichten $m'n'n''m''$ und pqq' einander gleich, und weil dieses von sämmtlichen zusammengehörigen Schichten auf eben die Art bewiesen wird, so folgt daraus, daß das Gewicht des wasserhaltenden Bogens, das Rad eben so zu drehen strebt, als wenn am Ende des Halbmessers CF, ein vertikales Wasserprisma KL angebracht wäre, dessen Querschnitt dem Querschnitte IH des Bogens und dessen Höhe der vertikalen Höhe des wasserhaltenden Bogens gleich ist.

Ist H die vertikale Höhe des wasserhaltenden Bogens,
F der Inhalt des durch den Mittelpunkt gehenden Querschnitts desselben, und
r der Halbmesser für die centrische Linie des Wasserbogens,

so erhält man das statische Moment

$$= r \cdot FH \cdot \gamma.$$

179. §.

Um die oberschlächtigen Räder zur Aufnahme des Wassers einzurichten, werden Zellen (Cellulae, *Cellules*) an ihrem Umfange durch dünne Bretter oder Schaufeln (Palmulae, *Cloisons*) gebildet, welche in die Felgen oder Kränze des Rades eingeschoben werden. Von der guten Schaufelung oder Dockung hängt die Fähigkeit des Ra-

des ab, das einfallende Wasser leicht aufzunehmen und solches nicht zu bald zu verschütten. Man hat mancherlei Regeln die Schaufelung zu verrichten, die man in mehrern Schriften angegeben findet. Die nachstehende Anweisung ist in der Ausübung zureichend.

Wenn AB (Fig. 2.) die Höhe oder der vertikale Durchmesser des Wasserrades ist, so nimmt man gewöhnlich die Breite der Kränze AD, BE zwölf Zoll groß an, theilt AD in drei gleiche Theile, nimmt von D bis F ein Drittel und schlägt aus dem Mittelpunkte C einen Kreis durch F, welcher der Theilriß genannt wird. Den Theilriß theilt man in so viel gleiche Theile, als das Rad Schaufeln erhalten soll, gewöhnlich dreimal so viel als der Durchmesser des Rades Fuße hat, bei wenig Wasser einige mehr, bei viel Wasser weniger. Hier ist der Durchmesser 8 Fuß angenommen, also ist FG der vier und zwanzigste Theil vom ganzen Theilrisse. Die Schaufeln werden aus zwei Stücken zusammengesetzt, wovon das äußere HI, LM die Wasser-, Setz- oder Stoßschaufel (Palmula una) und das innere IK, MN die Riegel- oder Kropfschaufel (Palmula altera) genannt wird. Taf. I. Fig. 2.

Je kleiner der Raum IO zwischen zwei Stoßschaufeln ist, um so länger werden die Zellen das Wasser behalten, ehe sie ausgießen; diese Verengung hat aber deshalb ihre Grenzen, weil hinlänglicher Raum vorhanden seyn muß, damit der einstürzende Wasserstrahl, beim Durchgange zwischen den Stoßschaufeln, nicht gehindert werde; denn ob man gleich das Rad auf jeder Seite 4 bis 6 Zoll breiter macht als die Breite dieses Strahls, so findet man doch bei mehrern zu eng geschaufelten oberschlächtigen Wasserrädern, daß das einstürzende Wasser wieder zurückprallt und zum Theil verspritzt wird. Um dieses zu vermeiden, nehme man die Dicke des einfallenden Wasserstrahls in den Zirkel, und schlage aus einem Punkte I des Theilrisses mit dieser Weite einen Bogen oOo. Zu diesem Bogen ziehe man, aus dem nächsten Punkte M des Theilrisses, die Tangente ML, so gibt diese die Lage der Stoßschaufel, und

Taf. I. Fig. 2. wenn man von L ab, den äusersten Umfang des Rades in so viele Theile theilt, als Schaufeln sind, so sind dadurch sämmtliche Stoßschaufeln bestimmt.

Die Lage der Kropfschaufeln läßt sich auf zweierlei Art bestimmen. Entweder zieht man vom Ende I der Stoßschaufel, eine gerade Linie IK nach dem Mittelpunkte des Rades, so wird IK die Kropfschaufel; oder man errichte am Ende der Stoßschaufel PQ in Q eine senkrechte Linie QR auf PQ, so ist QR die auf der Stoßschaufel senkrechte Kropfschaufel. Letzterer Art bedienen sich die Müller häufig deswegen, weil sich zwei Bretter leichter unter einem rechten Winkel wasserdicht verbinden lassen.

Um die Zellen nach der Mitte des Rades zu verschließen, werden am innern Umfange der Kränze RDKN Bretter befestiget, welche man den Boden nennt.

180. §.

Die Art, wie den oberschlächtigen Rädern das Wasser gewöhnlich zugeführt wird, findet man Figur 3 abgebildet. Oberhalb ist in dem Boden des Gerinnes das Schlundloch (*Abée*), wodurch das Wasser einfällt und welches mit einem kleinen Schutzbrete verschlossen werden kann. Ist der eine Theil von den Zellen des Rades mit Wasser angefüllt, so entstehet dadurch ein Uebergewicht, welches die Umdrehung des Rades bewirkt, weil das Wasser in den untern Zellen wieder abfließt. Geschiehet dieses Abfließen zu früh, ehe die Zellen ihren tiefsten Stand erreicht haben, so wird dadurch offenbar die Kraft des Rades vermindert, und weil das Wasser von der entgegengesetzten Seite, wo es herkommt, wieder abfließen muß, die Umdrehung des Rades aber nach einer dem abfließenden Wasser entgegengesetzten Richtung geschiehet, so muß das Rad wenigstens 8 bis 12 Zoll vom Wasserspiegel des Unterwassers abstehen, welches das Freihängen des Rades genannt wird, damit das abfließende Wasser die Umdrehung des Rades nicht verhindere und das Rad im Wasser bade.

Diesen Unvollkommenheiten der oberschlächtigen Räder zu begegnen, um nicht durch das zu zeitige Ausleeren der Zellen etwas von dem Gewichte des Wassers, und wegen des Freihängens des Rades, etwas von der Höhe des Rades oder von dem Gefälle zu verlieren, kann man den Untertheil des Rades mit einer Einfassung oder einem Mantel umgeben, und das Wasser, so wie es in der vierten Figur bemerkt ist, einfallen lassen. Bei dieser Anordnung fließt das Wasser nach eben der Richtung ab, wie sich das Rad umdreht, man darf daher kein Gefälle für das Freihängen des Rades verwenden, vielmehr kann das Rad noch einige Zoll in das Unterwasser eingreifen. Die Höhe, bis zu welcher der Mantel das Rad umgibt, richtet sich nach der Höhe, in welcher die Schaufeln Wasser verlieren, und man sieht leicht, daß niedrige Räder verhältnißmäßig höhere Mäntel erhalten als große Räder. In Absicht dieser Mäntel lassen sich noch vortheilhaftere Einrichtungen angeben; denn wenn gleich der Spielraum zwischen dem Rade und Mantel noch so geringe ist, so geht doch noch eine ansehnliche Wassermenge verloren, weil dem abfließenden Wasser eine der Höhe des Mantels entsprechende Geschwindigkeit zugehört. Setzt man hingegen den Mantel noch weiter von dem Rade ab, und bringt in demselben kleine Schaufeln an, welche gegen die Zellen gekehrt sind, so daß das auf sie spritzende Wasser gleich wieder gegen das Rad in die Zellen fließt, so wird der Wasserverlust, welcher wegen des Spielraums entstehet, beträchtlich vermindert.

Taf. I. Fig. 4. Taf. I. Fig. 4.

181. §.

Die Kraft an einem oberschlächtigen Rade hängt von dem Gewichte des Wassers ab, welches am Umfange desselben vertheilt ist, und von dem Stoße, mit welchem das einstürzende Wasser die Schaufeln trift.

Bei Rädern, die keine Mäntel haben, geht von dem Wasser, welches als Gewicht wirkt, um so mehr verloren, je kleiner diese Räder sind. Im Durchschnitte rechnet man, daß die Höhe der drückenden Wassersäule, $\frac{2}{3}$ von dem Durch-

Taf. I. Fig. 1. messer des Theilrisses betrage, indem man diese als ein Gewicht ansieht, welches an dem Theilrisse, nach der Richtung der Tangente desselben, das Rad umdreht. Bei Rädern mit Mänteln kann man den Durchmesser des Theilrisses als Höhe der Wassersäule annehmen.

Die Gerinne werden gewöhnlich so angeordnet, daß das einstürzende Wasser in die zweite Zelle von oben fällt Taf. II. Fig. 3. 4. (Figur 3, 4), und man rechnet die Geschwindigkeitshöhe des einfallenden Wassers bis in die zweite Zelle an den Theilriß.

Man setze, daß

d den Durchmesser des Theilrisses,

λd denjenigen Theil des Theilrisses, welcher als Höhe der drückenden Wassersäule in Rechnung kommt,

k den Querschnitt dieser Wassersäule,

c die Geschwindigkeit des einstürzenden Wassers,

v die Geschwindigkeit des Theilrisses,

M die Wassermenge und

P die gesammte Kraft am Halbmesser des Theilrisses

bezeichne, so wird unter der Voraussetzung, daß die Zellen groß genug sind, die einstürzende Wassermenge aufzunehmen, wenn die Geschwindigkeit des Theilrisses $= v$ ist, der Querschnitt

$$k = \frac{M}{v}$$

also das Gewicht der drückenden Wassersäule

$$\lambda d k \gamma = \frac{\lambda d}{v} M \gamma.$$

Den relativen Stoß der Wassermenge M, welche mit der Geschwindigkeit $c - v$ an die Schaufeln schlägt, findet man (169. §. II.), weil hier sämmtliche Wassertheile zum Stoße gelangen

$$= \frac{c - v}{2g} M \gamma$$

folglich, wenn das stoßende Wasser die Schaufeln nach der Richtung der Tangente des Rades trift, die gesammte Kraft Taf. I. Fig. 5. 4.

$$P = \left[\frac{\lambda d}{v} + \frac{c - v}{2g}\right] M\gamma.$$

Für $v = c$ wird $c - v = 0$, also in diesem Falle, die Kraft

$$P = \frac{\lambda d}{v} M\gamma.$$

Dieser Ausdruck gilt nur sofern, als die Zellen das in jeder Sekunde zufließende Wasser fassen können; daher darf die Geschwindigkeit v, mit welcher sich die im Rede befindliche Wassermenge M bewegt, nur bis zu dieser Grenze abnehmen, weil sonst $P = \infty$ für $v = 0$ wird.

182. §.

Die Untersuchung über die vortheilhafteste Geschwindigkeit, welche man den Wasserrädern geben muß, um den größten nutzbaren Effekt hervorzubringen, gehört eigentlich in die Maschinenlehre; werden indessen hier die Friktion der Maschine und andere Hindernisse der Bewegung bei Seite gesetzt, so läßt sich vorläufig einsehen, daß unter gleichen Umständen die Wirkung oder der Totaleffekt einer Maschine unter übrigens gleichen Umständen desto größer wird, je größer das Produkt aus der Kraft in die Geschwindigkeit des von der Kraft angegriffenen Punkts ist, welches Produkt das Maß der Bewegung oder das mechanische Moment genannt wird. In der Maschinenlehre wird dies näher auseinander gesetzt, hier kommt es also unter der obigen Voraussetzung darauf an, daß Pv so groß wie möglich werde.

Der vorhin gefundene allgemeine Ausdruck für die Kraft am oberschlächtigen Wasserrade gibt das mechanische Moment

$$Pv = \left[\lambda d + \frac{cv - v^2}{2g}\right] M\gamma$$

Wird nun die Wassermenge M, die Geschwindigkeit c, und die Höhe λd als gegeben vorausgesetzt, so bleibt, weil g

und γ ebenfalls unveränderliche Größen sind, nichts mehr willkürlich, als die Geschwindigkeit des angegriffenen Punkts oder v, und es kommt darauf an, daß $cv - v^2$ ein Maximum werde.

Nimmt man für c einen bestimmten Werth an, z. B. $c = 12$, so wird auch in allen übrigen Fällen $cv - v^2$ am größten, wenn $v = \frac{1}{2}c$ *) also hier $v = 6$ angenommen wird. Denn für

$$v = 5 \text{ ist } cv - v^2 = 35$$
$$v = 6 \text{ ist } cv - v^2 = 36$$
$$v = 7 \text{ ist } cv - v^2 = 35$$

Hienach wäre die Wirkung des oberschlächtigen Rades am größten, wenn die Schaufeln mit einer Geschwindigkeit (v) ausweichen, welche halb so groß ist, als die Geschwindigkeit (c) des einstürzenden Wassers.

In der Ausübung pflegt man aber selten diese Regel bei oberschlächtigen Rädern zu befolgen, weil, je langsamer das Rad umläuft, desto breiter dasselbe seyn muß, um alles Wasser aufzunehmen, und weil die größern Räder nicht nur einen stärkern Bau erfordern, sondern auch mehr Friktion verursachen, und da überdies der Stoß durch das einstürzende Wasser selten sehr beträchtlich ist, so pflegt man gewöhnlich den oberschlächtigen Rädern dieselbe Geschwindigkeit zu geben, welche das einstürzende Wasser hat, also $v = c$ zu nehmen, weshalb es bei diesen Rädern nur darauf ankommt, daß die Geschwindigkeit derselben nie größer als die Geschwindigkeit des einstürzenden Wassers werde. Daß sie nicht kleiner als $\frac{1}{2}c$ werden soll, darf kaum erinnert werden, weil dieser Fall nicht leicht eintreffen wird.

*) $d(cv - v^2) = c\,dv - 2v\,dv = 0$ oder
$c = 2v$ daher $v = \frac{1}{2}c$.

Dreizehntes Kapitel.

Von den unterschlächtigen Wasserrädern.

183. §.

Wird ein vertikal hängendes Wasserrad an seinem Umfange mit Bretern, oder Schaufeln (*Pinnae, Aubes*) versehen, damit solche den Stoß eines dagegen strömenden Wassers auffangen, und dieses Wasser fließt unterhalb des Rades gegen die Schaufeln, so heißt solches ein unterschlächtiges Wasserrad (Rota retrograda, *Roue à aubes*).

Sind die Schaufeln auf den beiden vertikalen Seiten des Rades mit Kränzen oder Felgen eingefaßt, so heißt es ein Staberrad; wenn aber die Schaufeln nur in der Stirne eines Kranzes befestiget sind und keine Einfassung von beiden Seiten haben, ein Strauberrad, welches in dem Falle nur Anwendung findet, wenn die Schaufeln nicht groß werden. Eine dritte Gattung von Rädern sind an den Schiffmühlen, wo die langen Schaufeln an die Speichen oder Aerme des Rades befestiget werden.

Man unterscheidet freihängende Wasserräder, bei welchen das Wasser von allen Seiten abfließen kann, wie bei Schiffmühlen, von den eingeschlossenen Wasserrädern, welche von den Wänden eines Gerinnes umgeben sind.

Außer dem Wüsten- oder Freigerinne, welches zur Abführung des überflüssigen Wassers und des Eises dient, kommt noch das Mahl- oder Mühlengerinne (*Coursier*) als ein sehr wesentlicher Theil vor, weil dessen Konstruktion einen vorzüglichen Einfluß auf die Wirkung des Wassers gegen die Schaufeln hat.

Geht der Abschußboden (*Radier*) in einer geraden Linie unter dem Rade fort (Figur 5. BB″), so heißt das Gerinne ein gerades Gerinne, auch Schuß- oder Taf. L Fig. 5.

Schnurgerinne; wenn aber der Abschußboden unter
Taf.I. Fig.6. dem Rade gekrümmt ist (Fig. 6. BLB″) ein Kropfgerinne. Ist der Kropf so groß, daß er beinahe die Höhe vom Halbmesser des Wasserrades hat, so heißt das Wasserrad, ein halboberschlächtiges.

Wenn das Wasser, welches ein unterschlächtiges Rad treibt, zuweilen wächst oder höher wird, besonders wenn der Rückstau von unten her die Wirkung des anstoßenden Wassers schwächt, so gibt man dem Rade eine solche Einrichtung, daß dasselbe nach den Umständen höher gebracht werden kann, welches man ein Pansterzeug, und das Rad, ein Pansterrad nennt. Wird das Zapfenlager oder Angewelle (*Coussinet*) mittelst eines Hebebaums erhöhet, und an den beiden Enden desselben durch Bolzen, die man in höhere Löcher der ausgepfalzten Pansterfäulen steckt, gehalten, so heißt es ein Stockpanster; wenn aber die Zapfenlager mittelst einer Kette, welche über eine Welle geht, aufgezogen werden, ein Ziehpanster.

Um zu verhindern, daß beim aufgezogenen Rade, kein Wasser ungenutzt unten wegfließe, bringt man unter dem Rade ein Schwimmgerinne an, welches eben so viel in die Höhe gebracht wird, wie man das Rad aufzieht. Zur Vermeidung des Zwischenraums an beiden Seiten des Rades, dienen die Wasserbänke (*Coffres*), welches zwei Seitenbreter sind, die von der Schutzöfnung bis an die Kränze des Rades und bogenförmig unter diese Kränze gehen, damit das Wasser zwischen den Wasserbänken in einer solchen Breite gegen das Rad fließe, welche der Länge der Schaufeln im Lichten gleich ist.

184. §.

Damit das anstoßende Wasser die Schaufeln mit einer größern Geschwindigkeit treffe, und nach Gefallen mehr oder weniger Wasser abgelassen werden könne, bringt man oberhalb der Räder im Gerinne ein Schutzbret (Tabula,
Taf.I. F.5.6. *Vanne*) AD an (Figur 5 und 6), welches so nahe wie

möglich an das Rad kommen muß. In der siebenten Figur bewegt sich das Schutzbret vertikal in den Nuthen der Griessäulen. Um aber die Schutzöfnung (*Pertuis*) noch näher an das Rad zu bringen, kann man dem Schutzbrete eine Neigung gegen den Horizont geben, und dasselbe zwischen zwei Wangenbreter, die auf beiden Seiten des Gerinnes nach der Richtung des Schutzbretes befestiget sind, sich bewegen lassen, welches aus der achten Figur nebst der übrigen Einrichtung zu ersehen ist *). Auch ist daselbst, am Ende des Kropfes, dem Gerinne eine größere Tiefe gegeben, damit sich das Wasser, wenn es das Rad verläßt, leichter ausbreiten kann, und die Umdrehung des Rades nicht hindert. Taf. II. Fig. 7. Taf. II. Fig. 8.

Die vertikale Höhe der Schutzöfnung muß jedesmal kleiner seyn als die Höhe der Schaufeln, weil sonst das Wasser über die Schaufeln schlagen würde; so wie auch die horizontale Weite, oder Breite der Schutzöfnung, nie größer seyn sollte, als die gesammte Breite des Rades, gewöhnlich aber nur der Länge der Schaufeln oder der innern Weite zwischen den Kränzen des Rades gleich seyn darf.

In Absicht der verschiedenen Benennungen, welche Bezug auf das Wasser bei dem unterschlächtigen Gerinne haben, hat man nachstehendes zu bemerken:

AA′ (Figur 5 und 6) ist der Wasserspiegel des Oberwassers, Taf. I. Fig. 5. 6.

EE′ der Wasserspiegel des Unterwassers,

FE der vertikale Abstand des Oberwasserspiegels vom Unterwasser, das ganze Gefälle,

AD die Höhe des Oberwassers vor dem Schutzbrete, das Druckwasser,

*) Ueber diese Einrichtung sehe man:
J. C. Eiselen, über die Anwendung des Wassers auf unterschlächtige, insonderheit aber auf solche Wasserräder, die in einem Gerinne gehen, und einiges Gefälle, mithin sogenannte Kröpfe haben. In den Sammlungen die Baukunst betreffend, Jahrg. 1798. 2ter Theil. Berlin. S. 35 u. f.

DB die Höhe der Schutzöfnung,

AB Druckwasser und Schutzöfnung zusammengenommen, der Wasserstand.

Bei den Gerinnen mit geraden Abschußböden (Fig. 5.) ist noch besonders zu bemerken, daß, wenn aus dem Mittelpunkte des Rades C die Linie CK senkrecht auf den Abschußboden BB″ gezogen wird, und man nimmt die Mitte G von der eingetauchten Schaufel,

FH oder die vertikale Entfernung des Oberwasserspiegels von der Mitte der eingetauchten Schaufel, die Geschwindigkeitshöhe des anschlagenden Wassers genannt wird. Das Gefälle oder den Abhang des Abschußbodens nennt man das lebendige Gefälle.

Taf. I. Fig. 6. Wird bei Kropfgerinnen (Figur 6) von der Mitte G der am Anfange des Kropfs bei K stehenden Schaufel die Horizontallinie KH gezogen, so nennt man hier

FH oder die vertikale Entfernung des Oberwasserspiegels, vom Mittel der am Anfange des Kropfs befindlichen Schaufel, die Geschwindigkeitshöhe des anschlagenden Wassers.

Zieht man vom Mittelpunkte des Rades C bis an das Ende des Kropfs bei L die Linie CL, und nimmt auf dieser Linie die Mitte von dem abschießenden Wasser in M, zieht hierauf die Vertikallinie MN bis an die Horizontallinie GH, so heißt

MN oder der vertikale Abstand von der Mitte beider eingetauchten Theile, der am Anfange und Ende des Kropfs befindlichen Schaufeln, die Höhe des wasserhaltenden Bogens.

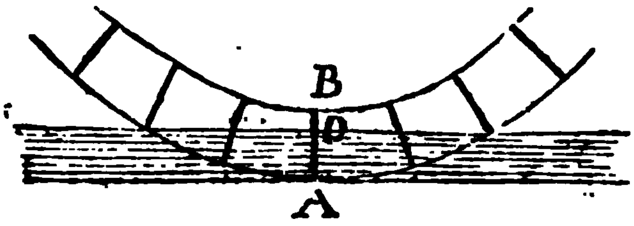
185. §.

Damit das Wasser die Schaufeln gehörig treffe, so ist die Richtung derselben nicht gleichgültig. Bei einem geraden Gerinne setzt man gewöhnlich die Schaufeln nach der Richtung des Halbmessers, obgleich aus Depar-

cieux*) und Bossuts Versuchen (Hydrod. 2. Bd. 1019. §.) folgt, daß eine geringe Neigung von 15 bis 30 Grad gegen den Halbmesser vortheilhaft ist. Die Gründe hievon lassen sich leicht einsehen, weil alsdann die aus dem Wasser tretenden Schaufeln sich der vertikalen Lage nähern, nicht so viel Widerstand beim Austritte finden, und nicht so viel Wasser wieder mit in die Höhe nehmen können, welches bei schnell bewegten Rädern beträchtlich ist und als ein Gegengewicht die Umdrehung des Rades hindert. Es läßt sich daher annehmen, daß es vortheilhaft sei, wenn die aus dem Wasser tretenden Schaufeln sich der Vertikallinie nähern. Taf. I. Fig. 6.

Ebenfalls ist es vortheilhaft, wenn man diejenige Ecke der Schaufeln, welche gegen das Unterwasser gekehrt ist, etwas abflächt, theils weil hiedurch der Austritt aus dem Wasser erleichtert wird, theils weil alsdann auch die nächstfolgende Schaufel einen vortheilhaftern Stoß von dem Wasser erhält.

Wie weit die Schaufeln am Umfange des Rades auseinander stehen müssen, darüber fehlt es noch an allgemeinen Regeln. Belidor hat zwar dergleichen gegeben**), sie sind aber nicht anwendbar, und selbst die Bemühung von Bossut (Hydrod. 1. B. 2. Absch. 15. K.), die vortheilhafteste Anzahl der Schaufeln aus der Theorie des Wasserstoßes zu finden, ist nicht zureichend. Für die meisten Fälle der Ausübung kann man annehmen, daß bei



einem 8 bis 12 Fuß hohen Wasserrade sich drei, bei einem größern Wasserrade aber 4 bis 5 Schaufeln zugleich eintauchen müssen.

*) *de Parcieux*, Mémoire dans lequel on prouve que les aubes des roues mues par les courans des grandes rivières, feroient beaucoup plus d'effet, si elles étoient inclinées aux rayons. Mém. de l'acad. de Paris, Année 1759. p. 288.

**) Belidor angef. Architekt. Hydraul. 1. Th. 2. B. 1. K. 674 §.

In gleicher Entfernung vom Abschußboden MN erhielte von diesem Wasserfaden, die schiefe Schaufel in D, einen auf die Schaufel senkrechten oder Normalstoß (173. §.)

$$l = P \sin \beta$$

dessen Moment zur Umdrehung des Rades

$$= CD \cdot P \sin \beta \text{ ist.}$$

Aber $CD \sin \beta = CB$, daher

$$CD \cdot P \sin \beta = CB \cdot P$$

d. h. in gleicher Entfernung vom Abschußboden hat der Stoß des Wassers auf die Umdrehung des Rades eben den Erfolg, die Schaufeln mögen gerade oder in schiefer Richtung getroffen werden.

Es wäre nun noch in Betrachtung zu ziehen, in wie fern sämmtliches Wasser die bewegten Schaufeln trift, welchen Einfluß der durch die Verminderung der Geschwindigkeit des Wassers verursachte Aufstau auf die Bewegung des Rades hat, und noch viele andere Umstände, die bei einer sehr genauen Theorie in Erwägung zu ziehen sind; dieses würde aber die vorgesetzten Grenzen weit überschreiten, daher am Ende dieses Kapitels, über diese aus Mangel an zulänglichen Versuchen noch nicht ganz aufs Reine gebrachte Materie, die angeführten Schriften nachgelesen und verglichen werden können.

188. §.

Um die Kraft P zu finden, mit welcher das Wasser die Schaufeln des Rades nach der Richtung der Tangente fortbewegt, wenn man den Mittelpunkt des Stoßes, wie es hier wohl erlaubt ist, im Schwerpunkte der eingetauchten Schaufel annimmt, so bezeichne

M die in jeder Sekunde gegen die Schaufeln anschlagende Wassermenge, die wegen des Spielraums zwischen Rad und Gerinne allemal geringer ist, als die Wassermenge, welche durch die Schutzöfnung zufließt,

f den Flächeninhalt von dem senkrecht auf die Richtung des Wassers eingetauchten Theile der Schaufel,

c die mittlere Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers, und

v die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der eingetauchten Schaufel,

so ist anzunehmen, daß bei denjenigen unterschlächtigen Wasserrädern, wo die Schaufeln hinlänglich hoch sind und nicht zu weit von einander abstehen, sämmtliches Wasser zum Stoße gelange, weil nur ein unbeträchtlicher Theil davon, der die äußersten Enden der tiefsten Schaufeln nicht trifft, ohne zu stoßen abfließen wird. In diesem Falle kann daher die Wassermenge $M = cf$ so angesehen werden, als wenn sie mit der Geschwindigkeit $c - v$ gegen die Schaufeln anschlägt, weshalb der relative Stoß nach 169. §. II. in Rechnung kommt. Hienach ist für unterschlächtige Wasserräder im geschlossenen Gerinne ohne Kröpfung

$$\text{I.} \qquad P = \frac{c - v}{2g} M\gamma$$

$$= \frac{(c - v)c}{2g} f\gamma$$

Setzt man, daß

h und h′ die den Geschwindigkeiten c und v zugehörigen Höhen sind, so ist

$$c = 2\sqrt{gh} \text{ und } v = 2\sqrt{gh'}$$

daher auch

$$P = 2[h - \sqrt{(hh')}] f\gamma$$

Für Schiffmühlenräder im offenen Strome ist 171. §.

$$\text{II.} \qquad P = \frac{c - v}{4g} M\gamma$$

$$= \frac{(c - v)c}{4g} f\gamma$$

$$= [h - \sqrt{(hh')}] f\gamma$$

Hat das Gerinne einen Kropf, und es ist

d die vertikale Höhe des wasserhaltenden Bogens (184. §.)

so kommt mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung, außer dem Stoße gegen die Schaufeln am Anfange des Kropfs,

$$= \frac{c - v}{2g} M\gamma$$

noch der Druck des Wassers hinzu, welches sich im wasserhaltenden Bogen befindet. Nun weichen die Schaufeln mit der Geschwindigkeit v aus, welches zugleich die Geschwindigkeit des abfließenden Wassers ist; es wird daher das im Kropfe befindliche Wasser wie ein schwerer Körper auf die Umdrehung des Rades wirken. Den Querschnitt dieser drückenden Wassersäule findet man $= \frac{M}{v}$ daher das Gewicht derselben

$$= d \frac{M}{v} \gamma$$

vorausgesetzt, daß unter M diejenige Wassermenge verstanden wird, welche auf die Schaufeln trift, und daß das Wasser, welches durch den Spielraum zwischen Rad und Gerinne verloren geht, abgezogen worden. Hienach ist die Kraft am Kropfrade

$$\text{III.} \quad P = \left[\frac{c - v}{2g} + \frac{d}{v}\right] M\gamma$$

$$= 2\left[h - \sqrt{(hh')} + \frac{d}{2}\sqrt{\frac{h}{h'}}\right] f\gamma.$$

189. §.

Für Räder im geraden Gerinne erhält man das mechanische Moment

$$Pv = \frac{cv - v^2}{2g} M\gamma.$$

dieses wird am größten, wenn, wie 182. §. $v = \frac{1}{2} c$ ist, d. h. die Geschwindigkeit der Schaufeln muß halb so groß als die Geschwindigkeit des Wassers seyn, wenn das mechanische Moment am größten werden soll.

Nun ist $c = 2\sqrt{g}\sqrt{h}$ also $v = \sqrt{g}\sqrt{h}$ daher wenn die Geschwindigkeit der Schaufeln halb so groß als die des Rades ist, so findet man das mechanische Moment

$$Pv = \frac{1}{2} h M\gamma.$$

Für Räder in Kropfgerinnen ist

$$Pv = \left[\frac{cv - v^2}{2g} + d\right] M\gamma$$

In so fern nun die Höhe des wasserhaltenden Bogens im Kropfe, oder d unveränderlich ist, wird das mechanische Moment ebenfalls ein Maximum, wenn $v = \frac{1}{2}c$ ist; dies gibt

$$Pv = [\tfrac{1}{2}h + d]\, M\gamma.$$

190. §.

Um die Effekte dieser beiden Räder mit einander zu vergleichen, so setze man, daß beide einerlei ganzes Gefälle H und Wassermenge M hätten, so ist $H = h + d$ daher $\frac{1}{2}h + d = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}d$ und man erhält das mechanische Moment beim Rade im geraden Gerinne

$$Pv = \tfrac{1}{2}H \,.\, M\gamma$$

und beim Rade im Kropfgerinne

$$Pv = [\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}d]\, M\gamma.$$

Offenbar ist unter übrigens gleichen Umständen der letzte Effekt größer als der erste und es folgt daraus, daß Räder im Kropfgerinne (wenn sonst das Gefälle zureicht), unter übrigens gleichen Umständen weit vortheilhafter, als in geraden Gerinnen sind.

Hieraus erklärt sich auch, weshalb die Müller, wo es irgend nur thunlich ist, bei ihren Gerinnen einen Kropf anbringen, weil sie hiedurch offenbar einen größern Effekt erhalten, da sie sonst wegen des schwierigern Baues den Kropf sehr gern weglassen würden.

Zu mehrerer Ueberzeugung, daß bei eben derselben Wassermenge und gleichem Gefälle, die Kropfräder einen größern Effekt geben, als Räder in geraden Gerinnen, können die Banks'schen Versuche *) dienen. Unter übrigens gleichen Umständen und bei unverändertem Stande des Oberwassers strömte in allen Versuchen eine gleiche Wassermenge gegen die Schaufeln des Wasserrades.

---

*) J. Banks Abhandlung über die Mühlenwerke. Aus dem Englischen übers. von C. G. Zimmermann. Berlin 1799. S. 2[illegible] u. f.

1. Versuch. Das Wasser strömt gegen die unterste Stelle der Schaufeln und nicht wie bei einem Rade im geraden Gerinne. Die Zahl der Umläufe des Wasserrades in einer Minute war 8,2.

2. Versuch. Das Wasser fiel nahe am Ende des wagerechten Durchmessers auf die Schaufeln und drehte es in einer Minute 15,19 mal um.

3. Versuch. Die volle Wassermenge fiel 45 Grad vom Scheitel des Rades auf die Schaufeln und bewirkte in einer Minute 17,26 Umläufe.

4. Versuch. Das Wasser wurde wie bei einem oberschlächtigen Rade auf dessen Scheitel geleitet. Das Wasserrad machte 18,46 Umläufe in einer Minute.

Vergleicht man die gefundene Anzahl der Umläufe des Wasserrades, welche in den vorstehenden Versuchen bewirkt wurde, mit einander, so verhält sich

$$8{,}2 : 15{,}19 : 17{,}26 : 18{,}46 \text{ wie}$$
$$100 : 185 : 210 : 225.$$

Außer obigen führt Herr Banks noch mehrere Versuche an, die ähnliche Resultate geben. Auch sehe man hierüber:

Mémoire, dans lequel on démontre que l'eau d'une chûte destinée à faire mouvoir quelque machine, moulin ou autre, peut toujours produire beaucoup plus d'effet en agissant par son poids qu'en agissant par son choc etc. Par M. *de Parcieux*; Mém. de l'acad. roy. des scienc. de Paris, année 1754. à Paris, p. 603 etc.

191. §.

Hängen zwei Räder in einem horizontalen Gerinne hintereinander, so können sie nicht mit gleicher Geschwindigkeit umgehen, wenn ihre Effekte gleich seyn sollen, weil das vom ersten Rade abfließende Wasser, das zweite mit einer kleinern Geschwindigkeit trift als das erste.

Mit Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung sei,

- c die Geschwindigkeit des Wassers, welches gegen das erste Rad strömt,
- v die Geschwindigkeit des ersten Rades,
- v' die Geschwindigkeit des zweiten Rades,

so ist das mechanische Moment des ersten Rades

$$= v\,(c - v)\,\frac{M\gamma}{2g}$$

Nachdem das Wasser seinen Stoß gegen das erste Rad verrichtet hat, behält es nur noch die Geschwindigkeit v, mit welcher es gegen das zweite Rad strömt. Es ist daher das mechanische Moment des zweiten Rades

$$= v' (v - v') \frac{M\gamma}{2g}$$

Zur Hervorbringung des größten Effekts bei dem zweiten Rade wird erfordert, daß $v' = \frac{1}{2} v$ sei, also ist das mechanische Moment des zweiten Rades

$$v' (v - v') \frac{M\gamma}{2g} = \frac{v^2}{4} \frac{M\gamma}{2g}$$

und weil beide Räder gleichen Effekt hervorbringen sollen

$$v (c - v) \frac{M\gamma}{2g} = \frac{v^2}{4} \frac{M\gamma}{2g} \text{ oder}$$

$$v (c - v) = \frac{1}{4} v^2 \text{ also}$$

$$(c - v) = \frac{1}{4} v \text{ daher}$$

$$v = \frac{4}{5} c$$

d. h. wenn zwei Räder hintereinander in einem Gerinne hängen, so wird erfordert, daß die Geschwindigkeit des ersten Rades $\frac{4}{5}$ von der Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers, und die Geschwindigkeit des zweiten Rades halb so groß als die des ersten sei.

Für das mechanische Moment des ersten Rades findet man, wenn $\frac{4}{5}$ c statt v gesetzt wird

$$\frac{2c^2}{25g} M\gamma$$

und für das mechanische Moment des zweiten Rades

$$\frac{v^2}{8g} M\gamma = \frac{\frac{16}{25}c^2}{8g} M\gamma = \frac{2c^2}{25g} M\gamma$$

wie erfordert wird. Es ist daher die Summe der mechanischen Momente für beide Räder

$$\frac{4c^2}{25g} M\gamma = \frac{16}{25} h M\gamma$$

Hätte man, anstatt beide Räder hintereinander zu legen, solche nebeneinander in abgesonderte Gerinne gelegt, oder statt zweier Räder nur ein Rad angeordnet, so wäre bei einerlei Gefälle und unveränderter Wassermenge

das mechanische Moment bei einem Rade, oder für zwei Räder nebeneinander

$$= \frac{1}{2}\, h\, M\gamma$$

Zieht man diesen Effekt von dem bei zwei hintereinander liegenden Rädern ab, so ergibt sich

$$\frac{16}{25}\, h\, M\gamma - \frac{1}{2}\, h\, M\gamma = \frac{7}{50}\, h\, M\gamma$$

folglich ist der Effekt bei zwei hintereinander liegenden Rädern in einem Gerinne merklich größer, als wenn diese Räder nebeneinander angeordnet werden.

192. §.

Wenn in einem horizontalen Gerinne drei Räder hintereinander liegen, welche gleichen Effekt hervorbringen sollen, und es ist mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung

v'' die Geschwindigkeit des dritten Rades, so findet man

das mechanische Mom. des ersten Rades $= v\,(c - v)\,\frac{M\gamma}{2g}$

das mechan. Moment des zweiten Rades $= v'\,(v - v')\,\frac{M\gamma}{2g}$

das mechan. Mom. des dritten Rades $= v''(v' - v'')\,\frac{M\gamma}{2g}$

Der Effekt des dritten Rades wird am größten, wenn $v'' = \frac{1}{2}\, v'$ ist; dies gibt das mechanische Moment des dritten Rades $= \frac{1}{4}\, v'\, v'\, \frac{M\gamma}{2g}$; weil aber sämmtliche Effekte einander gleich seyn sollen, so wird

$$\frac{1}{4}\, v'\, v'\, \frac{M\gamma}{2g} = v'\,(v - v')\,\frac{M\gamma}{2g} \text{ oder}$$

$$v' = \frac{4}{5}\, v$$

und hieraus das mechanische Moment des zweiten Rades

$$= \frac{4v^2}{25}\, \frac{M\gamma}{2g}.$$

Es ist aber auch

$$\frac{4v^2}{25}\, \frac{M\gamma}{2g} = v\,(c - v)\,\frac{M\gamma}{2g} \text{ oder}$$

$$\frac{4v}{25} = c - v \text{ daher}$$

$$v = \frac{25}{29}\, c$$

und das mechanische Moment des ersten Rades

$$= \frac{100\, c^2}{841} \frac{M\gamma}{2g} = \frac{200}{841} hM\gamma$$

folglich der gesammte Effekt aller drei Räder

$$= \tfrac{600}{841} hM\gamma$$

Dabei ist die Geschwindigkeit

des ersten Rades $v = \frac{25}{29} c$
des zweiten Rades $v' = \frac{20}{29} c$
des dritten Rades $v'' = \frac{10}{29} c.$

Wären statt drei Räder nur zwei hintereinander angeordnet, oder auch statt dieser nur eins, so läßt sich eben so wohl, wie für nebeneinander liegende Räder beweisen, daß der Effekt geringer ist, und daß mehrere hintereinander liegende Räder einen größern Effekt hervorbringen. Der Vortheil der hintereinander liegenden Räder gegen die nebeneinander liegenden wird bei übrigens gleichen Umständen noch einleuchtender, wenn man den Verlust des Wassers in Erwägung zieht, der durch den Raum zwischen dem Rade und Gerinne entstehet, wo offenbar bei nebeneinander liegenden Rädern, mehr Wasser ungenutzt verloren geht, als bei hintereinander liegenden.

Ist aber gleich das mechanische Moment für den Fall kleiner, wenn anstatt mehrerer hintereinander liegenden Räder, nur ein einziges Wasserrad angeordnet wird, so bleibt hiebei doch zu erwägen, daß, wenn viele Mühlengänge durch ein Rad getrieben werden, weniger Reibung entstehet und die Maschine einfacher werden kann, wodurch man öfters eine ansehnliche Kostenersparung bewirkt, deren Aufwand der größere Effekt nicht entspricht.

193. §.

Bei den vorhergehenden Untersuchungen ist immer unter M diejenige Wassermenge verstanden worden, welche in jeder Sekunde gegen die Schaufeln schlägt. Sie ist von derjenigen verschieden, welche in jeder Sekunde durch die Schutzöfnung läuft und nach dem Rade strömt, weil ein Theil derselben durch den Spielraum ungenutzt verloren

geht. Kennt man die Höhe des Spielraums unter dem Rade $= \sigma$, welcher eigentlich nicht mehr als einen halben Zoll betragen sollte, so kann man den Verlust von dem zuströmenden Wasser dadurch in Rechnung bringen, daß man die Länge der Schaufeln $= l$ mit σ und der Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers multiplizirt. Dies gibt den Wasserverlust

$$= \sigma l c$$

Hiebei ist zwar auf den größern Spielraum, welcher unter dem Rade entstehet, wenn zwei Schaufeln gleichweit von demjenigen Halbmesser des Rades abstehen, welcher auf dem geraden Gerinnebogen senkrecht ist, nicht Rücksicht genommen, eben so wenig wie auf den Wasserverlust auf beiden Seiten des Rades. Was diesen letzten betrift, so wird er schon durch die Wasserbänke (183. §.) ansehnlich vermindert, und man wird deshalb hinlänglich genau rechnen, wenn man annimmt, daß das Wasser durch den untern Spielraum des Rades, mit der Geschwindigkeit c abfließt, weil das Rad nur die Geschwindigkeit v hat, wodurch schon eine beträchtliche Verzögerung des frei durchfließenden Wassers entstehet. Noch größer wird aber diese Verzögerung bei einem so schmalen Raume, wegen der Adhäsion zwischen dem Wasser und Gerinneboden, weshalb man bei der vorstehenden Regel wenig fehlen wird.

194. §.

Die Theorie der unterschlächtigen Räder, wenn auf alle dabei vorkommende Umstände Rücksicht genommen werden soll, ist noch nicht dahin gediehen, daß man in der Ausübung sehr scharf zutreffende Resultate erwarten kann, und man wird sich in den meisten Fällen mit einer Annäherung begnügen müssen. Es ist indessen nicht undienlich, die vorzüglichsten Schriften, in welchen man eigenthümliche Untersuchungen über diesen Gegenstand findet, hier anzuführen.

Sur la plus grande perfection possible des machines, par M. *Parent*. Mémoires de l'académie de Paris, année 1704. Ed. Bat. p. 433.

J. A. *Euleri* Enodatio quaestionis, quomodo vis aquae cum maximo lucro ad molas circumagendas aliave opera perficienda impendi possit. Goett. 1754.

De *Borda*, sur les roues hydrauliques a. a. Orte. (169. §.)

Nouveaux Mémoires de l'acad. royale des Sciences et Belles-lettres à Berlin 1775. Expériences et Rémarques sur les moulins que l'eau meut par en bas dans une direction horizontale. Par M. *Lambert*.

(Hievon findet man eine Uebersetzung in der Sammlung nützlicher Aufsätze und Nachrichten die Baukunst betreffend. Jahrg. 1797. 2. Bd. Berlin.)

G. S. *Klügel*, Theoria nova motus machinarum, vi aquae in rotam subtus incurrentis movendarum; in den Commentationibus Soc. R. Scient. Goett. Vol. IX. ad 1787 — 88. Cl. Math. p. 26.

(Eine Uebersetzung von Herrn Lempe befindet sich im Magazin für Bergbaukunde, XI. Theil, 1795).

Langsdorf, angef. Hydraulik, 16. Kapitel. S. 266. (1794).

Gerstner's angef. Abhandlung vom Wasserstoße in Schußgerinnen (1795).

Hutton's angef. Dictionary, Art. Mill. pag. 110. (1795).

(Das Resultat der Hutton'schen Untersuchung gibt ebenfalls, wie die Borda- und Gerstner'sche Theorie, $\frac{1}{3}c = v$).

Langsdorf, angeführte Maschinenlehre. 1ter Band. 2. Th. 5. Kap. S. 152. (1797.)

(Von dieser wichtigen Schrift ist auch der zweite Band erschienen, welcher lehrreiche Untersuchungen über die angeführten Gegenstände enthält.)

J. Banks, angef. Abhandlung über die Mühlenwerke, übers. von C. G. Zimmermann.

Vierzehntes Kapitel.

Von den Eigenschaften der Luft in Beziehung auf hydraulische Maschinen.

---

195. §.

Die uns umgebende Luft, welche wir, zur Unterscheidung von andern Luftarten, atmosphärische Luft (Aër atmosphaericus, *Air de l'atmosphère*) nennen, besitzt die Fähigkeit, daß, wenn ein Theil derselben eingeschlossen ist, solcher durch einen äußern Druck in einen engern Raum gebracht werden, und nach Aufhebung des Drucks sich wieder so weit ausbreiten kann, als ihm verstattet ist. Diese Eigenschaft nennt man ihre Elastizität oder Expansibilität (Expansio, *Expansion*).

Die Luft hat unter gewissen Umständen auf die Bewegung des Wassers und die hydraulischen Maschinen einen wesentlichen Einfluß, so daß hier diejenigen Eigenschaften derselben kurz auseinander gesetzt werden sollen, welche mit den nachfolgenden Lehren in näherer Verbindung stehen.

196. §.

Das Gewicht der Luft ist in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkte der Erde und nach dem Grade ihrer Wärme verschieden. Nach den Angaben des Hrn. Prof. Tralles (Gilberts Annalen der Physik. 27. Band; Halle, 1807. S. 263) erhält man bei einem Barometerstande von 28 pariser Zoll und bei einer Temperatur von 15 Grad nach dem reaumurschen Queckfilberthermometer, das eigenthümliche Gewicht der atmosphärischen Luft = 0,00122. Nun wiegt der preußische Kubikfuß destillirtes Wasser, bei einer Temperatur von 15 Grad des angef. Thermometers 66 preußische Pfund, daher findet man das Gewicht von einem

preußischen Kubikfuß atmosphärischer Luft unter den angeführten Umständen

$$66 \cdot 0{,}00122 = 0{,}08052 \text{ preußische Pfund oder}$$
$$= \tfrac{2}{25} \text{ preuß. Pfunde beinahe oder}$$
$$= 2\tfrac{1}{8} \text{ preuß. Loth.}$$

In höhern Gegenden wird zwar das Gewicht der Luft geringer, so daß, wenn man sich 75 Fuß über das Meer erhebt, bei übrigens gleichen Umständen, das spezifische Gewicht der Luft um etwa $\frac{1}{318}$ vermindert wird.

197. §.

In ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß setze man eine etwa 3 Fuß lange mit Quecksilber gefüllte und an dem einen Ende verschlossene Glasröhre, dergestalt, daß das offene Ende derselben mit dem Quecksilber im Gefäße communicire, so wird die Quecksilbersäule nur so weit auslaufen, daß noch eine Höhe von etwa 28 preußische Zoll über der Oberfläche im Gefäße stehen bleibt. Man kann hieraus schließen, daß die gewöhnliche atmosphärische Luft, die Körper, welche sie umgibt, so stark drückt, als eine Quecksilbersäule von 28 Zoll Höhe. Nun ist das Quecksilber $13\frac{1}{2}$ bis 14mal schwerer als das Wasser, daher steht der Druck der Atmosphäre mit dem Drucke einer Wassersäule im Gleichgewichte, deren Höhe etwa 32 preußische Fuß beträgt.

Hienach kann man den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratfuß, 2110 berliner Pfund und auf einen Quadratzoll, $14\frac{2}{3}$ dergleichen Pfunde rechnen.

Anmerk. Durch den Druck der Luft läßt sich erklären, weshalb eine Flüssigkeit aus dem Stechheber nicht ausläuft. Die Handspritze, der Blasebalg, der Windkessel und mehrere Einrichtungen gründen sich hierauf.

198. §.

Wenn sich Luft in einem Gefäße befindet, so vergrößert sich, den Erfahrungen zu Folge, ihre Elastizität und Dichtigkeit bei unveränderter Wärme, nach dem Ver-

hältnisse der zusammendrückenden Kraft; auch verhalten sich die Elastizitäten der Luft oder die Kräfte, mit welchen sie gegen gleich große Wände eines Gefäßes drückt, umgekehrt wie die Räume, die gleiche Luftmengen einnehmen. Mariottens Versuche *) bestätigen dies. Hieraus folgt, daß sich die Elastizitäten gleich warmer und ungleich dichter Luftmassen sehr nahe wie ihre Dichtigkeiten verhalten, welches man das Mariottesche Gesetz von der Dichtigkeit der Luft nennt.

199. §.

Die Kraft, mit welcher die Luft dem Zusammendrükken widerstehet, nennt man ihre absolute Elastizität (Elasticitas absoluta, *Elasticité absolue*), und als Maß derselben kann die Höhe einer Wassersäule dienen, welche mit dem Gegendrucke der Luft im Gleichgewichte ist.

Haben zwei Luftmassen verschiedene Dichtigkeiten und dennoch gleiche absolute Elastizität, so nennt man diejenige spezifisch elastischer, welche weniger Dichtigkeit hat. Die spezifische Elastizität bezeichnet daher die Elastizität jedes einzelnen gleich großen Lufttheilchens.

200. §.

Durch die Wärme erhalten Luftmassen, die gleichen Druck leiden, eine Verstärkung der Elastizität und man kann annehmen **), daß, bei einerlei Druck, die Dichtigkeit der Luft um beiläufig $\frac{1}{250}$ abnimmt, wenn das Reaumursche Thermometer um einen Grad steigt. Die Fähigkeit der Luft sich durch Wärme auszubreiten, ist größer oder geringer, nach dem Grade ihrer Feuchtigkeit oder Trockenheit, oder nach ihrem hygrometrischen Zustande, daher hängt die Ela-

---

*) Oeuvres de M. *Mariotte*, à Leyde 1717. Discours de la nature de l'air, p. 149 etc.

Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides, II. Partie, 2 Disc. p. 380 etc.

**) Prony, angeführte Neue Archit. Hydraul. 1. Theil. 532 §.

sticität der Luft vom Drucke auf dieselbe, von ihrer Wärme und von ihrem hygrometrischen Zustande ab.

201. §.

Der allgemeine Beweis (89. §.) für das Verhältniß der Geschwindigkeiten, womit Wasser unter verschiedenen Druckhöhen aus einem Gefäße fließt, gilt eben sowohl für Quecksilber wie für andere Flüssigkeiten. Wenn sich daher Quecksilber und Wasser in zwei verschiedenen Gefäßen befinden und die Oberflächen der Flüssigkeiten stehen in beiden gleich hoch über den Ausflußöfnungen, so werden auch die Geschwindigkeiten des Ausflusses einander gleich seyn. Wenn nun h die Druckhöhe des Wassers und c die Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe aus einem Gefäße fließt, H die Druckhöhe des Quecksilbers und C dessen Geschwindigkeit ist, so verhält sich

$$c^2 : C^2 = h : H$$

vorausgesetzt, daß die Flüssigkeiten beim Ausflusse keinen Widerstand leiden.

Sind nun γ, γ' die Gewichte von einem Kubikfuß Wasser und Quecksilber, so wird dadurch zugleich das Verhältniß ihrer Dichtigkeit angezeigt und man findet die Höhe einer Wassersäule H', welche auf die Ausflußöfnung des Quecksilbers eben so stark als die Quecksilbersäule drückt, oder

$$H' = \frac{H\gamma'}{\gamma}$$

Nun verhält sich auch

$$c^2 : C^2 = \frac{h\gamma'}{\gamma} : \frac{H\gamma'}{\gamma} \text{ oder}$$

$$c^2 : C^2 = \frac{h\gamma'}{\gamma} : H' \text{ folglich}$$

$$c^2 : C^2 = \frac{h}{\gamma} : \frac{H'}{\gamma}$$

weil sich nun dieses von andern Flüssigkeiten eben so beweisen läßt, so kann man allgemein schließen, daß sich bei Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit die Quadrate der Geschwindigkeiten, womit

dieselben auslaufen, wie die Höhen der Wassersäulen, welche dem Drucke der Flüssigkeiten gegen die Ausflußöfnungen gleich sind, dividirt durch die Dichtigkeiten verhalten.

202. §.

Wenn eine elastische Flüssigkeit in einem Gefäße eingeschlossen ist, in welchem sich eine Oefnung befindet, so kann man den Druck angeben, mit welchem diese Flüssigkeit die verschlossene Oefnung pressen würde, und solche mit dem Drucke einer Wassersäule vergleichen. Ist alsdann das Verhältniß der Dichtigkeit dieser Flüssigkeit zur Dichtigkeit des Wassers bekannt, so läßt sich daraus die Geschwindigkeit bestimmen, mit welcher die elastische Flüssigkeit bei ungeänderter Dichte und Druckhöhe ausfließen wird, wenn kein Widerstand in Absicht der Ausströmung Statt findet.

Aus der zuletzt gefundenen Proportion erhält man, wenn sich die Größen C, H′ und γ' auf die angenommene elastische Flüssigkeit beziehen

$$C^2 = \frac{c^2}{h} \frac{\gamma}{\gamma'} H'$$

oder weil $\frac{c^2}{h} = 4g$ (15. §.) so findet man die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit ausströmt, oder

$$C = 2\sqrt{\left[g \frac{\gamma}{\gamma'} H'\right]}$$

203. §.

Der senkrechte Stoß der Luft gegen eine ruhende Fläche f, wird aus ähnlichen Gründen, wie 168. §. vom Quadrate der Geschwindigkeit der anstoßenden Luft, von der Größe der gestoßenen Fläche und von dem eigenthümlichen Gewichte der Luft abhängen, nur bleibt es zweifelhaft ob man

$$P = \frac{c^2}{2g} f\gamma' \text{ oder } = \frac{c^2}{4g} f\gamma'$$

annehmen soll. Die Versuche des Herrn Wasserbaudirektors Woltmann *) geben

$$P = \frac{4}{3}\,\frac{c^2}{4g}\,f\gamma'$$

womit auch die Schoberschen Versuche zum Theil übereinstimmen. Man kann daher, bis noch mehrere Versuche entweder diesen Ausdruck bestätigen oder irgend eine Modification nöthig machen, denselben beibehalten.

Nun ist (196. §.)

$$\gamma' = 0{,}08052;\ \frac{1}{4g} = 0{,}016$$

daher die Kraft, mit welcher die atmosphärische Luft eine Fläche f senkrecht stößt

$$P = 0{,}0017178\,.\,c^2 f = \frac{c^2 f}{582}\,.$$

Anmerk. Ueber den senkrechten und schiefen Stoß der Luft hat der Ritter von Borda Versuche angestellt **), indem er an einem Hebelarm verschiedene Flächen und Körper gegen den Wind bewegte. Statt der vorhin angenommenen $\frac{4}{3}$ findet er [illegible]; auch nimmt nach diesen Versuchen der Widerstand nicht in dem Verhältnisse zu, wie die Fläche wächst, sondern in einem etwas größeren Verhältnisse, so daß, wenn sich unter übrigens gleichen Umständen die Flächen wie 1 : 4 verhielten, so war das Verhältniß der Widerstände wie 1 : 4¼. Daß sich der senkrechte Stoß wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhalte, stimmt sehr gut mit den Versuchen; aber bei schiefen Flächen verhalten sich die Widerstände nicht wie die Quadrate von den Sinussen der Einfallswinkel, sondern näher wie die einfachen Sinusse.

*) Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels von Reinhard Woltmann. Hamburg 1790. S. 51.

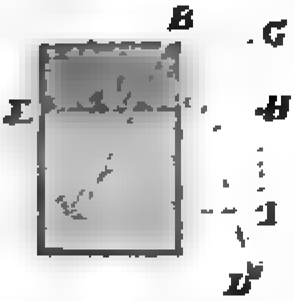
**) Expériences sur la résistance des fluides. Par M. le Chevalier de *Borda*, Mémoires de l'academie royale de Paris 1763. édit. Par. p. 358.

Funfzehntes Kapitel.

Von den Hebern.

204. §.

Eine gebogene an beiden Enden offene Röhre ABD, welche man einen Heber (Sipho, *Siphon*) nennt, werde in ein Gefäß mit Wasser, dessen Oberfläche bis EF reicht, so gehängt, daß die Oefnung A unter den Wasserspiegel kommt. Ist nun überdem der Heber mit Wasser angefüllt und die Ausflußöfnung D liegt niedriger als der Wasserspiegel EF, so wird sämmtliches über der Oefnung A stehende Wasser im Gefäße durch den Heber ablaufen.



Diese Wirkung zu erklären und die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher das Wasser die Oefnung D verläßt, nehme man die Vertikallinie GD, so daß

DG die größte Höhe des Hebers über der Ausflußöfnung,

DH die Höhe des Wasserspiegels, und

DI die Höhe der Einflußöfnung über der Ausflußöfnung D ist.

Setzt man nun ferner, daß

k die Höhe einer Wassersäule bezeichne, welche eben so stark wie die Atmosphäre drückt,

so ist der Druck gegen die Einflußöfnung A, dem Drucke einer Wassersäule gleich, deren Höhe

$$k + HI - GI = k - GH \text{ ist.}$$

und der Druck gegen die Ausflußöfnung D entspricht einer Wassersäule, deren Höhe

$$k - DG \text{ ist;}$$

zieht man von ersterer Höhe die letztere ab, so kommt

$$k - GH - k + DG = DG - GH = DH.$$

Oder der Ueberschuß des Drucks gegen die Einflußöfnung A ist so groß, als wenn eine Wassersäule dagegen preßte, deren Höhe der vertikalen Entfernung des Wasserspiegels EF von der Ausflußöfnung D gleich ist.

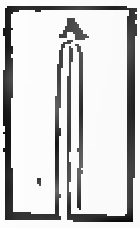
Dieser Ueberschuß des Drucks pflanzt sich gegen das Wasser im Heber fort, und so lange der Wasserspiegel höher als die Ausflußöfnung liegt, muß das Wasser aus dem Heber laufen, auch selbst dann, wenn der Schenkel BA länger als BD ist.

Wird hingegen BF oder die Scheitelhöhe des Hebers über dem Wasserspiegel, größer als die Höhe des Drucks der Atmosphäre = k, so kann dieser Druck die Wassersäule in dem Schenkel AB nicht mehr erhalten, welches ebenfalls von dem Schenkel BD gilt, in welchem Falle sich das Wasser trennen wird und daher kein Ausfluß aus dem Gefäße erfolgen kann.

205. §.

Setzt man die Höhe des Wasserspiegels im Gefäße über der Ausflußöfnung, oder HD = h, so läßt sich h als Druckhöhe ansehen, wonach es leicht ist mit Hülfe des 151. §. die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser ausfließt, die Wassermenge, und wenn das Gefäß keinen Zufluß erhält, die Zeit der Ausleerung zu bestimmen.

Mittelst der Heber ist man im Stande unter den Bedingungen des vorigen §. Behälter abzulassen und das Wasser über Anhöhen wegzuleiten. Auch kann man mit Hülfe derselben die sonderbare Erscheinung erklären, weshalb einige Brunnen beim Regenwetter trocken werden, oder wie



das Wasser im Czirknitzer See in Krain ablaufen kann. Die nebenstehende Anordnung eines Hebers, nennt man den Diabetes des Heron *), welcher das Gefäß nicht eher ausleert, bis das Wasser den Scheitel des Hebers in A erreicht hat.

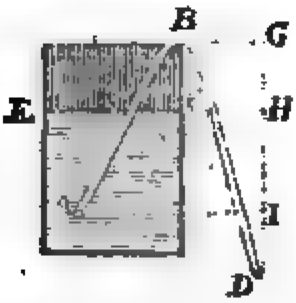
*) Heron von Alexandrien, welcher etwa 100 Jahre vor dem

Funfzehntes Kapitel.

Von den Hebern.

204. §.

Eine gebogene an beiden Enden offene Röhre ABD, welche man einen Heber (Sipho, *Siphon*) nennt, werde in ein Gefäß mit Wasser, dessen Oberfläche bis EF reicht, so gehängt, daß die Oefnung A unter den Wasserspiegel kommt. Ist nun überdem der Heber mit Wasser angefüllt und die Ausflußöfnung D liegt niedriger als der Wasserspiegel EF, so wird sämmtliches über der Oefnung A stehende Wasser im Gefäße durch den Heber ablaufen.



Diese Wirkung zu erklären und die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher das Wasser die Oefnung D verläßt, nehme man die Vertikallinie GD, so daß

DG die größte Höhe des Hebers über der Ausflußöfnung,

DH die Höhe des Wasserspiegels, und

DI die Höhe der Einflußöfnung über der Ausflußöfnung D ist.

Setzt man nun ferner, daß

k die Höhe einer Wassersäule bezeichne, welche eben so stark wie die Atmosphäre drückt,

so ist der Druck gegen die Einflußöfnung A, dem Drucke einer Wassersäule gleich, deren Höhe

$$k + HI - GI = k - GH \text{ ist.}$$

und der Druck gegen die Ausflußöfnung D entspricht einer Wassersäule, deren Höhe

$$k - DG \text{ ist;}$$

zieht man von ersterer Höhe die [illegible]

$$k - GH - k + DG = \text{[illegible]}$$

Oder der Ueberschuß des Drucks gegen die Einflußöfnung A ist so groß, als wenn eine Wassersäule dagegen preßte, deren Höhe der vertikalen Entfernung des Wasserspiegels EF von der Ausflußöfnung D gleich ist.

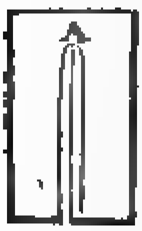
Dieser Ueberschuß des Drucks pflanzt sich gegen das Wasser im Heber fort, und so lange der Wasserspiegel höher als die Ausflußöfnung liegt, muß das Wasser aus dem Heber laufen, auch selbst dann, wenn der Schenkel BA länger als BD ist.

Wird hingegen BF oder die Scheitelhöhe des Hebers über dem Wasserspiegel, größer als die Höhe des Drucks der Atmosphäre = k, so kann dieser Druck die Wassersäule in dem Schenkel AB nicht mehr erhalten, welches ebenfalls von dem Schenkel BD gilt, in welchem Falle sich das Wasser trennen wird und daher kein Ausfluß aus dem Gefäße erfolgen kann.

205. §.

Setzt man die Höhe des Wasserspiegels im Gefäße über der Ausflußöfnung, oder HD = h, so läßt sich h als Druckhöhe ansehen, wonach es leicht ist mit Hülfe des 151. §. die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser ausfließt, die Wassermenge, und wenn das Gefäß keinen Zufluß erhält, die Zeit der Ausleerung zu bestimmen.

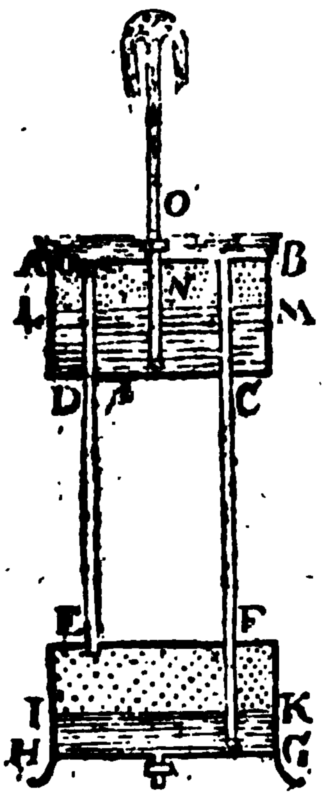
Mittelst der Heber ist man im Stande unter den Bedingungen des vorigen §. Behälter abzulassen und das Wasser über Anhöhen wegzuleiten. Auch kann man mit Hülfe derselben die sonderbare Erscheinung erklären, [illegible] einige Brunnen beim Regenwetter trocken werden, [illegible] das Wasser im Czirknitzer See [illegible] laufen kann. Die nebenstehende [illegible] eines Hebers, nennt man den [illegible] Heron *), welcher das [illegible] leert, bis das Wasser [illegible] in A erreicht hat.



*) Heron von Alexandrien, [illegible]

206. §.

Werden zwei luftdichte Gefäße ABCD und EFGH mittelst zweier Röhren DE, CF so miteinander verbunden, wie die nebenstehende Figur zeigt; befindet sich ferner über dem ersten Gefäße ein Teller AB, und im Boden des Tellers eine Röhre N mit einem Hahn O, die oberhalb mit einer Sprungöfnung versehen ist und unterhalb beinahe bis auf den Boden des ersten Gefäßes reicht, so nennt man diese Verbindung einen Heronsbrunnen (Fons Heronis, *Fontaine de Héron*).



Füllt man das erste Gefäß ABCD mittelst einer Oefnung bei A mit Wasser, und verschließt nachher diese Oefnung sowohl als den Hahn bei O. Gießt man ferner den Teller AB voll Wasser, so wird dasselbe durch die Röhre CF in das untere Gefäß laufen, und die Luft in den Räumen EFKI und mittelst der Röhre DE im Raume ABLM so lange zusammendrükken, bis sie dem Drucke einer Wassersäule von der Höhe BK, oder von der Oberfläche des Wassers im Teller bis zur Oberfläche im untern Gefäße widerstehet. Die zusammengepreßte Luft drückt nun das Wasser im obersten Gefäße eben so stark, als wenn darüber eine Wassersäule von der Höhe BK stünde. Oefnet man daher den Hahn in O, so wird das Wasser mit einer Geschwindigkeit bei O ausfließen, die derjenigen gleich ist, welche durch einen Wasserdruck von der Höhe BK — ON bewirkt wird.

Auf diese sinnreiche Einrichtung, wo mittelst der zusammengepreßten Luft Wasser bewegt wird, gründet sich die Anordnung der von J. C. Höll erfundenen Luftmaschine, wo mittelst zweier metallnen Kessel in Verbin-

---

Anfange unserer Zeitrechnung lebte, hat diese und mehrere andere Maschinen in einem besonderen Werke beschrieben.

dung mit Luft- und Wasserröhren, das Wasser auf eine beträchtliche Höhe zum Steigen gebracht werden kann.

207. §.

Wegen einer wichtigen Anwendung, die Neuton (Principia mathematica Lib. II. Sect. VII. Propos. 46.) von der Schwangbewegung des Wassers im Heber auf die Bewegung der Wellen macht, denke man sich einen Heber von gleicher Weite, dessen beide Oeffnungen nach oben gekehrt sind. Wird nun das im Heber befindliche Wasser in Bewegung gesetzt, so daß die Oberfläche desselben in dem einen Schenkel um die Höhe h über den Wasserspiegel des andern Schenkels steigt, so wird das Wasser, wenn es nun der freien Wirkung seiner Schwere überlassen bleibt, im andern Schenkel sich um die Höhe h. erheben, und diese Bewegung oder Schwingung würde ohne Ende wie beim Pendel (82. §.) abwechselnd fortdauern, wenn nicht die Adhäsion und der Widerstand der Luft die Bewegung des Wassers in der Röhre verzögerte. Diese Schwingungen lassen sich mit der Bewegung eines Pendels vergleichen und eben so mit der schwankenden Bewegung einer flüssigen Masse, welche durch die Wirkung des Windes, oder auf irgend eine andere Art, aus ihrem Gleichgewichte gebracht ist, und man sieht zugleich hieraus, wie die abwechselnde Bewegung der Wellen sich mit den Schwingungen des Wassers in einem Heber vergleichen lasse, weil bei der Welle, wie im Heber, die höchsten Theile nachher die tiefsten werden.

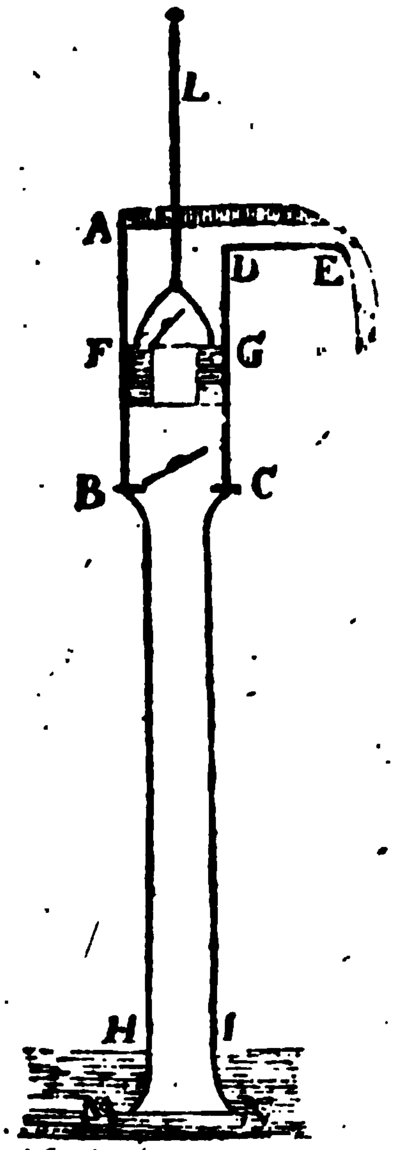
Man sehe hierüber: Bossut angef. Hydrodyn. I. Band II. Abschn. 9. Kap. S. 389; in der größten Allgemeinheit aber, und mit Rücksicht auf die Unzulänglichkeit der bisherigen Vorstellungsart, bei einer analytischen Behandlung dieses Problems: la Grange, Analytische Mechanik. Aus dem Französischen von F. W. A. Murhard. Göttingen 1797. 8ter Abschn. Nr. 35, 36 und 37. Seite 546 u. f. Noch gehört hierher: F. Gerstner, Theorie der Wellen. Prag 1804.

Sechszehntes Kapitel.

Von den Saugpumpen.

208. §.

Unter einer Wasserpumpe (Antlia aquaria, *Pompe d'eau*) versteht man überhaupt eine Maschine, bei der mittelst einer Röhre und eines in derselben auf- und niedergehenden Stämpels oder Kolbens (Embolus, *Piston*) das Wasser gehoben werden kann. Man schreibt die Erfindung der Pumpe dem Ktesibius *) zu.



Ist bei einer solchen Pumpe in dem Kolben eine Oefnung, und wird das Wasser vorzüglich durch den Druck der Atmosphäre zum Steigen gebracht, so nennt man sie eine Saugpumpe (Antlia suctoria, *Pompe aspirante*).

Die wesentlichen Theile einer Saugpumpe bestehen in dem Stiefel- oder Kolbenrohr (Modiolus, *Corps de pompe*) ABCD, welches diejenige Röhre ist, worin der Kolben FG mittelst der Kolbenstange (Regula, *Tige de piston*) L so bewegt wird, daß, bei seinem Aufwärtsgehen, dem über ihm befindlichen Wasser und der Luft aller Durchgang verschlossen bleibt, beim Herunterdrücken aber das unter ihm befindliche Wasser über denselben treten kann. Zu diesem Ende ist der Kolben durchbohrt und über der Oefnung eine

*) Ktesibius, ein Mathematiker in Alexandrien und Lehrer des Heron, lebte etwa in der Mitte des zweiten Jahrhunderts vor dem Anfange unserer Zeitrechnung.

Klappe oder ein Ventil (Axis, *Soupape*) angebracht, welches das Kolbenventil (*Soupape mobile*) genannt wird. Der Boden oder Untertheil des Stiefels hat eine Oeffnung, welche durch das Stiefelventil (*Soupape dormante*) BC geschlossen werden kann. An dem Stiefel befindet sich eine zweite Röhre BCMN, die Saugröhre (*Tuyau d'aspiration*), die mit ihrem Untertheile HM im Unterwasser oder Sumpf (*Puisard*) stehet. Bei MN, wo das Unterwasser eintritt, an der Schlundöfnung wird ein Seiherblech oder Seiherkasten angebracht, um den Eintritt des Unraths zu verhindern. Das gehobene Wasser läuft bei DE durch den Ausguß oder die Gußröhre (Fusorium, *Gargouille*) ab.

Wenn die Pumpe nicht hoch ist, so fehlt zuweilen die Saugröhre gänzlich und der Stiefel steht unmittelbar im Unterwasser. Dagegen, wenn das Wasser auf eine beträchtliche Höhe gebracht werden soll, so wird über dem Stiefel noch eine Ansatzröhre befestiget, welche Einrichtung man einen hohen Satz, auch eine vereinigte Saug- und Hebepumpe nennt. Diese Ansatzröhren sind zuweilen über 100 Fuß hoch.

Wird die Saugröhre aus mehrern Stücken zusammengesetzt, so heißt das oberste, welches sich zunächst am Stiefel befindet, das Stöckelkiel, die übrigen, die Kielstücke.

Sollen bei mehrern übereinanderstehenden Pumpen, die Kolbenstangen zugleich bewegt werden, so nennt man diejenige Stange, an welcher sämmtliche Kolbenstangen befestiget sind, die Schachtstange.

209. §.

Um deutlich einzusehen, wie durch die Bewegung des Kolbens das Wasser von IH ab, zum Steigen gebracht werden kann, wenn sich in der Röhre noch kein Wasser sondern Luft befindet, so setze man, daß der Kolben in seinem tiefsten Stande BC wäre; wird derselbe alsdann bis D aufwärts gezogen, so entstehet im Stiefel ein beinahe

luftleerer Raum; die in der Saugröhre eingeschlossene Luft preßt alsdann gegen das Stiefelventil, stößt dasselbe auf und ein Theil derselben tritt in den Stiefel. Hiedurch ist aber die in den Röhren eingeschlossene Luft verdünnt, und wegen ihrer geringern Elastizität kann sie gegen das Wasser in der Saugröhre nicht so stark drücken, wie die Atmosphäre das Wasser von außen in die Saugröhre hineindrückt, wodurch ein Steigen des Wassers in der Saugröhre bewirkt wird. Geht nun der Kolben wieder abwärts, so bleibt das Stiefelventil verschlossen, die Luft im Stiefel wird aber zusammengepreßt, und wenn dadurch ihre Elastizität größer als die der äußern Luft ist, welche gegen die Oberfläche des Kolbenventils preßt, so muß sich dasselbe öffnen und die gepreßte Luft wird austreten. Hiedurch tritt ein Theil der im Stiefel eingeschlossenen Luft in die Atmosphäre, und sie würde gänzlich austreten, wenn zwischen dem Kolben- und Stiefelventil kein Zwischenraum befindlich wäre, welchen man den schädlichen Raum (*Espace superflû*) nennt.

Man sieht, wie nun durch fortgesetztes Spiel des Kolbens die Luft in den Röhren immer mehr ausgepumpt und verdünnt wird, so daß bei einer zweckmäßigen Anordnung, das Wasser zuletzt über das Stiefel- und Kolbenventil steigt, und bei jedem Kolbenhub (*Levée du piston*) das über dem Kolben befindliche Wasser gehoben und zum Ausguß gebracht wird.

210. §.

Wenn außer dem Drucke des Wassers und der Atmosphäre, aller Widerstand bei der Bewegung des Kolbens bei Seite gesetzt wird; man sucht die Kraft, welche erforderlich ist, den Kolben in einer bestimmten Lage im Gleichgewichte zu halten.

Der ganze Raum in der Pumpe zwischen DI sei mit Wasser ausgefüllt, wird alsdann der Kolben FG aufwärts bewegt, so muß, weil das Kolbenventil verschlossen ist, die Wassersäule GD gehoben werden. Aber auf diese drückt

die Atmosphäre mit dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe $= k$, daher ist die gesammte Gewalt, welche auf die Oberfläche des Kolbens preßt, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, von der Höhe

$$= GD + k$$

Nun drückt die Atmosphäre ebenfalls gegen die Oberfläche des Wassers bei HI mit einer Gewalt, die man wegen des geringen Unterschiedes in Absicht der Höhe DI, der Höhe k gleich setzen kann. Diesem atmosphärischen Drucke wirkt aber die Wassersäule von der Höhe GI entgegen, daher bleibt der Druck, welcher sich gegen den Kolben fortpflanzt und denselben aufwärts zu bewegen strebt

$$= k - GI.$$

Zieht man diesen von dem zuerst gefundenen ab, so bleibt der Ueberrest von derjenigen Wassersäule, welche den Kolben nach unten preßt

$$(GD + k) - (k - GI) = GD + GI = DI$$

d. h. damit der Kolben im Gleichgewichte erhalten werden kann, muß derselbe mit einer Kraft aufwärts gezogen werden, die dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, deren Grundfläche der Querschnitt des Kolbens, und deren Höhe mit der lothrechten Entfernung des Ausgusses vom Spiegel des Unterwassers übereinstimmt.

Man setze:

H die Höhe der Gußöfnung über dem Spiegel des zu hebenden Wassers,

A den Flächeninhalt eines senkrechten Querschnitts des Stiefels,

so ist die Kraft für das Gleichgewicht

$$AH\gamma$$

welche man auch die hydrostatische Last und H die Höhe des hydrostatischen Widerstandes nennt.

Ist GI größer wie $k = 32$ Fuß, so kann das Wasser in der Pumpe nicht mehr steigen, daher man in der Ausübung, zu mehrerer Sicherheit, bei Saugpumpen, den höchsten Stand des Kolbens nie größer als 28 bis 29 Fuß annimmt.

hältnisse der zusammendrückenden Kraft; auch verhalten sich die Elastizitäten der Luft oder die Kräfte, mit welchen sie gegen gleich große Wände eines Gefäßes drückt, umgekehrt wie die Räume, die gleiche Luftmengen einnehmen. Mariottens Versuche *) bestätigen dies. Hieraus folgt, daß sich die Elastizitäten gleich warmer und ungleich dichter Luftmassen sehr nahe wie ihre Dichtigkeiten verhalten, welches man das Mariottesche Gesetz von der Dichtigkeit der Luft nennt.

199. §.

Die Kraft, mit welcher die Luft dem Zusammendrükken widerstehet, nennt man ihre absolute Elastizität (Elasticitas absoluta, *Elasticité absolue*), und als Maß derselben kann die Höhe einer Wassersäule dienen, welche mit dem Gegendrucke der Luft im Gleichgewichte ist.

Haben zwei Luftmassen verschiedene Dichtigkeiten und dennoch gleiche absolute Elastizität, so nennt man diejenige spezifisch elastischer, welche weniger Dichtigkeit hat. Die spezifische Elastizität bezeichnet daher die Elastizität jedes einzelnen gleich großen Lufttheilchens.

200. §.

Durch die Wärme erhalten Luftmassen, die gleichen Druck leiden, eine Verstärkung der Elastizität und man kann annehmen **), daß, bei einerlei Druck, die Dichtigkeit der Luft um beiläufig $\frac{1}{200}$ abnimmt, wenn das Reaumursche Thermometer um einen Grad steigt. Die Fähigkeit der Luft sich durch Wärme auszubreiten, ist größer oder geringer, nach dem Grade ihrer Feuchtigkeit oder Trockenheit, oder nach ihrem hygrometrischen Zustande, daher hängt die Ela-

---

*) Oeuvres de M. *Mariotte*, à Leyde 1717. Discours de la nature de l'air, p. 149 etc.

Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides, II. Partie, 2 Disc. p. 380 etc.

**) Prony, angeführte Neue Archit. Hydraul. 1. Theil. 532 §.

stizität der Luft vom Drucke auf dieselbe, von ihrer Wärme und von ihrem hygrometrischen Zustande ab.

201. §.

Der allgemeine Beweis (89. §.) für das Verhältniß der Geschwindigkeiten, womit Wasser unter verschiedenen Druckhöhen aus einem Gefäße fließt, gilt eben sowohl für Quecksilber wie für andere Flüssigkeiten. Wenn sich daher Quecksilber und Wasser in zwei verschiedenen Gefäßen befinden und die Oberflächen der Flüssigkeiten stehen in beiden gleich hoch über den Ausflußöfnungen, so werden auch die Geschwindigkeiten des Ausflusses einander gleich seyn. Wenn nun h die Druckhöhe des Wassers und c die Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe aus einem Gefäße fließt, H die Druckhöhe des Quecksilbers und C dessen Geschwinkeit ist, so verhält sich

$$c^2 : C^2 = h : H$$

vorausgesetzt, daß die Flüssigkeiten beim Ausflusse keinen Widerstand leiden.

Sind nun γ, γ' die Gewichte von einem Kubikfuß Wasser und Quecksilber, so wird dadurch zugleich das Verhältniß ihrer Dichtigkeit angezeigt und man findet die Höhe einer Wassersäule H', welche auf die Ausflußöfnung des Quecksilbers eben so stark als die Quecksilbersäule drückt, oder

$$H' = \frac{H\gamma'}{\gamma}$$

Nun verhält sich auch

$$c^2 : C^2 = \frac{h\gamma'}{\gamma} : \frac{H\gamma'}{\gamma} \text{ oder}$$

$$c^2 : C^2 = \frac{h\gamma'}{\gamma} : H' \text{ folglich}$$

$$c^2 : C^2 = \frac{h}{\gamma} : \frac{H'}{\gamma}$$

weil sich nun dieses von andern Flüssigkeiten eben so beweisen läßt, so kann man allgemein schließen, daß sich bei Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit die Quadrate der Geschwindigkeiten, womit

S

dieselben auslaufen, wie die Höhen der Wassersäulen, welche dem Drucke der Flüssigkeiten gegen die Ausflußöfnungen gleich sind, dividirt durch die Dichtigkeiten verhalten.

202. §.

Wenn eine elastische Flüssigkeit in einem Gefäße eingeschlossen ist, in welchem sich eine Oefnung befindet, so kann man den Druck angeben, mit welchem diese Flüssigkeit die verschlossene Oefnung pressen würde, und solche mit dem Drucke einer Wassersäule vergleichen. Ist alsdann das Verhältniß der Dichtigkeit dieser Flüssigkeit zur Dichtigkeit des Wassers bekannt, so läßt sich daraus die Geschwindigkeit bestimmen, mit welcher die elastische Flüssigkeit bei ungeänderter Dichte und Druckhöhe ausfließen wird, wenn kein Widerstand in Absicht der Ausströmung Statt findet.

Aus der zuletzt gefundenen Proportion erhält man, wenn sich die Größen C, H′ und γ' auf die angenommene elastische Flüssigkeit beziehen

$$C^2 = \frac{c^2}{h} \frac{\gamma}{\gamma'} H'$$

oder weil $\frac{c^2}{h} = 4g$ (15. §.) so findet man die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit ausströmt, oder

$$C = 2\sqrt{\left[g \frac{\gamma}{\gamma'} H'\right]}$$

203. §.

Der senkrechte Stoß der Luft gegen eine ruhende Fläche f, wird aus ähnlichen Gründen, wie 168. §. vom Quadrate der Geschwindigkeit der anstoßenden Luft, von der Größe der gestoßenen Fläche und von dem eigenthümlichen Gewichte der Luft abhängen, nur bleibt es zweifelhaft ob man

$$P = \frac{c^2}{2g} f\gamma' \text{ oder } = \frac{c^2}{4g} f\gamma'$$

annehmen soll. Die Versuche des Herrn Wasserbaudirektors Woltmann *) geben

$$P = \frac{4}{3} \frac{c^2}{4g} f\gamma'$$

womit auch die Schoberschen Versuche zum Theil übereinstimmen. Man kann daher, bis noch mehrere Versuche entweder diesen Ausdruck bestätigen oder irgend eine Modification nöthig machen, denselben beibehalten.

Nun ist (196. §.)

$$\gamma' = 0{,}08052; \frac{1}{4g} = 0{,}016$$

daher die Kraft, mit welcher die atmosphärische Luft eine Fläche f senkrecht stößt

$$P = 0{,}0017178 \,.\, c^2 f = \frac{c^2 f}{582} .$$

Anmerk. Ueber den senkrechten und schiefen Stoß der Luft hat der Ritter von Borda Versuche angestellt **), indem er an einem Hebelarm verschiedene Flächen und Körper gegen den Wind bewegte. Statt der vorhin angenommenen $\frac{4}{3}$ findet er $\frac{4}{3}$; auch nimmt nach diesen Versuchen der Widerstand nicht in dem Verhältnisse zu, wie die Fläche wächst, sondern in einem etwas größeren Verhältnisse, so daß, wenn sich unter übrigens gleichen Umständen die Flächen wie 1 : 4 verhielten, so war das Verhältniß der Widerstände wie 1 : $4\frac{1}{4}$. Daß sich der senkrechte Stoß wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhalte, stimmt sehr gut mit den Versuchen; aber bei schiefen Flächen verhalten sich die Widerstände nicht wie die Quadrate von den Sinussen der Einfallswinkel, sondern näher wie die einfachen Sinusse.

---

*) Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels von Reinhard Woltmann. Hamburg 1790. S. 51.

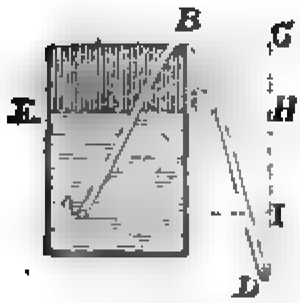
**) Expériences sur la résistance des fluides. Par M. le Chevalier de *Borda*. Mémoires de l'academie royale de Paris 1763. édit. Par. p. 358.

Funfzehntes Kapitel.

Von den Hebern.

204. §.

Eine gebogene an beiden Enden offene Röhre ABD, welche man einen Heber (Sipho, Siphon) nennt, werde in ein Gefäß mit Wasser, dessen Oberfläche bis EF reicht, so gehängt, daß die Oefnung A unter den Wasserspiegel kommt. Ist nun überdem der Heber mit Wasser angefüllt und die Ausflußöfnung D liegt niedriger als der Wasserspiegel EF, so wird sämmtliches über der Oefnung A stehende Wasser im Gefäße durch den Heber ablaufen.



Diese Wirkung zu erklären und die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher das Wasser die Oefnung D verläßt, nehme man die Vertikallinie GD, so daß

DG die größte Höhe des Hebers über der Ausflußöfnung,

DH die Höhe des Wasserspiegels, und

DI die Höhe der Einflußöfnung über der Ausflußöfnung D ist.

Setzt man nun ferner, daß

k die Höhe einer Wassersäule bezeichne, welche eben so stark wie die Atmosphäre drückt,

so ist der Druck gegen die Einflußöfnung A, dem Drucke einer Wassersäule gleich, deren Höhe

$$k + HI - GI = k - GH \text{ ist.}$$

und der Druck gegen die Ausflußöfnung D entspricht einer Wassersäule, deren Höhe

$$k - DG \text{ ist;}$$

zieht man von ersterer Höhe die letztere ab, so kommt

$$k - GH - k + DG = DG - GH = DH.$$

Oder der Ueberschuß des Drucks gegen die Einflußöfnung A ist so groß, als wenn eine Wassersäule dagegen preßte, deren Höhe der vertikalen Entfernung des Wasserspiegels EF von der Ausflußöfnung D gleich ist.

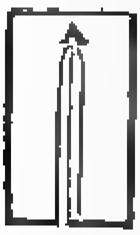
Dieser Ueberschuß des Drucks pflanzt sich gegen das Wasser im Heber fort, und so lange der Wasserspiegel höher als die Ausflußöfnung liegt, muß das Wasser aus dem Heber laufen, auch selbst dann, wenn der Schenkel BA länger als BD ist.

Wird hingegen BF oder die Scheitelhöhe des Hebers über dem Wasserspiegel, größer als die Höhe des Drucks der Atmosphäre = k, so kann dieser Druck die Wassersäule in dem Schenkel AB nicht mehr erhalten, welches ebenfalls von dem Schenkel BD gilt, in welchem Falle sich das Wasser trennen wird und daher kein Ausfluß aus dem Gefäße erfolgen kann.

205. §.

Setzt man die Höhe des Wasserspiegels im Gefäße über der Ausflußöfnung, oder HD = h, so läßt sich h als Druckhöhe ansehen, wonach es leicht ist mit Hülfe des 151. §. die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser ausfließt, die Wassermenge, und wenn das Gefäß keinen Zufluß erhält, die Zeit der Ausleerung zu bestimmen.

Mittelst der Heber ist man im Stande unter den Bedingungen des vorigen §. Behälter abzulassen und das Wasser über Anhöhen wegzuleiten. Auch kann man mit Hülfe derselben die sonderbare Erscheinung erklären, weshalb einige Brunnen beim Regenwetter trocken werden, oder wie

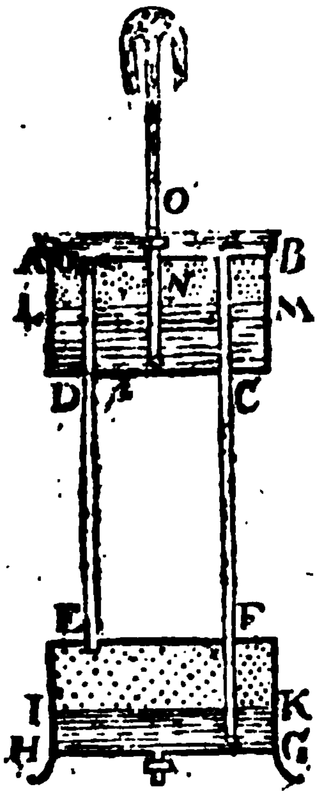


das Wasser im Czirknitzer See in Krain ablaufen kann. Die nebenstehende Anordnung eines Hebers, nennt man den Diabetes des Heron *), welcher das Gefäß nicht eher ausleert, bis das Wasser den Scheitel des Hebers in A erreicht hat.

*) Heron von Alexandrien, welcher etwa 100 Jahre vor dem

206. §.

Werden zwei luftdichte Gefäße ABCD und EFGH mittelst zweier Röhren DE, CF so miteinander verbunden, wie die nebenstehende Figur zeigt; befindet sich ferner über dem ersten Gefäße ein Teller AB, und im Boden des Tellers eine Röhre N mit einem Hahn O, die oberhalb mit einer Sprungöfnung versehen ist und unterhalb beinahe bis auf den Boden des ersten Gefäßes reicht, so nennt man diese Verbindung einen Heronsbrunnen (Fons Heronis, *Fontaine de Héron*).



Füllt man das erste Gefäß ABCD mittelst einer Oefnung bei A mit Wasser, und verschließt nachher diese Oefnung sowohl als den Hahn bei O. Gießt man ferner den Teller AB voll Wasser, so wird dasselbe durch die Röhre CF in das untere Gefäß laufen, und die Luft in den Räumen EFKI und mittelst der Röhre DE im Raume ABLM so lange zusammendrücken, bis sie dem Drucke einer Wassersäule von der Höhe BK, oder von der Oberfläche des Wassers im Teller bis zur Oberfläche im untern Gefäße widerstehet. Die zusammengepreßte Luft drückt nun das Wasser im obersten Gefäße eben so stark, als wenn darüber eine Wassersäule von der Höhe BK stünde. Oefnet man daher den Hahn in O, so wird das Wasser mit einer Geschwindigkeit bei O ausfließen, die derjenigen gleich ist, welche durch einen Wasserdruck von der Höhe BK — ON bewirkt wird.

Auf diese sinnreiche Einrichtung, wo mittelst der zusammengepreßten Luft Wasser bewegt wird, gründet sich die Anordnung der von J. C. Höll erfundenen Luftmaschine, wo mittelst zweier metallnen Kessel in Verbin-

Anfange unserer Zeitrechnung lebte, hat diese und mehrere andere Maschinen in einem besonderen Werke beschrieben.

dung mit Luft- und Wasserröhren, das Wasser auf eine beträchtliche Höhe zum Steigen gebracht werden kann.

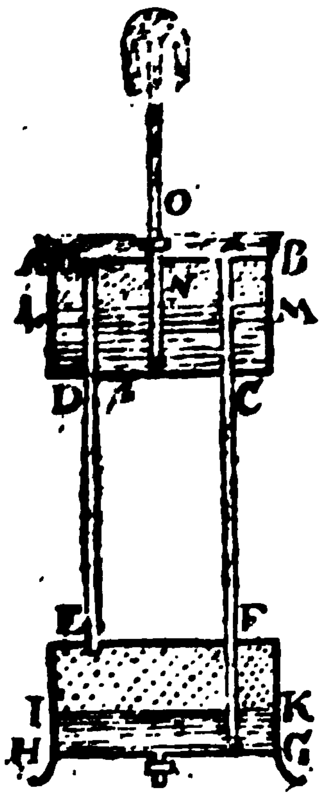
207. §.

Wegen einer wichtigen Anwendung, die Neuton (Principia mathematica Lib. II. Sect. VII. Propos. 46.) von der Schwangbewegung des Wassers im Heber auf die Bewegung der Wellen macht, denke man sich einen Heber von gleicher Weite, dessen beide Oeffnungen nach oben gekehrt sind. Wird nun das im Heber befindliche Wasser in Bewegung gesetzt, so daß die Oberfläche desselben in dem einen Schenkel um die Höhe h über den Wasserspiegel des andern Schenkels steigt, so wird das Wasser, wenn es nun der freien Wirkung seiner Schwere überlassen bleibt, im andern Schenkel sich um die Höhe h. erheben, und diese Bewegung oder Schwingung würde ohne Ende wie beim Pendel (82. §.) abwechselnd fortdauern, wenn nicht die Adhäsion und der Widerstand der Luft die Bewegung des Wassers in der Röhre verzögerte. Diese Schwingungen lassen sich mit der Bewegung eines Pendels vergleichen und eben so mit der schwankenden Bewegung einer flüssigen Masse, welche durch die Wirkung des Windes, oder auf irgend eine andere Art, aus ihrem Gleichgewichte gebracht ist, und man sieht zugleich hieraus, wie die abwechselnde Bewegung der Wellen sich mit den Schwingungen des Wassers in einem Heber vergleichen lasse, weil bei der Welle, wie im Heber, die höchsten Theile nachher die tiefsten werden.

Man sehe hierüber: Bossut angef. Hydrodyn. I. Band II. Abschn. 9. Kap. S. 389; in der größten Allgemeinheit aber, und mit Rücksicht auf die Unzulänglichkeit der bisherigen Vorstellungsart, bei einer analytischen Behandlung dieses Problems: la Grange, Analytische Mechanik. Aus dem Französischen von F. W. A. Murhard. Göttingen 1797. 8ter Abschn. Nr. 35, 36 und 37. Seite 546 u. f. Noch gehört hierher: F. Gerstner, Theorie der Wellen. Prag 1804.

206. §.

Werden zwei luftdichte Gefäße ABCD und EFGH mittelst zweier Röhren DE, CF so miteinander verbunden, wie die nebenstehende Figur zeigt; befindet sich ferner über dem ersten Gefäße ein Teller AB, und im Boden des Tellers eine Röhre N mit einem Hahn O, die oberhalb mit einer Sprungöfnung versehen ist und unterhalb beinahe bis auf den Boden des ersten Gefäßes reicht, so nennt man diese Verbindung einen Heronsbrunnen (Fons Heronis, *Fontaine de Héron*).



Füllt man das erste Gefäß ABCD mittelst einer Oefnung bei A mit Wasser, und verschließt nachher diese Oefnung sowohl als den Hahn bei O. Gießt man ferner den Teller AB voll Wasser, so wird dasselbe durch die Röhre CF in das untere Gefäß laufen, und die Luft in den Räumen EFKI und mittelst der Röhre DE im Raume ABLM so lange zusammendrükken, bis sie dem Drucke einer Wassersäule von der Höhe BK, oder von der Oberfläche des Wassers im Teller bis zur Oberfläche im untern Gefäße widerstehet. Die zusammengepreßte Luft drückt nun das Wasser im obersten Gefäße eben so stark, als wenn darüber eine Wassersäule von der Höhe BK stünde. Oefnet man daher den Hahn in O, so wird das Wasser mit einer Geschwindigkeit bei O ausfließen, die derjenigen gleich ist, welche durch einen Wasserdruck von der Höhe BK — ON bewirkt wird.

Auf diese sinnreiche Einrichtung, wo mittelst der zusammengepreßten Luft Wasser bewegt wird, gründet sich die Anordnung der von J. C. Höll erfundenen Luftmaschine, wo mittelst zweier metallnen Kessel in Verbin-

Anfange unserer Zeitrechnung lebte, hat diese und mehrere andere Maschinen in einem besonderen Werke beschrieben.

dung mit Luft- und Wasserröhren, das Wasser auf eine beträchtliche Höhe zum Steigen gebracht werden kann.

207. §.

Wegen einer wichtigen Anwendung, die **Neuton** (Principia mathematica Lib. II. Sect. VII. Propos. 46.) von der **Schwangbewegung** des Wassers im Heber auf die Bewegung der **Wellen** macht, denke man sich einen Heber von gleicher Weite, dessen beide Oeffnungen nach oben gekehrt sind. Wird nun das im Heber befindliche Wasser in Bewegung gesetzt, so daß die Oberfläche desselben in dem einen Schenkel um die Höhe h über den Wasserspiegel des andern Schenkels steigt, so wird das Wasser, wenn es nun der freien Wirkung seiner Schwere überlassen bleibt, im andern Schenkel sich um die Höhe h. erheben, und diese Bewegung oder Schwingung würde ohne Ende wie beim Pendel (82. §.) abwechselnd fortdauern, wenn nicht die Adhäsion und der Widerstand der Luft die Bewegung des Wassers in der Röhre verzögerte. Diese Schwingungen lassen sich mit der Bewegung eines Pendels vergleichen und eben so mit der schwankenden Bewegung einer flüssigen Masse, welche durch die Wirkung des Windes, oder auf irgend eine andere Art, aus ihrem Gleichgewichte gebracht ist, und man sieht zugleich hieraus, wie die abwechselnde **Bewegung der Wellen** sich mit den Schwingungen des Wassers in einem Heber vergleichen lasse, weil bei der Welle, wie im Heber, die höchsten Theile nachher die tiefsten werden.

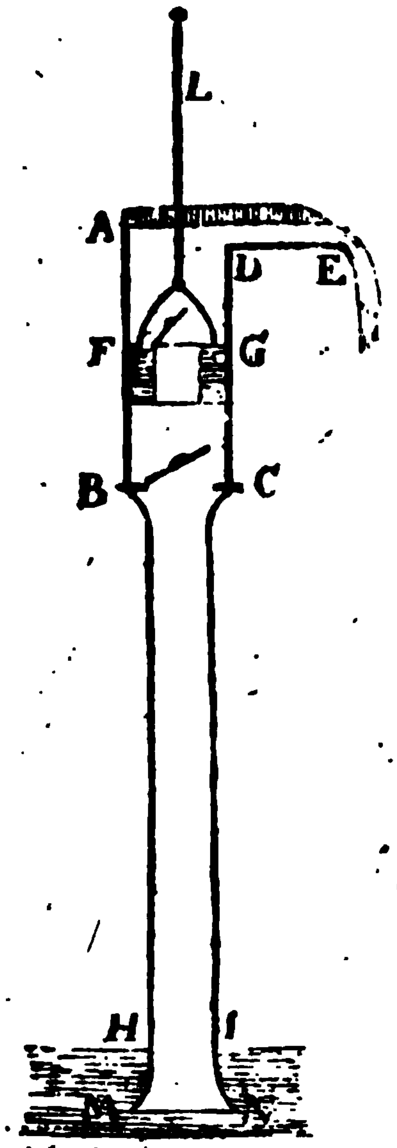
Man sehe hierüber: **Bossut** angef. Hydrodyn. I. Band II. Abschn. 9. Kap. S. 389; in der größten Allgemeinheit aber, und mit Rücksicht auf die Unzulänglichkeit der bisherigen Vorstellungsart, bei einer analytischen Behandlung dieses Problems: **la Grange**, Analytische Mechanik. Aus dem Französischen von F. W. A. **Murhard**. Göttingen 1797. 8ter Abschn. Nr. 35, 36 und 37. Seite 546 u. f. Noch gehört hierher: F. **Gerstner**, Theorie der Wellen. Prag 1804.

Sechszehntes Kapitel.

Von den Saugpumpen.

208. §.

Unter einer Wasserpumpe (Antlia aquaria, *Pompe d'eau*) versteht man überhaupt eine Maschine, bei der mittelst einer Röhre und eines in derselben auf- und niedergehenden Stämpels oder Kolbens (Embolus, *Piston*) das Wasser gehoben werden kann. Man schreibt die Erfindung der Pumpe dem Ktesibius *) zu.



Ist bei einer solchen Pumpe in dem Kolben eine Oefnung, und wird das Wasser vorzüglich durch den Druck der Atmosphäre zum Steigen gebracht, so nennt man sie eine Saugpumpe (Antlia suctoria, *Pompe aspirante*).

Die wesentlichen Theile einer Saugpumpe bestehen in dem Stiefel- oder Kolbenrohr (Modiolus, *Corps de pompe*) ABCD, welches diejenige Röhre ist, worin der Kolben FG mittelst der Kolbenstange (Regula, *Tige de piston*) L so bewegt wird, daß, bei seinem Aufwärtsgehen, dem über ihm befindlichen Wasser und der Luft aller Durchgang verschlossen bleibt, beim Herunterdrücken aber das unter ihm befindliche Wasser über denselben treten kann. Zu diesem Ende ist der Kolben durchbohrt und über der Oefnung eine

*) Ktesibius, ein Mathematiker in Alexandrien und Lehrer des Heron, lebte etwa in der Mitte des zweiten Jahrhunderts vor dem Anfange unserer Zeitrechnung.

Klappe oder ein Ventil (Axis, *Soupape*) angebracht, welches das Kolbenventil (*Soupape mobile*) genannt wird. Der Boden oder Untertheil des Stiefels hat eine Oeffnung, welche durch das Stiefelventil (*Soupape dormante*) BC geschlossen werden kann. An dem Stiefel befindet sich eine zweite Röhre BCMN, die Saugröhre (*Tuyau d'aspiration*), die mit ihrem Untertheile HM im Unterwasser oder Sumpf (*Puisard*) stehet. Bei MN, wo das Unterwasser eintritt, an der Schlundöfnung wird ein Seiherblech oder Seiherkasten angebracht, um den Eintritt des Unraths zu verhindern. Das gehobene Wasser läuft bei DE durch den Ausguß oder die Gußröhre (Fusorium, *Gargouille*) ab.

Wenn die Pumpe nicht hoch ist, so fehlt zuweilen die Saugröhre gänzlich und der Stiefel steht unmittelbar im Unterwasser. Dagegen, wenn das Wasser auf eine beträchtliche Höhe gebracht werden soll, so wird über dem Stiefel noch eine Ansatzröhre befestiget, welche Einrichtung man einen hohen Satz, auch eine vereinigte Saug- und Hebepumpe nennt. Diese Ansatzröhren sind zuweilen über 100 Fuß hoch.

Wird die Saugröhre aus mehrern Stücken zusammengesetzt, so heißt das oberste, welches sich zunächst am Stiefel befindet, das Stöckelkiel, die übrigen, die Kielstücke.

Sollen bei mehrern übereinanderstehenden Pumpen, die Kolbenstangen zugleich bewegt werden, so nennt man diejenige Stange, an welcher sämmtliche Kolbenstangen befestiget sind, die Schachtstange.

209. §.

Um deutlich einzusehen, wie durch die Bewegung des Kolbens das Wasser von IH ab, zum Steigen gebracht werden kann, wenn sich in der Röhre noch kein Wasser sondern Luft befindet, so setze man, daß der Kolben in seinem tiefsten Stande BC wäre; wird derselbe alsdann bis D aufwärts gezogen, so entstehet im Stiefel ein beinahe

luftleerer Raum; die in der Saugröhre eingeschlossene Luft preßt alsdann gegen das Stiefelventil, stößt dasselbe auf und ein Theil derselben tritt in den Stiefel. Hiedurch ist aber die in den Röhren eingeschlossene Luft verdünnt, und wegen ihrer geringern Elastizität kann sie gegen das Wasser in der Saugröhre nicht so stark drücken, wie die Atmosphäre das Wasser von außen in die Saugröhre hineindrückt, wodurch ein Steigen des Wassers in der Saugröhre bewirkt wird. Geht nun der Kolben wieder abwärts, so bleibt das Stiefelventil verschlossen, die Luft im Stiefel wird aber zusammengepreßt, und wenn dadurch ihre Elastizität größer als die der äußern Luft ist, welche gegen die Oberfläche des Kolbenventils preßt, so muß sich dasselbe öffnen und die gepreßte Luft wird austreten. Hiedurch tritt ein Theil der im Stiefel eingeschlossenen Luft in die Atmosphäre, und sie würde gänzlich austreten, wenn zwischen dem Kolben- und Stiefelventil kein Zwischenraum befindlich wäre, welchen man den schädlichen Raum (*Espace superflû*) nennt.

Man sieht, wie nun durch fortgesetztes Spiel des Kolbens die Luft in den Röhren immer mehr ausgepumpt und verdünnt wird, so daß bei einer zweckmäßigen Anordnung, das Wasser zuletzt über das Stiefel- und Kolbenventil steigt, und bei jedem Kolbenhub (*Levée du piston*) das über dem Kolben befindliche Wasser gehoben und zum Ausguß gebracht wird.

210. §.

Wenn außer dem Drucke des Wassers und der Atmosphäre, aller Widerstand bei der Bewegung des Kolbens bei Seite gesetzt wird; man sucht die Kraft, welche erforderlich ist, den Kolben in einer bestimmten Lage im Gleichgewichte zu halten.

Der ganze Raum in der Pumpe zwischen DI sei mit Wasser ausgefüllt, wird alsdann der Kolben FG aufwärts bewegt, so muß, weil das Kolbenventil verschlossen ist, die Wassersäule GD gehoben werden. Aber auf diese drückt

die Atmosphäre mit dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe $= k$, daher ist die gesammte Gewalt, welche auf die Oberfläche des Kolbens preßt, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, von der Höhe

$$= GD + k$$

Nun drückt die Atmosphäre ebenfalls gegen die Oberfläche des Wassers bei HI mit einer Gewalt, die man wegen des geringen Unterschiedes in Absicht der Höhe DI, der Höhe k gleich setzen kann. Diesem atmosphärischen Drucke wirkt aber die Wassersäule von der Höhe GI entgegen, daher bleibt der Druck, welcher sich gegen den Kolben fortpflanzt und denselben aufwärts zu bewegen strebt

$$= k - GI.$$

Zieht man diesen von dem zuerst gefundenen ab, so bleibt der Ueberrest von derjenigen Wassersäule, welche den Kolben nach unten preßt

$$(GD + k) - (k - GI) = GD + GI = DI$$

d. h. damit der Kolben im Gleichgewichte erhalten werden kann, muß derselbe mit einer Kraft aufwärts gezogen werden, die dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, deren Grundfläche der Querschnitt des Kolbens, und deren Höhe mit der lothrechten Entfernung des Ausgusses vom Spiegel des Unterwassers übereinstimmt.

Man setze:

- H die Höhe der Gußöffnung über dem Spiegel des zu hebenden Wassers,
- A den Flächeninhalt eines senkrechten Querschnitts des Stiefels,

so ist die Kraft für das Gleichgewicht

$$AH\gamma$$

welche man auch die hydrostatische Last und H die Höhe des hydrostatischen Widerstandes nennt.

Ist GI größer wie $k = 32$ Fuß, so kann das Wasser in der Pumpe nicht mehr steigen, daher man in der Ausübung, zu mehrerer Sicherheit, bei Saugpumpen, den höchsten Stand des Kolbens nie größer als 28 bis 29 Fuß annimmt.

211. §.

Wirkt an der Kolbenstange eine Kraft aufwärts, welche der vorhin gefundenen hydrostatischen Last gleich ist, so wird dadurch Gleichgewicht, aber keine Bewegung hervorgebracht. Soll der Kolben in Bewegung gesetzt werden, so wird noch mehr Kraft erfordert, die sich unter drei Abtheilungen bringen läßt.

I. Die Ueberwältigung des Widerstandes, den die Reibung des Kolben an den Stiefelwänden verursacht, erfordert Kraft.

II. Wenn das Wasser längs einer Röhre und durch verschiedene Oefnungen bewegt werden soll, so ist dazu ebenfalls Kraft nöthig, weshalb der fortgepflanzte Druck der Atmosphäre gegen den Untertheil des Kolbens vermindert und deshalb die gefundene Kraft für das Gleichgewicht vergrößert werden muß.

III. Weil der Kolben bei jedem Aufwärtssteigen seine Bewegung von der Ruhe anfängt, so muß die gesammte Masse des Wassers in der Pumpe in Bewegung gesetzt werden, und während einer gewissen Zeit eine bestimmte Geschwindigkeit erhalten, wozu gleichfalls Kraft erfordert wird.

Diese verschiedenen Kräfte zur Bewegung des Kolbens in Rechnung zu bringen und der Pumpe die vortheilhafteste Anordnung zu geben, ist eins von den allerschwierigsten Geschäften der höhern Mechanik. So weit es indessen die eingeschränkten Grenzen dieser Schrift erlauben, wird hierauf ohne zu große Verwickelung der Rechnung Rücksicht genommen werden.

212. §.

Ueber die Reibung zwischen Stiefel und Kolben fehlt es noch an vollständigen Versuchen. Setzt man die
F zur Ueberwältigung dieser Reibung erforderliche Kraft F, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche

der Querschnitt A des Stiefels und deren Höhe = f ist, A
so wird f

$$F = A f \gamma.$$

Nun läßt sich einsehen, daß in dem Verhältniß, wie der Kolben mehr Umfang erhält, auch die Reibung sich vermehrt; wenn also D der Durchmesser des Stiefels ist, so verhält sich F wie D.

Wird die Höhe H des Ausgusses über dem Unterwasser größer, so muß der Kolben mehr Gewalt ausstehen und stärker gegen die Stiefelwände gepreßt werden. Wenn daher H wächst, so muß auch F wachsen, obgleich bei doppelter Höhe von H, unter übrigens gleichen Umständen, F nicht doppelt so groß wird, sondern in einem geringeren Verhältniß zunimmt. Bis genaue Versuche die Funktion zwischen F und H bestimmen, kann man annehmen, daß sich F wie H verhalte. Ist alsdann μ eine Zahl, die aus μ
Versuchen bestimmt werden muß, so erhält man

$$F = \mu HD \text{ oder}$$

weil $A = 0{,}785\ D^2$ ist

$$A f \gamma = 0{,}785\ D^2 f \gamma = \mu HD \text{ daher}$$

$$f = \frac{\mu}{0{,}785\,\gamma} \cdot \frac{HD}{D^2} \text{ oder}$$

$$f = \frac{\mu}{0{,}785\,\gamma} \cdot \frac{H}{D}.$$

Nach dem Verhältnisse, wie die Stiefel und Kolben gut oder schlecht gearbeitet sind, wird μ kleiner oder größer und man kann annehmen:

I. Für gut polirte metallne Stiefel

$$f = 0{,}03\ \frac{H}{D}$$

II. Für nachgebohrte metallene Stiefel

$$f = 0{,}06\ \frac{H}{D}$$

III. Für gut gebohrte hölzerne Stiefel

$$f = 0{,}1\ \frac{H}{D}$$

IV. Für schlechte hölzerne Stiefel

$$f = 0{,}2\ \frac{H}{D}$$

wo f die Höhe einer Wassersäule bezeichnet, deren Grundfläche der Querschnitt des Stiefels ist, und alle Größen sich auf rheinländisches Fußmaß beziehen.

In unbestimmten Fällen wird in der Folge die Reibung zwischen dem Kolben und Stiefel durch

$$f = (0,1 \pm) \frac{H}{D}$$

bezeichnet werden.

213. §.

Es läßt sich leicht einsehen, daß der Kolben so schnell in die Höhe gezogen werden kann, daß er sich von dem unter ihm befindlichen Wasser trennt, in welchem Falle ihm der Druck des Wassers von unten nach oben nicht zu Hülfe kömmt. Um diese Trennung zu vermeiden, darf die Geschwindigkeit des Kolbens eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Man setze daher, daß

- A den Querschnitt, L die Länge und D den Durchmesser des Stiefels,
- A' den Querschnitt, L' die Länge *) und D' den Durchmesser der Saugröhre,
- a' den Inhalt der Oefnung am Stiefelventil,
- b den Kolbenhub oder den Raum, welchen der Kolben beim Aufwärtsziehen durchläuft,
- τ die Zeit des Kolbenhubs,
- w die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens und
- k die Höhe der Wassersäule, welche auf die Oberfläche des Unterwassers eben so stark als die Atmosphäre drückt, bezeichne,

so findet man (158. §., wenn dort anstatt des im Gefäße BC befindlichen Wassers, der Druck der Atmosphäre in Rechnung gebracht und vorausgesetzt wird, daß durch den be-

*) Hier und in der Folge wird unter Länge der Saugröhre, die Entfernung des tiefsten Kolbenstandes vom Unterwasser verstanden, weil etwanige Abweichungen der wahren Länge der Saugröhre nur wenig Abänderungen in den Resultaten geben.

ständigen Wässerzufluß, der Spiegel des Unterwassers sich nicht senkt, also die Luft als bewegte Masse nicht in Rechnung kommt) die Zeit t, in welcher das Wasser auf die Höhe b steigt, wenn der Kolben in seinem tiefsten Stande plötzlich gehoben und von dem unter ihm befindlichen Wasser abgerissen wird

$$t = 2\sqrt{\left[\frac{B\left(\frac{A}{A'}L' + \frac{1}{2}b\right)b}{k - L' - \frac{1}{2}b}\right]}$$

Setzt man 2b für b, so würde das Wasser auf eine doppelt so große Höhe in der Zeit

$$t' = 2\sqrt{\left[\frac{B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)2b}{k - L' - b}\right]}$$

steigen. Damit sich nun das Wasser von dem Kolben bei seinem Aufwärtsbewegen nicht ablöse, so kann man annehmen, daß der Kolben in der Zeit t' den Weg b durchlaufe, in welcher das Wasser die Höhe 2b steigen könnte. In diesem Falle darf man nicht befürchten, daß sich der Kolben von dem Wasser trennen sollte, weil überdies seine, so wie des Wassers Bewegung von o anfangen. Hienach ist die Zeit eines Kolbenhubs

$$\tau = t' \text{ oder}$$

$$\tau = 2\sqrt{\left[\frac{2B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)b}{k - L' - b}\right]}$$

und es kann τ wohl größer als t', aber nicht kleiner angenommen werden.

Die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens ist

$$w = \frac{b}{\tau}, \text{ aber}$$

$$\frac{b}{\tau} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{b(k - L' - b)}{2B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)}\right]}$$

daher darf die mittlere Geschwindigkeit w des Kolbens, nicht größer seyn als

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{b(k - L' - b)}{2B\left(\frac{A}{A'}L' + b\right)}\right]}$$

wenn sich nicht das Wasser unter dem Kolben von demselben trennen soll.

In dem vorliegenden Falle ist, wenn man voraussetzt, daß die Schlundöffnung der Saugröhre gehörig erweitert ist, damit daselbst die Zusammenziehung nicht in Rechnung kommen darf (155. §.)

$$B = 0{,}0417 \left(\frac{A}{a}\right)^2 - 0{,}0417 \left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{\frac{1}{2} b}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'}}{2006}$$

Der obige allgemeine Ausdruck für den Werth, welchen w nicht übersteigen darf, gibt für den Fall, wenn die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens und die übrigen Abmessungen, außer der Länge der Saugröhre ($= L'$) gegeben sind,

$$w^2 < \frac{b\,(k - L' - b)}{8B\left(\frac{A}{A'} L' + b\right)}$$

und wenn man daraus L' entwickelt

$$L' < b\,\frac{k - b - 8B\,w^2}{8B\,w^2 \frac{A}{A'} + b}$$

d. h. die Saugröhre muß kürzer als der zuletzt gefundene Ausdruck seyn, wenn sich der Kolben nicht von dem unter ihm befindlichen Wasser trennen soll.

214. §.

In der Voraussetzung, daß die Bewegung des Kolbens so angeordnet sei, daß ihn beim Aufwärtsgehen das nachfolgende Wasser nicht verläßt, so wird von dem Drucke der Atmosphäre, wodurch das Wasser in der Saugröhre zum Steigen gebracht wird, nur ein Theil auf die Bewegung des Wassers verwendet, und der Ueberrest wird den Kolben von unten nach oben pressen. Dieser Ueberrest sei p; setzt man nun die bewegende Kraft, welche auf das unter dem Kolben befindliche Wasser wirkt $= Q$ und $k = 32$ Fuß, so findet man, wenn h'' nach 157. §. die erforderliche Druckhöhe bezeichnet, um den Widerstand längs

den Wänden der Röhren und beim Durchgange durch die verschiedenen Oefnungen zu überwältigen,

$$Q = (k - L' - \tfrac{1}{2} b - h'') A\gamma.$$

Wenn nun in der Zeit τ das Wasser auf die Höhe b steigen soll, so muß dazu eine bewegende Kraft

$$Q' = \frac{b}{g\tau^2} N \text{ (35. §. IX.)}$$

verwandt werden. Der Ueberrest $Q - Q' = P$ verursacht Druck gegen den Kolben, daher wenn für die Masse N ihr Werth $\left(\frac{A^2}{A'} L' + \frac{1}{2} bA\right)\gamma$ wie 158. §. gesetzt wird, so ist $Q - Q'$ oder die Kraft, welche den Kolben aufwärts preßt

$$p = \gamma A \left[k - L' - \tfrac{1}{2} b - h'' - \frac{\frac{A}{A'} L' b + \frac{1}{2} b^2}{g\tau^2}\right]$$

wo $h'' = w^2 \left(B - \frac{1}{4g}\right) = w^2 \left[E + F - G - \frac{1}{4g}\right]$ ist.

Bei den vorhergehenden Schlüssen ist zwar vorausgesetzt, daß die Kräfte immer gleich stark wirken und der Druck p unveränderlich bleibe; dies gilt zwar nicht in aller Strenge, man wird aber die gefundenen Ausdrücke als Mittelresultate ansehen können. In einem größern Umfange und weit allgemeiner ist der Vortrag in der angeführten Maschinenlehre des Herrn Langsdorf, woselbst man bis jetzt die ausführlichste Pumpentheorie findet.

215. §.

Es bleibt nun noch übrig die Kraft zu bestimmen, um das über dem Kolben befindliche Wasser zu heben.

Im mittlern Kolbenstande befindet sich über demselben eine Wassersäule von der Höhe $L - \frac{1}{2} b$, bei welcher zur Ueberwältigung der Hindernisse längs den Röhrenwänden, wenn die mittlere Geschwindigkeit w ist, eine Widerstandshöhe (152. §.)

$$w^2 \frac{L - \frac{1}{2} b}{2006 \,.\, D}$$

erfordert wird.

Weil aber die Wassermasse $(L - \frac{1}{2} b) A$, wenn darauf nicht Rücksicht genommen wird, daß die Kolbenstange einen Theil dieses Wassers verdrängt, beim jedesmaligen Aufziehen des Kolbens aus der Ruhe so in Bewegung gesetzt werden muß, daß solche in der Zeit τ den Weg b durchläuft, so erhält man die hiezu erforderliche bewegende Kraft (35. §. IX.)

$$\frac{b}{g\tau^2}(L - \tfrac{1}{2} b) A\gamma$$

wobei die in Bewegung zu setzende Masse des Kolbens und der Kolbenstange nicht in Rechnung gebracht ist, weil dieses zur Maschinenlehre gehört.

Wird nun die gesammte Kraft, welche zum Auf-
P ziehen des Kolbens erforderlich ist = P gesetzt, so ist, wenn auf das unter dem Kolben befindliche Wasser nicht Rücksicht genommen wird, wegen des Druckes der Atmosphäre von der Höhe k und wegen der Friktion am Kolben von der Höhe f, zur Aufziehung des Kolbens eine Kraft

$$\gamma A\left[k + L - \tfrac{1}{2} b + w^2 \frac{L - \frac{1}{2} b}{2006\, D} + \frac{b}{g\tau^2}(L - \tfrac{1}{2} b) + f\right]$$

erforderlich. Dieser kommt aber von unten gegen den Kolben ein Druck p (214. §.) zu Hülfe, daher ist

$$P = \gamma A\Big[k + L - \tfrac{1}{2} b + w^2 \frac{L - \frac{1}{2} b}{2006\, D} + \frac{b}{g\tau^2}(L - \tfrac{1}{2} b) + f$$
$$- k + L' + \tfrac{1}{2} b + h'' \qquad + \frac{b}{g\tau^2}\left(\frac{A}{A'} L' + \tfrac{1}{2} b\right)\Big]$$

$$P = \gamma A\left[L + L' + h'' + w^2 \frac{L - \frac{1}{2} b}{2006\, D} + \frac{b}{g\tau^2}\left(L + \frac{A}{A'} L'\right) + f\right]$$

oder wenn

$$H = L + L'$$

den lothrechten Abstand des Ausgusses vom Unterwasser, oder die hydrostatische Widerstandshöhe; ferner

$$H' = h'' + w^2 \frac{L - \frac{1}{2} b}{2006\, D} = w^2 \left(B + \frac{L - \frac{1}{2} b}{2006\, D} - \frac{1}{4g}\right)$$

(157. §.) oder, statt B seinen Werth (155. §.) gesetzt und abgekürzt

$H' =$

$$w^2\left[0{,}0417\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 0{,}0417\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'}}{2006} - 0{,}016\right]$$

die hydraulische Widerstandshöhe;

$$T = \frac{b}{g\tau^2} \left[L + \frac{A}{A'} L' \right]$$

die Höhe des mechanischen Widerstandes; und

$$f = (0,1 \pm) \frac{H}{D}$$

die Höhe des Reibungswiderstandes bezeichnet, so ist die zur Aufziehung des Kolbens erforderliche Kraft

$$P = \gamma A \left[H + H' + T + f \right].$$

Beispiel. Eine Saugpumpe mit hölzernem Stiefel habe nachstehende Abmessungen; man soll die nöthige Kraft am Kolben zum Aufwärtsziehen bestimmen.

L	Länge des Stiefels bis zum Ausguß	10 Fuß
L'	Länge der Saugröhre	15 Fuß
H	Höhe des Ausgusses über dem Unterwasser	25 Fuß
D	Durchmesser des Stiefels	9 Zoll
D'	Durchmesser der Saugröhre	6 Zoll
a'	Inhalt der Oefnung am Stiefelventil	20 □Z.
b	Höhe des Kolbenhubs	3 Fuß

Hieraus erhält man

$$\frac{A}{a'} = \frac{63,6}{20} = 3,18; \left(\frac{A}{a'}\right)^2 = 10,11$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{9^2}{6^2} = \frac{9}{4}; \left(\frac{A}{A'}\right)^2 = \frac{81}{16}$$

$$\frac{L}{D} = \frac{10 . 12}{9} = 13\tfrac{1}{3}; \frac{L'}{D'} = \frac{15 . 12}{6} = 30.$$

Für die größte mittlere Geschwindigkeit des Kolbens ist nach 213. §.

$$B = 0,0417 . 10,11 - 0,0417 . \frac{81}{16} + \frac{2 + \frac{81}{16} . 30}{2006}$$

$$= 0,286$$

daher die größte Geschwindigkeit

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{3 (32 - 15 - 3)}{0,572 (\frac{81}{16} . 15 + 3)} \right]} = 0,482 \text{ Fuß}$$

wofür man als mittlere Geschwindigkeit $w = 5\tfrac{3}{4}$ Zoll $= \frac{23}{48}$ Fuß annehmen kann.

Dies gibt die Zeit eines Kolbenhubs

$$z = \frac{3}{w} = \frac{3 . 25}{12} = 6,25 \text{ Sekunden.}$$

Nun ist ferner

$$H' = \left(\frac{12}{25}\right)^2 \left(0,286 + \frac{8,5}{2006 \cdot \frac{3}{4}} - 0,016\right) = 0,063 \text{ Fuß.}$$

$$T = \frac{3}{15\frac{3}{8} \cdot 6\frac{1}{4}} \left[10 + \frac{3}{4} \cdot 15\right] = 0,219 \text{ Fuß.}$$

$$f = \frac{0,1 \cdot 25}{0,75} = 3\tfrac{1}{3} \text{ Fuß.}$$

daher die zur Aufziehung des Kolbens erforderliche Kraft

$$P = 66 \cdot 0,442 \left[25 + 0,063 + 0,219 + 3\tfrac{1}{3}\right] = 834,76 \text{ Pfund.}$$

wozu bei der Anordnung der ganzen Maschine noch das Gewicht des Kolbens und der Kolbenstange hinzukommt, wenn zuvor das Gewicht desjenigen Wassers abgezogen wird, welches sie aus der Stelle verdrängt haben.

216. §.

Soll mit Beibehaltung der eingeführten Bezeichnung, und unter den angenommenen Voraussetzungen der Kolben niedergedrückt werden, so sei

a der Flächeninhalt der Kolbenöfnung, und
P' die erforderliche Kraft zum Niederdrücken.

Sieht man die Höhe des Kolbens als unbeträchtlich an, und setzt sein Gewicht nebst dem der Kolbenstange wie bisher bei Seite, so wird er in allen Lagen im Gleichgewichte bleiben. Bewegt sich derselbe nun mit der Geschwindigkeit w niederwärts, so wird in jeder Sekunde die Wassermenge $(A - a)w$ über den Kolben steigen. Soll aber diese Wassermenge durch die Oefnung a in jeder Sekunde fließen, so findet man die entsprechende Geschwindigkeit $= \frac{(A-a)w}{a}$, wozu eine Druckhöhe

$$H'' = \frac{w^2}{a^2}\left(\frac{A-a}{a}\right)^2 = 0,0243\, w^2 \left(\frac{A-a}{a}\right)^2 \quad (100. \S.)$$

erfordert wird.

Bei der Reibung des Kolbens kann die Höhe des Stiefels in Rechnung gebracht werden, alsdann ist

$$f = (0,1 \pm) \frac{L}{D}$$

daher wird zum Niederdrücken des Kolbens eine Wassersäule von der Höhe

$$H'' + f = 0{,}0243\, w^2 \left(\frac{A-a}{a}\right)^2 + (0{,}1 \pm)\frac{L}{D}$$

erfordert, und man findet die Kraft zum Niederdrücken des Kolbens

$$P' = \gamma A \left[0{,}0243\, w^2 \left(\frac{A-a}{a}\right)^2 + (0{,}1 \pm)\frac{L}{D}\right].$$

Hieraus folgt, daß bei übrigens gleichen Umständen, die Kraft zum Niederdrücken des Kolbens ansehnlich vermehrt werden muß, wenn die Kolbenöfnung a zu enge ist, weshalb dieselbe, so weit als es die übrigen Umstände zulassen, gemacht werden muß.

Beispiel. Mit Beibehaltung der im letzten Beispiele angenommenen Größen, findet man, wenn $a = 20$ □ Zoll $= 0{,}139$ □ Fuß gesetzt wird

$$H'' + f = 0{,}0243 \cdot \left(\frac{12}{25}\right)^2 \cdot \left(\frac{0{,}303}{0{,}139}\right)^2 + \frac{0{,}1 \cdot 10}{0{,}75}$$

$$= 1{,}36 \text{ Fuß}$$

und die Kraft zum Niederdrücken

$$P' = 66 \cdot 0{,}442 \cdot 1{,}36 = 39{,}67 \text{ Pfund},$$

wovon aber, bei Berechnung der ganzen Maschine, das Gewicht des Kolbens und der Kolbenstange abgezogen werden muß.

217. §.

Da bei den einfachen Saugpumpen die Kraft P zum Aufzuge sehr viel größer ist, als die Kraft P' zum Niederdrücken des Kolbens, so pflegt man außer den bekannten Handpumpen mit Schwengeln, wenn Pumpenwerke von einiger Bedeutung angelegt werden sollen, die Pumpen immer paarweise oder doppelt von gleichen Abmessungen anzulegen, dergestalt, daß, wenn der eine Kolben aufgezogen wird, der andere niedergedrückt werden muß. Die doppelten Saugwerke haben den Vortheil, daß immer einerlei Kraft auf beide Pumpen verwendet wird, denn während eines jeden Auf- und Niedergangs eines Kolbens wird alsdann zusammen die Kraft

$$P + P'$$

erfordert.

Die Zeit, welche während des Aufzugs und Niedergangs des Kolbens verfließt, heißt die **Zeit eines Kolbenspiels**. Setzt man diese $= t$ und ist die Zeit des Kolbenhubs τ, der Zeit des Niedergangs gleich, so wird

$$t = 2\tau$$

und man erhält die Zeit eines Kolbenspiels

$$t = \frac{2b}{w}$$

M' Ist nun für die einfache Saugpumpe M' die Wassermenge, welche während eines Kolbenspiels ausgegossen wird, so muß diese dem jedesmal gehobenen Wasser gleich seyn, vorausgesetzt, daß der Kolben genau in die Röhre paßt und die Ventile sich luft- und wasserdicht verschließen, damit sie kein Wasser fallen lassen. Alsdann ist die **Wassermenge** in der Zeit t bei einer **einfachen** Saugpumpe

$$M' = Ab.$$

M Während einer Minute werde die Wassermenge M ausgegossen und die Anzahl der Kolbenzüge in dieser Zeit sei
m m, so verhält sich

$$M' : M = 1 : m \quad \text{also}$$
$$M = mM' \quad \text{oder}$$
$$M = mAb$$

Ferner verhält sich

$$t : 60 = 1 : m \quad \text{daher}$$
$$m = \frac{60}{t} \quad \text{oder}$$
$$M = \frac{60}{t} Ab = \frac{2b}{t} 30 A; \quad \text{aber}$$
$$w = \frac{2b}{t} \quad \text{folglich}$$

findet man die **Wassermenge**, welche in **jeder Minute** ausläuft, oder

$$M = 30\, wA$$

und bei einem **doppelten** Saugwerke

$$M = 60\, wA.$$

Beispiel. Bei den Abmessungen der einfachen Saugpumpe (215. §.) erhält man die **Wassermenge** für jede Minute

$$M = 30 \cdot \frac{12}{25} \cdot 0{,}442 = 6{,}365 \text{ Kubikfuß.}$$

Anmerk. Während des Kolbenhubs wird zwar nicht die ganze Wassermasse M′ ausgegossen, sondern nur ein Wassercylinder von der Höhe b, dessen Grundfläche A, weniger dem Querschnitte der Kolbenstange ist. Beim Niedergange tritt aber mehr Wasser über den Kolben als in dem Stiefel wegen der Kolbenstange Platz findet, daher bleibt die Wassermenge während eines Kolbenspiels = bA. Nur ist zu bemerken, daß gewöhnlich ein Theil des gehobenen Wassers, wegen Unvollkommenheit der Ventile, wieder zurückfällt, welches man bei gewöhnlichen Pumpen im Durchschnitte dem sechsten Theil der zu hebenden Wassermenge gleich setzen kann.

218. §.

In Absicht der Saugpumpen ist überhaupt noch zu bemerken, daß man die kleinste Geschwindigkeit des Kolbens nicht gern unter $\frac{1}{3}$, und die größte nicht über $2\frac{1}{2}$ Fuß in einer Sekunde annimmt.

Die Größe des Hubs oder b muß man so groß annehmen, als es die übrigen Umstände zulassen wollen, weil bei jedem Niedergange des Kolbens, durch das Stiefelventil einiges Wasser verloren geht, und bei jedem Steigen Kraft erfordert wird, die trägen Massen in Bewegung zu setzen.

Soll die Pumpe gut proportionirt seyn, so ist nöthig, daß der Flächeninhalt a′ von der Oefnung im Stiefelventile eben so groß sei, als der Querschnitt A′ der Saugröhre.

Die Weite der Saugröhre nimmt man am besten so an, daß der Inhalt ihres Querschnitts A, $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ von dem Inhalte des Stiefelquerschnitts A beträgt.

219. §.

Die Pumpenröhren werden sehr häufig aus Holz verfertiget, welches man ausbohrt, und wenn sie einen großen Wasserdruck auszuhalten haben, durch Umlegung eiserner Ringe verstärkt. Oefters macht man die Stiefel von Holz oder Messing, und die Saugröhren von Blei; bei Pumpen, welche beständig betrieben werden, ist es aber rathsam, sämmtliche Röhren von gegossenem Eisen zu ma-

chen und die Stiefel gut ausbohren zu lassen, weil sehr vieles darauf ankommt, daß die Stiefel vollkommen glatt und cylindrisch sind.

Eine vollständige Saugpumpe, wie solche, nach der Beschreibung des Herrn D. Baader, in England von gegossenem Eisen verfertiget wird, ist Figur 10 auf der II. Tafel im Durchschnitte und von zwei Seiten anzusehen gezeichnet; eben diese Art Pumpen sind bei der Saline zu Schönebeck angebracht.

T. II. F. 10.

Haben die Stiefel keine Saugröhre, so daß sich das Stiefelventil im Unterwasser befindet, so verfertigt man sie zuweilen von zweizölligen Bohlen, dergestalt, daß der Querschnitt des Kolbens ein Quadrat gibt, welche Art häufig beim Schleusenbau vorkommt. Man sehe die von Gilly und mir herausgegebene: Praktische Anweisung zur Wasserbaukunst, 2. Heft; Berlin 1803. §. 89. S. 31 u. f.

220. §.

Bei Anordnung der Ventile kommt alles darauf an, daß sie dem Wasser den größtmöglichen Durchgang verstatten und sich beim Niedergange des Kolbens sogleich verschließen. Es gibt ungemein vielerlei Arten die Ventile zu formen, wovon hier die vorzüglichsten beschrieben werden sollen.

Einfache Klappventile (Valvula, *Clapet*), bestehen aus einer Scheibe von Pfundleder, sind mit einer daran befestigten metallnen Platte beschwert und an dem einen Ende, wo an der ledernen Scheibe ein Lappen stehen bleibt, mittelst derselben neben der Ventilöfnung so befestiget, daß sie leicht auf- und zugehen. Bei den gemeinen Pumpen wird die Platte von Blei genommen und mit Nägeln befestiget, sonst aber nimmt man zwei kupferne oder eiserne Platten, wovon die oberste größer und die unterste etwas kleiner als die Ventilöfnung ist; beide Platten werden alsdann durch eine oder mehrere Schrauben mit der ledernen Scheibe verbunden. Man s. Figur 11. Bei diesen Ventilen kommt sehr viel darauf an, daß zu der Scheibe

T. II. F. 11.

gutes Leder genommen werde, welches man dadurch noch verbessert, daß solches vorher in einer heißen Mischung von Talg, Oel und Theer getränkt wird.

Man hat auch Klappventile, welche ganz von Metall und mit einem dergleichen Gewinde versehen sind. Sie haben aber den Nachtheil, daß sich Sand und Unreinigkeiten zwischen das Gewinde setzen, und dadurch das vollkommene und schnelle Verschließen der Oefnung erschweren.

Unter allen Ventilen gewähren die Klappventile die größte Durchflußöfnung, daher sie mit Recht bei einer guten Konstruktion den Vorzug vor andern verdienen.

Doppelte Klappventile bringt man gewöhnlich an, wenn die Pumpenröhre eine beträchtliche Weite hat. Das Ventil hat alsdann zwei Oefnungen, welche beinahe die Gestalt eines Halbkreises haben, und auf dem Zwischenraume dieser Oefnungen, oder dem Steg, werden die Klappen befestiget, wie die Figur 12 näher nachweiset. Die T.II. lederne Scheibe zu beiden Klappen wird kreisrund geschnit- F.12. ten, in der Mitte durchbohrt und befestiget; auch werden, wie bei den einfachen Klappen, auf beiden Seiten metallne halbkreisförmige Platten befestiget.

Ventile mit vielen runden Oefnungen taugen nichts, weil sie wegen der Contraction und Verengung das Durchlaufen des Wassers erschweren.

Balancirventile werden ganz aus Metall verfertiget und durch einen hohlen Deckel, welcher zwei Zapfen hat, und an den entgegengesetzten Enden der kreisrunden Oefnungen befestiget ist, verschlossen. Die Linie durch die Mitte beider Zapfen geht aber nicht durch den Mittelpunkt der Oefnung, sondern weicht $\frac{1}{12}$ desselben davon ab, damit die eine größte Hälfte des Deckels durch ihr Uebergewicht die eine Oefnung von oben, und die kleinere Hälfte, die Oefnung von unten verschließt. Fig. 13. Dieses Ven- T.II. til ist, wenn von unten kein Wasser dagegen preßt, immer F.13. durch sein eigenes Uebergewicht verschlossen, und man hat nur dafür zu sorgen, daß es beim Oefnen, nicht nach der entgegengesetzten Seite überschlage, welches durch Anbrin-

gung einiger Zapfen verhindert werden kann. Belidor hat diese Ventile zuerst bekannt gemacht *), nur lassen sie sich nicht gut da anbringen, wo die Bewegung des Wassers sehr schnell ist, weil durch den Druck des Wassers gegen die kleinere Hälfte des Ventils, eine beträchtliche Verzögerung bei der Eröfnung entstehet.

Muschelventile (*Soupape à coquille*), bestehen ebenfalls ganz aus Metall und haben eine solche Einrichtung, daß die nach oben konisch erweiterte Oefnung durch einen hohlen Deckel, welcher in die Oefnung genau paßt und eingerieben ist, und sich dabei vertikal auf- und niederbewegen kann, verschlossen wird, wie solches die Abbildung
T. II. Fig. 14 näher nachweiset. Sie erfordern, daß die Oefnung,
F. 14. welche zum Durchfließen des Wassers übrig bleibt, so groß genommen werde, als der Raum ist, der sich bei geöfnetem Ventile zwischen dem Teller und der Stiefelwand befindet. Hieraus folgt, daß diese Durchflußöfnung nie halb so groß als die Weite des Stiefels seyn kann. Gewöhnlich nimmt man, wenn D der Durchmesser des Stiefels oder der Röhre ist, den mittlern Durchmesser der Muschel $= D\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Um den Muschelventilen, da sie in Absicht der Dauer den Klappventilen vorzuziehen sind, auch die Vortheile derselben wegen der großen Durchflußöfnung zu geben, dürfte man nur den Stiefel unterhalb so viel erweitern, daß die Ventilöfnung dem Querschnitte der Saugröhre beinahe gleich wäre; auch kann man dem Stege eine größere Länge geben, so daß er bis an beide Stiefelwände reicht, wodurch eine größere Einflußöfnung entstehet. Die größte Höhe, auf welche das Muschelventil steigen kann, muß ebenfalls so proportionirt werden, daß hinlänglicher Raum zum Durchfließen des Wassers entstehe.

---

*) *Belidor*, Architectura hydraulica. 1. Theil. III. Buch 5. Kap. 1133. §. u. f.

Kegelventile (*Soupape conique*), sind wie die Muschelventile gestaltet, außer daß der Deckel viel höher und oberhalb verschlossen ist. Sie verengen den Durchfluß des Wassers noch mehr wie die Muschelventile.

Kugelventile (*Soupape sphérique*), haben anstatt des Deckels eine auf der Oefnung lose liegende Kugel. Man sieht aber leicht ein, daß hiedurch der Raum zum Durchfließen des Wassers noch mehr wie bei den Kegelventilen verengt wird, daß es sehr schwer ist die Kugel und Oefnung genau abzudrehen und noch schwerer, der Kugel das erforderliche Gewicht zu geben.

Die Art, wie die Ventile befestiget werden, ist verschieden. Zuweilen werden sie mittelst Schrauben zwischen der Saugröhre und dem Stiefel angebracht, wie Figur 11 bis 14; weil aber öfters Reperaturen an den Ventilen vorfallen, so hat dieses die Unbequemlichkeit, daß man, um zu denselben zu gelangen, jedesmal die Saugröhre oder den Stiefel abnehmen muß. Dieses zu vermeiden, werden die Ventile zuweilen in besondern kurzen Röhren nach Art der Kolben angebracht und oben mit einem eisernen Reifen versehen, damit man sie, wenn die Kolbenstange herausgenommen ist, aufziehen und ausbessern könne. Vorzüglich bei den englischen Pumpen werden eigene **Ventilthüren** angebracht, deren Konstruktion man aus der Figur 10 sehen kann, wo alsdann auch, ohne den Kolben abzunehmen, die Ventile ausgenommen und eingesetzt werden können.

T. II. F. 11 – 14.

T. II. F. 10.

221. §.

Die **Kolben** zu den Saugpumpen sind eben so mannichfaltig wie die Ventile. Es kommt bei denselben nicht allein darauf an, daß sie vollkommen genau an den Stielwänden anschließen, keine Luft und kein Wasser durchlassen, sondern sie müssen auch leicht beweglich und in der Mitte mit einer möglichst großen Oefnung versehen seyn, welche beim Aufziehen des Kolbens durch eine Klappe verschlossen wird, und dem Wasser keinen Zurückfluß verstattet. Am besten ist es, das Gerippe derselben oder den Kol-

benstock (*Corps du piston*) von Metall zu nehmen. Oefters wird er aber von eichen oder besser von weißbüchen Holz angefertigt, welches vorher in Oel gekocht wird. Ein solcher hölzerner Kolben mit einer Durchflußöfnung und einer gewöhnlichen einfachen Klappe, ist Fig. 15 abgebildet. Oberhalb ist um denselben ein Streifen Wallroßleder befestiget, welches überstehen muß, damit es beim Aufziehen des Kolbens von dem Wasser gegen die Stiefelwände gepreßt werde. Um dieses Leder wird ein von innen abgeschrägter eiserner oder besser ein kupferner Ring getrieben, der genau in den Stiefel paßt, so wie auch unterhalb des Kolbens ein solcher Ring umgelegt wird, damit der Kolben nicht leicht auseinander reißen könne. Um die Grundfläche des Kolbens wird eine eiserne Scheibe gelegt, und zwischen beiden Ringen die Vertiefung mit umgewickeltem Hanf ausgefüllt.

Den Durchschnitt eines hölzernen Kolbens mit doppelten Oefnungen und Klappen, welcher bei weiten Stiefeln
T.II. angebracht werden kann, sehe man Figur 16, wo der
F.16. Steg oder die Mitte zwischen beiden Oefnungen durchbohrt ist, damit ein eiserner Bolzen zur Befestigung der Kolbenstangen durchgesteckt und angeschraubt werden könne. Man kann auch dergleichen Kolben von Blei anfertigen, in welchem Falle die Durchflußöfnung noch größer angenommen werden kann.

Von den englischen aus Eisen gegossenen Kolben mit
T.II. doppelten Klappen, zeigt Figur 17 eine Abbildung.
F.17.

Noch eine Art metallner Kolben mit Muschelventil, bei welchen kein Leder, sondern nur Hanf umgewunden ist,
T.II. stellt Figur 18 dar. Man kann diese Kolben aber nur in
F.18. metallnen Stiefeln gebrauchen, in welche sie mit ihrem untern vorspringenden Theile, sehr genau passen müssen und eingerieben werden. Ueber dem Hanfe ist ein metallner Ring, der ebenfalls genau in den Stiefel paßt, und wenn der Hanf abgenutzt oder lose geworden ist, mittelst Anziehung einer Schraubenmutter zusammengepreßt werden kann;

ohne daß man jedesmal nöthig hätte, neuen Hanf umzulegen.

222. §.

Außer den vorhin beschriebenen gewöhnlichen Einrichtungen der Saugpumpen, kann man dieselben auch noch so anordnen, daß der Stiefel AB Figur 19 im Unterwasser stehet, die Saugröhre ganz wegfällt und nur eine Aufsatzröhre BG, welche etwas von der Seite gebogen ist, erfordert wird. Man nennt dies eine verkehrte Saugpumpe (*Pompe soulevante*). Zur Bewegung des Kolbens ist alsdann eine kurze Kolbenstange CD, welche an dem Gatter (*Chassis*) ED befestiget ist, hinreichend, und dieses Gatter wird mittelst der Zugstange EF bewegt. Diese Einrichtung hat den Vortheil, daß die Zugstange nicht in dem Wasser der Aufsatzröhre sich bewegen darf. T. II. F. 19.

Der Kolben erhält, wie es aus der Figur deutlich ist, seine Ventilklappe am entgegengesetzten Ende und das Stiefelventil befindet sich oberhalb des Stiefels.

Die vorzüglichsten Schriften über die Theorie und Einrichtung der Pumpen sind am Ende des achtzehnten Kapitels angeführt.

Siebzehntes Kapitel.

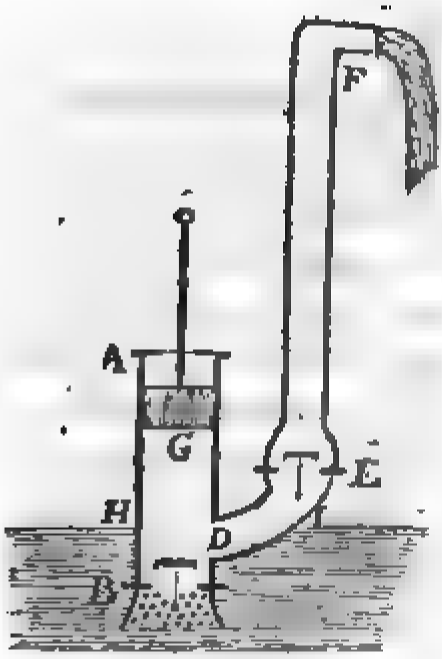
Von den Druckpumpen.

---

223. §.

Die Druckpumpe (Antlia compressoria, *Pompe refoulante*) unterscheidet sich von der Saugpumpe dadurch, daß bei ihr nicht sowohl das Wasser durch den Druck der Atmosphäre, als vielmehr durch den Druck des Kolbens zum Steigen gebracht wird, und daß dieser Kolben nicht wie bei den Saugpumpen durchbohrt, sondern massiv ist.

Die wesentlichen Theile einer Druckpumpe bestehen aus dem Stiefel (Modiolus, *Corps du pompe*) AB, in welchem sich der Druckkolben (Embolus masculi, *Piston*) G bewegt. Am Ende des Stiefels bei B ist das Stiefelventil, gewöhnlich unter der Oberfläche HI des Unterwassers angebracht. Ueber dem Stiefelventile geht das Knie- oder Gurgelröhr (Fistula versurae) DE von dem Stiefel ab, über welchem die Steigröhre (Tuba, *Tuyau montant*) EF befestigt ist. Das Gurgelventil, welches sich nach der Steigröhre zu öfnet, befindet sich entweder unfern des Stiefels in der Gurgelröhre in einer schiefen Lage, da es alsdann mit einer Klappe versehen werden muß, oder besser, wie es hier gezeichnet ist, gleich über der Gurgelröhre in einer horizontalen Lage.



Aus dieser Einrichtung ist leicht einzusehen, wie das Wasser zum Steigen und Auslaufen bei dem Ausgusse (Fusorium, *Gargouille*) F gebracht werden kann. Denn indem der Kolben in die Höhe gezogen wird, so folgt ihm das Unterwasser, wegen des Drucks der Atmosphäre, in den Stiefel nach, und wenn der Kolben wieder herunter gestoßen wird, so verschließt sich das Stiefelventil, das Gurgelventil wird von dem Drucke des Wassers aufgestoßen, und es tritt in die Steigröhre. Hieraus ergibt sich, wenn Kraft genug vorhanden ist, daß die Steigröhre jede Länge erhalten kann, ohne daß, wie bei den Saugröhren, eine gewisse Grenze nicht überschritten werden dürfte.

224. §.

Wenn die Höhe des Ausgusses über das Unterwasser = H und die Grundfläche des Kolbens oder der Querschnitt

des Stiefels $= A$ gesetzt wird, so ist im Zustande des Gleichgewichts, die hydrostatische Last des Wassers, wenn sich der Kolben in seinem niedrigsten Stande befindet, dem Gewichte einer Wassersäule von dem Inhalte $A \cdot H$ gleich, daher die Kraft für das Gleichgewicht

$$= A \cdot H \cdot \gamma.$$

Die Friktion zwischen dem Kolben und Stiefel kann nach 212. §. bestimmt werden, daher findet man die Höhe der Wassersäule, welche der Friktion gleichgeltend und deren Grundfläche der Querschnitt des Stiefels ist, oder

$$f = (0{,}1 \pm) \frac{H}{D}$$

wo D den Durchmesser des Stiefels bezeichnet.

225. §.

Die Kraft, welche wegen des Widerstandes des Wassers an den Wänden und beim Durchgange durch die Ventilöfnungen erfordert wird, kann eben so wie 215. §. bei den Saugpumpen bestimmt werden, und man kann den Widerstand, welcher wegen der Krümmung der Gurgelröhre entstehet, außer Acht lassen, da derselbe bei einer hinlänglich weiten Röhre nur geringe seyn wird, um so mehr, weil die Unsicherheit bei Beistimmung der Friktion und anderer Hindernisse, doch keine allzugenaue Rechnung zuläßt.

Bezeichnet

A den Querschnitt, L die Länge *) und D den Durchmesser des Stiefels,

A' den Querschnitt, L' die Länge und D' den Durchmesser des Gurgelrohrs,

A'' den Querschnitt, L'' die Länge und D'' den Durchmesser der Steigröhre,

a' den Inhalt der Oefnung am Stiefelventile, und

a'' den Inhalt der Oefnung am Gurgelventile;

*) Die Länge des Stiefels wird hier nur vom höchsten Kolbenstande bis zur Mitte der Mündung des Gurgelrohrs gerechnet.

ist ferner die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens $= w$
und

H' die hydraulische Widerstandshöhe beim Niedergange des Kolbens,

so muß das Wasser im Stiefel beinahe den Weg L durchlaufen, welche größere Länge um so mehr angenommen werden kann, weil der Widerstand, wegen Krümmung der Gurgelröhre, der Kürze wegen, nicht in Rechnung kommt. Nach 154 und 157. §. findet man, wenn die nöthigen Abänderungen vorgenommen werden, die Widerstandshöhe

$$H' =$$
$$w^2 \Big\{ 0{,}0243 \left(\frac{A}{A'}\right)^2 + 0{,}0417 \left(\frac{A}{a''}\right)^2 - 0{,}0234 \left(\frac{A}{A}\right)^2 - 0{,}0417 \left(\frac{A}{A'}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2006} \left[\left(\frac{A}{A}\right)^2 \frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2 \frac{L''}{D''} \right] - \frac{1}{4g} \Big\}$$

oder

$$H' = w^2 \Big[0{,}0417 \left(\frac{A}{a''}\right)^2 - 0{,}0174 \left(\frac{A}{A'}\right)^2 - 0{,}0403$$
$$+ \frac{1}{2006} \left(\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2 \frac{L''}{D''} \right) \Big]$$

oder wenn man die Größe in der Parenthese, welche mit w^2 multiplizirt ist $= \left(B - \frac{1}{4g}\right)$ setzt (157. §.)

$$H' = w^2 \left(B - \frac{1}{4g}\right)$$

226. §.

Ist der Kolben in seinem höchsten Stande um die Höhe b' von dem Unterwasser entfernt, so ist $k - b'$ die kleinste Druckhöhe, welche zur Erzeugung der Geschwindigkeit des Wassers, mit welcher es in den Stiefel steigt, verwandt werden kann. Es ist daher auf eine ähnliche Art wie 213. §. die größte Geschwindigkeit des Kolbens

$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{b\,(k - b')}{2BL}\right]}$$

oder weil hier

$$B = 0{,}0417 \left(\frac{A}{a'}\right)^2 + \frac{L}{2006\,D}$$

so wird erfordert, damit das unter dem Kolben befindliche Wasser sich nicht von demselben trenne, daß die mitt-

lere Geschwindigkeit des Druckkolbens nicht größer als

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{h\,(k-b')}{2\,L\left[0{,}0417\left(\frac{A}{a'}\right)^2+\frac{L}{2006\,D}\right]}\right]}$$

angenommen werde.

227. §.

Bei jedem Niedergange des Kolbens muß die Wassermasse in den Pumpenröhren von neuem in Bewegung gesetzt werden, wozu wegen der trägen Masse Kraft erfordert wird. Setzt man, daß

- b die Höhe des Kolbenhubs,
- τ die Zeit eines Kolbenhubs,
- P die gesammte Kraft, mit welcher die Kolbenstange herunter gestoßen wird,
- R den gesammten hydrostatischen, hydraulischen und Reibungswiderstand, welcher die Bewegung des Kolbens verhindert, und
- N die sämmtliche Masse des zu bewegenden Wassers auf den Kolben reduzirt

bezeichne, so erhält man auf eine ähnliche Art wie 214. §.

$$P = R + \frac{b\,N}{g\,\tau^2}$$

wo $\frac{b\,N}{g\,\tau^2}$ der mechanische Widerstand ist.

Nun findet man (61. §.) das Moment der Trägheit für das Wasser

in dem Stiefel	$w^2 \,.\, L\,A$
in dem Gurgelrohr	$\left(\frac{A\,w}{A'}\right)^2 .\, L'\,A'$
in der Steigröhre	$\left(\frac{A\,w}{A''}\right)^2 .\, L''\,A''$

Sollen diese Massen der Masse N, welche an dem Kolben mit der Geschwindigkeit w bewegt wird, gleichgültig seyn, so wird erfordert (61. §.), daß

$$w^2\,N = \left[w^2\,L\,A + \left(\frac{A\,w}{A'}\right)^2 L'\,A' + \left(\frac{A\,w}{A''}\right)^2 L''\,A''\right]\gamma$$

$$\text{oder } N = A\left[L + \frac{A}{A'}\,L' + \frac{A}{A''}\,L''\right]\gamma \text{ sei.}$$

Es ist daher

$$P = R + \frac{Ab}{g\tau^2}\left[L + \frac{A}{A'}L' + \frac{A}{A''}L''\right]\gamma.$$

oder wenn man

$$\frac{b}{g\tau^2}\left[L + \frac{A}{A'}L' + \frac{A}{A''}L''\right] = T$$

setzt, so wird

$$P = R + \gamma \cdot A \cdot T.$$

228. §.

Nimmt man die vorhergegangenen Bestimmungen zusammen, so findet man die Höhe der Wassersäule über der Grundfläche des Kolbens, deren Gewicht zum Niederdrücken des Kolbens verwendet werden muß,

$$= H + H' + f + T$$

und die Kraft zum Niederdrücken,

$$P = \gamma A\,[H + H' + T + f]$$

dabei ist die Höhe des hydrostatischen Widerstandes, oder die lothrechte Entfernung des Unterwassers vom Ausgusse $= H$.

Die Höhe des hydraulischen Widerstandes

$$H' = w^2\left[0{,}0417\left(\frac{A}{a''}\right)^2 - 0{,}0174\left(\frac{A}{A'}\right)^2 - 0{,}0403 + \frac{1}{2000}\left(\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2\frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2\frac{L''}{D''}\right)\right].$$

Die Höhe des mechanischen Widerstandes

$$T = \frac{b}{g\tau^2}\left[L + \frac{A}{A'}L' + \frac{A}{A''}L''\right]$$

Die Höhe des Reibungswiderstandes

$$f = (0{,}1 \pm)\,\frac{H}{D}$$

woraus man die Regel ziehet, daß, alles übrige gleich gesetzt, die Kraft bei der Druckpumpe desto kleiner seyn kann, je kürzer und weiter die Gurgel- und Steigröhren, und je größer die Ventilöfnungen sind.

229. §.

Soll der Kolben aufwärts gezogen werden, so ist im höchsten Punkte desselben, die hydrostatische Widerstandshöhe (210. §.)

$$= b'$$

Die Druckhöhe zur Ueberwältigung des hydraulischen Widerstandes und zur Hervorbringung der Geschwindigkeit w

$$H'' = w^2 \left[0{,}0417 \left(\frac{A}{a\gamma}\right)^2 + \frac{L}{2006 \cdot D} \right]$$

die Höhe des Reibungswiderstandes

$$f = (0{,}1 \pm) \frac{L}{D}$$

und weil hier der mechanische Widerstand unbeträchtlich ist, so erhält man, wenn

P' die Kraft zum Aufziehen des Kolbens bezeichnet,

die gleichgeltende Wasserhöhe auf der Grundfläche des Kolbens

$$= b' + H'' + f$$

und die Kraft zum Aufziehen des Kolbens

$$P' = \gamma A \, [b' + H'' + f].$$

230. §.

Die Druckpumpen werden gewöhnlich paarweise von gleichen Abmessungen angelegt, da man dann zwei zusammengehörige Pumpen, von welchen der eine Kolben aufgezogen wird, wenn der andere heruntergehet, ein doppeltes Druckwerk nennt. Sie erhalten eine gemeinschaftliche Steigröhre, mit der sie durch die Gurgelröhren vereiniget sind.

Die fortwährend erforderliche Kraft zur Bewegung der Kolben beim doppelten Druckwerke ist

$$P + P'$$

und wenn man die Zeit t eines Kolbenspiels $= 2\tau$ setzt, so wird

$$t = \frac{2\,b}{w}$$

M′ Es sei bei dem einfachen Druckwerke M′ die Wassermenge, welche während der Zeit eines Kolbenspiels gehoben wird, so ist

$$M' = A \,.\, b$$

M und wenn während einer Minute, die Wassermenge M ausgegossen und die Anzahl der Kolbenzüge in dieser Zeit $= m$
m ist, so erhält man, wie 217. §., die Wassermenge für jede Minute bei dem einfachen Druckwerke

$$M = 30\, w A$$

und bei dem doppelten Druckwerke

$$M = 60\, w A.$$

Beispiel. Für $w = 2$ Fuß und $A = \frac{5}{6}$ □ Fuß, ist die Wassermenge bei einem einfachen Druckwerke in jeder Minute

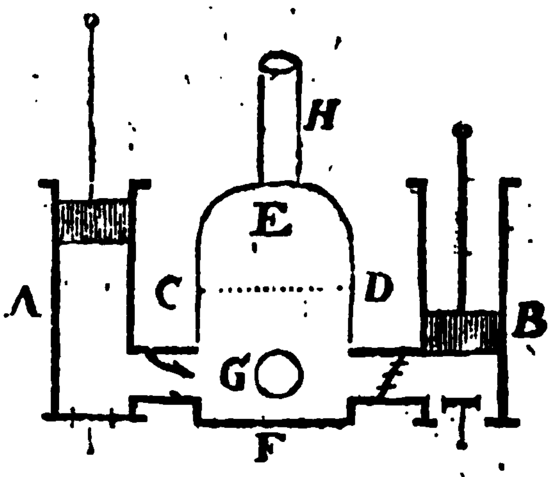
$$M = 30 \,.\, 2 \,.\, \tfrac{5}{6} = 50 \text{ Kubikfuß}.$$

231. §.

Bei einem doppelten Druckwerke mit gemeinschaftlicher Steigröhre, bleibt zwar das Wasser derselben in beständiger Bewegung, weil allemal, wenn der eine Kolben aufwärts geht, der andere Wasser in die Steigröhre preßt. Nur in dem Augenblicke, wenn die Kolben eine entgegengesetzte Bewegung annehmen, wird kein Wasser fortgedrückt, und das Wasser in der Steigröhre würde zum augenblicklichen Stillstande kommen, wenn es nicht wegen seines Beharrungsvermögens die Bewegung fortsetzte. Es ist daher in diesem Falle die Höhe für den mechanischen Widerstand geringer, also P kleiner; man wird aber nicht viel fehlen, wenn P etwas zu groß in Rechnung gebracht wird.

Um aber sowohl bei den einfachen als auch bei den doppelten Druckpumpen, ein gleichförmiges Fortströmen des Wassers zu bewirken, müßte man eine Kraft anbringen, die, wenn der Druck der Kolben aufhört, gegen das Wasser in der Steigröhre preßt. Dieses geschieht durch den Windkessel (Catinum, *Réservoir d'air*, *Récipient*), welcher mit den Stiefeln in Verbindung gesetzt wird. Wenn bei einem doppelten Druckwerke, A, B die beiden Stiefel

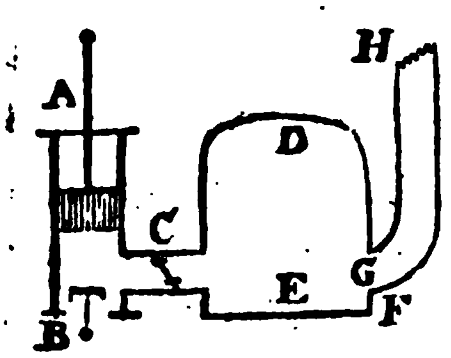
sind, und man verbindet mit denselben durch die Kropf- oder Verbindungsröhren C und D, ein vollkommen



luft- und wasserdichtes Gefäße EF, welches man gewöhnlich eben so hoch wie die Stiefel und doppelt so weit macht, so heißt EF der Windkessel, von welchem bei G die Steigröhre GH abgeht. An oder in den Verbindungsröhren befinden sich Ventile, die sich gegen den Windkessel öfnen.

Steigt nun der Kolben B in die Höhe, so wird der Stiefel B mit Wasser angefüllt und das Kropfventil D bleibt verschlossen. Wenn hingegen der Kolben A heruntergedrückt wird, und der Stiefel A ist voll Wasser, so bleibt das Stiefelventil geschlossen, das Kropfventil wird aufgestoßen und das Wasser tritt in den Windkessel, woselbst es die oberhalb bei E befindliche Luft zusammen preßt und zum Theil durch die Oefnung bei G in die Steigröhre geht. Läßt irgend einen Augenblick der Druck der Kolben nach, so fährt die zusammengepreßte Luft im Windkessel fort, auf das Wasser zu drücken und es bleibt im Steigen.

Auf eine ähnliche Art kann durch Anbringung eines Windkessels bei einer einfachen Druckpumpe, ein fortwährendes Steigen des Wassers bewirkt werden. Der



Windkessel DE, welcher etwa drei bis viermal so weit und eben so hoch wie der Stiefel AB ist, wird durch die Verbindungsröhre C mit dem Stiefel vereinigt, und an einer Seite des Kessels geht die Steigröhre FH in die Höhe, da man sich dann den Erfolg eben so wie bei dem doppelten Druckwerke erklären kann.

Wenn nun bei einfachen und doppelten Druckwerken, die Wassersäule in der Steigröhre in fortwährender Bewegung bleibt, und wenn man überdies dafür sorgt, daß beim

Austritte des Wassers aus dem Windkessel in die Steigröhre, die Einflußöfnung G keine scharfe Kante hat, sondern sich allmählich verengt, so findet daselbst beinahe keine Contraction Statt, und die Höhe wegen des mechanischen Widerstandes (227. §.) wird

$$T = \frac{b}{g r^2} \left[L + \frac{A}{A'} L' \right]$$

wo alsdann

A' den Querschnitt, und

L' die Länge der Verbindungsröhre bezeichnet.

Auch bei den Saugpumpen läßt sich mit Vortheil ein Windkessel über der Saugröhre anbringen, da dann das Wasser aus demselben mittelst einer Verbindungsröhre in den Stiefel unter den Saugkolben tritt, nur muß sich noch ein Ventil an der Verbindungsröhre befinden, welches sich nach dem Stiefel öfnet.

232. §.

Dasjenige, was von den Ventilen bei den Saugpumpen gesagt worden, gilt unter ähnlichen Umständen von den Druckpumpen. Da die Kolben keine Ventile haben, sondern ganz massiv sind, so dürfen sie zwar nicht so künstlich seyn, sie müssen aber vorzüglich genau an die Stiefel schließen, weil sonst bei dem großen Drucke, welchen die Kolben leiden, das Wasser leicht über sie tritt. Es werden daher auch die Stiefel zu den Druckwerken gewöhnlich von Metall verfertiget und gut ausgebohrt.

Man hatte sonst die Kolben von übereinander gelegten und mittelst zweier Metallplatten zusammengepreßten pfundledernen Scheiben verfertiget; diese Art hat aber den Nachtheil, daß, wenn sie neu sind, die Friktion außerordentlich groß ist, und sobald sie sich nur etwas abnutzen, tritt das Wasser über dieselben.

T. III. F. 20. Eine bessere Art von Druckkolben findet man Figur 20 abgebildet. Der mittelste Körper oder Kolbenstock wird aus recht hartem Holze, oder besser aus Blei, etwa zwei Zoll hoch verfertiget. Auf beiden Seiten sind Fugen von

der Dicke des umzulegenden Leders schräg eingedreht, in dieselben das Leder gesteckt und mit Nägeln befestiget. Auf beiden Seiten des Kolbenstocks werden zwischen dem Leder Scheiben von Korkholz eingepreßt, auf welche wieder metallne Scheiben kommen, die mittelst der Schraubenmutter des durchgehenden Bolzens zusammengepreßt werden, und so den ganzen Kolben verbinden. Man kann auch zu mehrerer Befestigung des Leders, außerhalb des Kolbens, dünne kupferne Ringe auftreiben.

Die Kolben können auch aus Metall verfertiget und mit Hanf umwunden werden, wobei man eine solche Einrichtung anbringen kann, daß, wenn der Hanf locker wird, derselbe durch Anschraubung des obern Ringes oder Deckels, Figur 21, zusammengepreßt wird. Auch haben diese Kolben den Vorzug, daß das Gelenke der Kolbenstange in die Mitte des Kolbens kömmt, welches bei Feuerspritzen, wo diese Stangen kurz sind, und sich merklich von der vertikalen Lage entfernen, nicht gleichgültig ist. Sie erfordern gut ausgebohrte Stiefel, und die äußern metallnen Ränder müssen in dieselben eingerieben werden. T. III. F. 21.

Bei vollkommen gut polirten metallnen Stiefeln kann man auch die Kolben ganz massiv, ohne Hanf oder Leder machen.

Achtzehntes Kapitel.

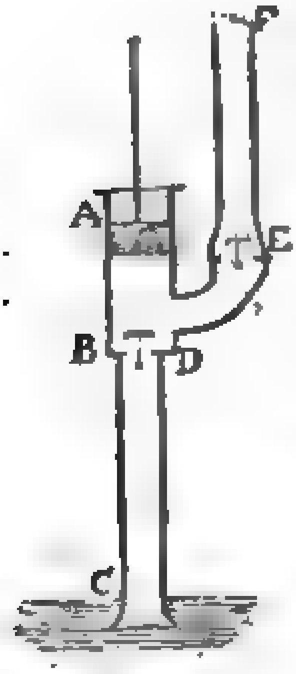
Von den vereinigten Saug- und Druckpumpen.

---

233. §.

Wird bei einer Pumpe das Wasser sowohl durch den Druck der Atmosphäre in einer besondern Saugröhre, und zugleich durch den Druck des Kolbens gehoben, so entstehet ein vereinigtes Saug- und Druckwerk (Antlia

suctoria simul et compressoria, *Pompe mixte*), dessen Zusammensetzung die nebenstehende Figur hinlänglich erläutert. AB ist der Stiefel, BC die Saugröhre, DE das Gurgelrohr und EF ein Theil der Steigröhre. Es läßt sich auch die Bewegung des Kolbens in entgegengesetzter Richtung anbringen, alsdann muß die Kolbenstange mittelst eines Gatters bewegt werden. Man sieht auch leicht, daß sich bei den vereinigten Saug- und Druckwerken eben so wie bei den Druckwerken, zwischen dem Stiefel und der Steigröhre ein Windkessel anbringen läßt, um eine gleichförmigere Bewegung des Wassers in der Steigröhre zu bewirken.



234. §.

Nimmt man dasjenige zusammen, was in den beiden vorhergehenden Kapiteln von dem Widerstande bei Saug- und Druckpumpen gelehrt ist, so läßt sich daraus leicht die Kraft zur Bewegung des Kolbens bei den vereinigten Saug- und Druckwerken bestimmen. Eben so leicht ist es, nach den dortigen Sätzen die Wassermenge zu finden, welche in jeder Minute gehoben wird.

Noch wird es nicht undienlich seyn, ein von de la Hire angegebenes Pumpenwerk (Mémoire pour la construction d'une pompe qui fournit continuellement de l'eau dans le reservoir. Mém. de l'acad. de Paris, année 1716. Edit. Bat. p. 408 etc.) zu beschreiben, welches beim Auf- und Niedergange des Kolbens Wasser hebt. Mit dem Druck-

stiefel AB ist die Saugröhre CDH und Steigröhre EFG, jede mittelst zweier Ventile in C, D und E, F so verbunden, daß sich die Saugröhrenventile C, D gegen den Stiefel, die Steigröhrventile E, F gegen die Steigröhre öfnen. Der massive Kolben geht in dem, außer den Ventilöfnungen, von allen Seiten geschlossenen Stiefel, und die Kolbenstange geht bei A so durch den Deckel, daß der Stiefel (wie bei den neuen Dampfmaschinen) luft- und wasserdicht verschlossen bleibt. Geht der Kolben in die Höhe, so öfnen sich die Ventile D und E; das Wasser aus der Saugröhre tritt unter den Kolben, und das Wasser über dem Kolben, wird in die Steigröhre getrieben. Geht der Kolben niederwärts, so öfnen sich die Ventile C und F, das Wasser aus der Saugröhre tritt über den Kolben, und durch das Ventil F wird das Wasser unter dem Kolben in die Steigröhre getrieben.

Erhebliche Schriften, in welchen man Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Pumpen findet, sind nachstehende:

Discussion plus particulière des diverses manières d'élever de l'eau par le moyen des pompes avec le plus grand avantage, par L. *Euler*. Mém. de l'acad. de Berlin 1752. p. 149.

Maximes pour arranger le plus avantageusement les machines destinées à élever de l'eau par le moyen des pompes, par L. *Euler*. Mém. de l'acad. de Berlin 1752. p. 185.

De Borda, Mémoire sur les pompes. Mém. de l'acad. des sciences de Paris. Année 1768. p. 418. édit. Paris.

W. J. G. Karsten, Lehrbegrif der gesammten Mathematik. 5. Th. Greifswalde 1770; der XVII — XXIX. Abschnitt.

W. J. G. Karsten, Abhandlung über die vortheilhafteste Anordnung der Feuerspritzen. Greifswalde 1773.

G. S. Klügel, Abhandlung von der besten Einrichtung der Feuerspritzen. Berlin 1774.

Du Buat, angef. Hydraulique, (1786) Part. I. Sect. IV. Chap. 8.

K. C. Langsdorf, Versuch einer neuen Theorie hydrodynamischer und pyrometrischer Grundlehren. Frankf. und Leipzig 1787; das 7te, 8te und 9te Kap.

Langsdorf, angef. Hydraulik (1794) 22stes bis 27stes Kapitel.

Langsdorf, angef. Maschinenlehre (1797). I. Band, 2ter Theil. 12tes und 13tes Kapitel; und II. Band (1799) 7te Abhandlung.

A. G. Kästner, Anfangsgründe der Hydrodynamik. Zweite vermehrte Auflage. Göttingen 1797. 668—748 §.

D. J. Baader, vollständige Theorie der Saug- und Hebepumpen und Grundsätze zu ihrer vortheilhaften Anordnung. Bayreuth 1797.

Vorzüglich über den Bau und die Anlagen der Pumpen findet man in folgenden Schriften Nachricht:

J. Leupold, Theatrum machinarum hydraulicarum. Tom. I. Leipz. 1724. Cap. XII. u. Tom. II. 1725. Cap. III—VIII u. X.

H. Calvör, historisch-chronologische Nachricht und Beschreibung des Maschinenwesens bei dem Bergbau auf dem Oberharz. I. Theil. Braunschweig 1763. II. Kap. 2ter Abschnitt.

Belidor, angef. Architectura hydraulica. I. Theil. 3tes und 4tes Buch.

D. J. Baader, angeführte Theorie der Saug- und Hebepumpen.

Neunzehntes Kapitel.

Von der Wassersäulenmaschine.

---

235. §.

Wenn ein beträchtliches Gefälle und hinreichendes Wasser vorhanden ist, so kann solches benutzt werden, um Wasser aus einer noch größern Tiefe heraus zu heben. Ist AB
T. III. (Figur 22) eine Fallröhre durch welche mittelst der
F. 22. Kommunikations- oder Gurgelröhre BD, Wasser

in den Stiefel DE gelassen werden kann, so wird dadurch der Druckkolben F und mit ihm die Kolbenstange G gehoben. Sind nun mit der Kolbenstange G, die Kolben und Schachtstangen H tiefer liegender Pumpen verbunden, so können solche ebenfalls mit in die Höhe gehoben werden. Hat der Kolben F seinen höchsten Stand erreicht, und man verschließt mittelst der Wendungspippe C durch Umdrehung des Kreuzhahns (Calix, *Robinet*) die Fallröhre, so kann das Wasser in derselben nicht ferner auf den Kolben drücken, und wenn zu gleicher Zeit das Wasser aus dem Stiefel durch die Wendungspippe aus dem Abflußrohr I wegfließt, so wird der Kolben nebst Stangen wieder sinken. Eine solche Anordnung, wo mittelst einer Fallröhre, ein Druckkolben die Bewegung anderer Pumpenstangen bewirke, nennt man eine Wassersäulenmaschine.

Hier kann nur so viel von derselben erklärt werden, als zur hydraulischen Beurtheilung erfordert wird; das übrige, besonders die Steurung oder die Art, wie durch die Maschine selbst, der Kreuzhahn geöfnet und verschlossen wird, gehört in die Maschinenlehre, wo von dieser Erfindung des Herrn J. C. Höll mehr gesagt werden kann.

Damit durch das Aufsteigen der Kolbenstange FG die ansehnliche Last der übrigen Schacht- und Kolbenstangen in die Höhe gehoben werden könne, kommt man dem Drucke des Wassers gegen den Kolben F dadurch zu Hülfe, daß die Kolbenstange FG mittelst einer Kette GK an den Wagebaum oder Balancir KM befestiget ist, welcher durch ein Gegengewicht, das aus einem Steinkasten N bestehen kann, beinahe mit der Last ins Gleichgewicht gebracht werden kann. Der Kolben F hat alsdann beim Steigen das Uebergewicht der Last zu heben, da er dann eben durch dieses Uebergewicht wieder herunter gedrückt wird.

Außer der Wendungspippe ist bei Q in dem Fallrohre noch ein Hahn, zur Anlassung oder Sperrung der Maschine.

Die Wendungspippe C bestehet aus dem Pippengehäuse, welches kegelförmig abgedreht ist und drei Oef-

T.III. F.23. nungen hat, wovon die eine B (Fig. 23) nach der Fallröhre, D nach dem Stiefel und I nach dem Abflußrohre geht. Im Pippengehäuse ist der durchbohrte Kegel, Kreuz- oder Wendungshahn gleichfalls mit drei eben so großen Oefnungen, die auf die vorigen genau passen, eben so groß sind und untereinander zusammenhängen. Wird nun der Wendungshahn so gedreht, daß die beiden Oefnungen b, d desselben, gegen B, D kommen (Fig. 23) und daß i der Oefnung I gerade entgegen stehet, so wird dadurch die Kommunikation zwischen der Fallröhre und dem Stiefel
F.24. bewirkt; wenn aber die Oefnung d gegen I (Fig. 24) und i gegen D gebracht wird, so ist die Verbindung zwischen Fallrohr und Stiefel unterbrochen; dagegen kann das Wasser aus dem Stiefel durch das Abflußrohr I fortfließen und mit dem aus der Tiefe oder dem Sumpfe gehobenen Wasser bei P abgeführt werden.

Um zu verhindern, daß nicht mehr Wasser durch das Abflußrohr wegfließt, als der Druckkolben zum Heruntergehen Raum erfordert, und damit zwischen der Wendungspippe und dem Kolben in seinem tiefsten Stande die Röhre nicht wasserleer werde, so darf man nur die Ausflußöfnung des Abflußrohrs nach dem Vorschlage des Herrn Langsdorf so anlegen, daß solche mit dem niedrigsten Stande des Kolbens gleich hoch liege. In der Zeichnung Figur 22 konnte dies nicht angezeigt werden, weil dadurch die Deutlichkeit verloren ging.

236. §.

Die Kraft zu bestimmen, welche der Druckkolben F (Fig. 22) zur Bewegung der übrigen Kolbenstangen ausüben kann, sei

H die Höhe des Wassers in der Fallröhre über dem niedrigsten Stande des Kolbens,

A der Querschnitt und D der Durchmesser des Stiefels,

b die Höhe des Kolbenhubs,

A' der Querschnitt, D' der Durchmesser und L' die Länge des Gurgelrohrs,

A'' der Querschnitt, D'' der Durchmesser und L'' die Länge der Fallröhre;

wird nun vorausgesetzt, daß die Oefnungen in den Hähnen den Durchfluß des Wassers nicht verengen, so ist die hydrostatische Druckhöhe, welche von unten gegen den Kolben preßt,

$$= H$$

und wenn

w die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens ist,

die hydraulische Widerstandshöhe (154. §.), wenn man den Widerstand wegen der Krümmungen bei Seite setzt,

$$H' = \frac{w^2}{2006}\left[\frac{b}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2 \frac{L''}{D''}\right]$$

die Höhe des Reibungswiderstandes am Kolben (212. §.)

$$f = (0{,}1 \pm)\frac{H}{D}$$

und weil die Wassermasse bei jedem Steigen des Kolbens, aus der Ruhe in Bewegung gesetzt werden muß, die Höhe des mechanischen Widerstandes (214. §.)

$$T = \frac{b}{g\,\tau^2}\left[b + \frac{A}{A'}L' + \frac{A}{A''}L''\right]$$

wo τ die Zeit eines Kolbenhubs bezeichnet.

Hienach ist die gesammte Kraft, welche der Kolben beim Steigen ausüben kann, oder

$$P = \gamma A\,[H - H' - f - T]$$

wonach leicht in vorkommenden Fällen die Kraft des Kolbens bestimmt werden kann.

Ist τ' die Zeit, in welcher der Kolben niedersinkt, so ist die Zeit eines Kolbenspiels

$$t = \tau + \tau'$$

und in dieser Zeit muß das Fallrohr die Wassermenge

$$= A\,b$$

liefern, es ist daher die zur Betreibung der Maschine in jeder Minute erforderliche Wassermenge

$$M = \frac{60\,A\,b}{t}$$

Die Bestimmung der übrigen Größen, welche zur vollständigen Anordnung erfordert werden, kann nach Anleitung des sechszehnten Kapitels geschehen.

237. §.

Außer der beschriebenen Anordnung einer Wassersäulenmaschine, kann dieselbe noch auf mancherlei Art abgeändert werden. Um den Gewichtskasten am Wagenbaume gänzlich zu entbehren, findet man Vorschläge in Herrn Langsdorf's Hydraulik 392. §. u. f. Sowohl Beschreibungen als Untersuchungen über die Wassersäulenmaschine sind in nachstehenden Schriften:

N. Poda, Kurzgefaßte Beschreibung der bei dem Bergbau zu Schemnitz in Nieder-Hungarn errichteten Maschinen. Herausgegeben von J. E. von Born. Prag 1771. S. 54 u. f.

C. T. Delius, Anleitung zu der Bergbaukunst, nach ihrer Theorie und Ausübung. Wien 1773. 2ter Abschnitt, 9tes Kap.

Langsdorf, angef. Hydraulik. (1794.) 20. Kap.

Desselben Maschinenlehre (1797.) 1. B. 2. T. 14. K.

F. G. Busse, Betrachtung der Winterschmidt- und Höll'schen Wassersäulenmaschine, nebst Vorschlägen zu ihrer Verbesserung und gelegentlichen Erörterungen über Mechanik und Hydraulik. Freiberg 1804.

Eine Beschreibung der von G. Winterschmidt erfundenen Wassersäulenmaschine, findet man in

H. Calvör, angef. Beschreibung des Maschinenwesens 1. Th. S. 159 u. f.

So wie die von Belidor erfundene, in dessen angef. Archit. Hydraulica, 1. Th. 4. B. 1. K.

Zwanzigstes Kapitel.

Von der Spiralpumpe.

---

238. §.

Windet man eine Röhre um eine Welle, legt die Axe der Welle horizontal und gibt der Röhre selbst die Einrichtung, daß das eine Ende bei jeder Umdrehung der Welle, Wasser und Luft schöpfen kann, indem das andere Ende mit einer Steigröhre verbunden ist, so nennt man diese Einrichtung eine Spiralpumpe (Antlia spiralis, *Pompe spirale*), welche gegen das Jahr 1746 von Andreas Wirz, einem Zinngießer in Zürich, erfunden und ausgeführt worden. In Florenz wurden im Jahre 1779 Versuche damit nach den Verbesserungen von Daniel Bernoulli angestellt, bei welchen in jeder Minute etwa 2½ Kubikfuß Wasser an 100 Fuß hoch gestiegen sind. Außer dieser zu den Versuchen in Florenz erbauten Spiralpumpe, ist im Jahre 1784 in Archangelsky bei Moskau, durch Norberg, eine solche Maschine mit dem besten Erfolge ausgeführt worden, welche in jeder Minute 7 Kubikfuß Wasser, 72 Fuß hoch, durch eine 740 Fuß lange Röhrenleitung gehoben hat *).

Die 25ste Figur zeigt die Abbildung einer Spiralpumpe, nach ihren wesentlichen Theilen. Um die horizontalliegende Axe CD, welche bei C umgedreht werden kann, ist die Röhre ABA′B′A″.... gewunden und daran befestiget. Der Anfang der Röhre oder das Horn (Cornu, *Corne*) AE erweitert sich bei E, um das darunter befindliche Wasser in hinlänglicher Menge bei jeder Umdrehung zu schöpfen; das Ende FG tritt in eine mit der Axe verbundene horizontale Röhre DH, die mit der Steigröhre (Tuba, *Tuyau montant*) IK zusammenhängt. Bei der T. III. F. 25.

---

*) Man s. J. F. Lempe Magazin der Bergbaukunde. XI. Theil. Dresden 1795. S. 38 u. f.

T.III. F.25. Umdrehung wird die Röhre DH mit bewegt, dagegen bleibt die Steigröhre HIK in unveränderter Lage, welches durch das Gewinde (Commissura) bei H bewerkstelliget wird.

So vielmal die Röhre um die Axe gewunden ist, so viel Gänge oder Windungen (Convolutiones, *Tours*) hat die Spiralpumpe. ABA' ist die erste, A'B'A'' die zweite Windung u. s. w. Sämmtliche Windungen machen die Schlange (Serpens, *Serpent*) aus, welche nebst der Steigröhre luft- und wasserdicht seyn muß.

Hat das Horn bei fortwährender Umdrehung immer einen Wasser- und Luftsatz geschöpft, so werden anfänglich die Oberflächen der Wassersäulen auf beiden Seiten der Windungen, wegen des hydrostatischen Gleichgewichts, gleich hoch stehen; gelangt aber endlich das Wasser in der letzten Windung bis an die Steigröhre, so wird durch die fortgesetzte Umdrehung der Schlange, das Wasser, welches nicht anders ausweichen kann, zum Steigen gebracht werden, und weil dieses nun auf die Luft und das Wasser, welches sich in den Windungen befindet, zurückdrückt, so können die Wassersäulen in beiden Schenkeln der Windungen nicht mehr gleich hoch seyn, wenn ein Gleichgewicht erfolgen soll. Durch das in den Windungen nachfolgende Wasser und die zusammengepreßte Luft wird nun, bei einer gehörigen Vorrichtung, fortwährend immer mehr Wasser gehoben und man sieht hieraus, daß bei dieser Maschine keine dergleichen Hindernisse der Bewegung, wie bei den gewöhnlichen Pumpen die Kolben rc. vorkommen; und weil überdies kein Wasser, welches einmal in den Windungen enthalten ist, verloren geht, bei den Pumpen aber wegen der Unvollkommenheit der Ventile, niemals ein voller Hub erfolgt, so geht hieraus hervor, daß die Spiralpumpe wesentliche Vortheile vor den Pumpen gewährt. Der Erfinder Wirz hatte zwar bei seiner Maschine die Röhre schneckenförmig, wie eine Uhrfeder in einerlei Vertikalebene gewunden, es ist aber besser die Windungen nebeneinander fortlaufen zu lassen.

239. §.

Um einzusehen, wie die Luft und das Wasser in den Windungen, einer Wassersäule in der Steigröhre das Gleichgewicht halten könne, sei Fig. 26 eine Röhre von drei T. III. Windungen, welche theils mit Wasser, theils mit Luft an- F. 26. gefüllt sind. Setzt man nun das Gewicht von der Luft, welche in die Steigröhre tritt, bei Seite, und es soll ein Gleichgewicht zwischen dem Drucke des Wassers in der Steigröhre IK und dem, welcher von dem Wasser in den Windungen verursacht wird, entstehen, so müßten, wenn das Wasser in der Steigröhre die größte Höhe erreichen soll, die wasserhaltenden Bogen alle auf einerlei Seite der Schlange so stehen, damit die von der Steigröhre zusammengepreßte Luft in der Windung GA‴B″ gegen den Untertheil der Wassersäule A″B″ wirkt. Dasselbe gilt von den Wassersäulen A′B′ und AB, vorausgesetzt, daß Luft genug zwischen den wasserhaltenden Bogen vorhanden ist. Wäre H H die hydrostatische Höhe des Wassers in der Steigröhre, wobei die Lufthöhen zwischen dem Wasser gänzlich bei Seite gesetzt werden und das Wasser in der Steigröhre als zusammenhängend angenommen wird; wäre ferner h h die Höhe jedes wasserhaltenden Bogens, so ist die Höhe des Drucks gegen die Luft bei G $=$ H, welcher sich gegen B″ fortpflanzt. Bei B″ drückt aber die Höhe des Wasserbogens A″B″ entgegen, also ist der Druck gegen die Luft bei A″ $=$ H $-$ h; eben so bei A′ $=$ h $-$ 2h und bei A gegen die Atmosphäre $=$ H $-$ 3h. Ist nun H $-$ 3h $=$ o oder H $=$ 3h, so ist alles im Gleichgewichte; vorausgesetzt, daß Luft genug in jeder Windung vorhanden ist.

Wenn die Höhe der Steigröhre kleiner wird, so kann das vorige Gleichgewicht nicht bestehen. Soll KI oder H $=$ h werden, so muß im vorliegenden Falle, der dritte Wasserbogen eine entgegengesetzte oder negative Stellung für das Gleichgewicht annehmen, wobei wieder vorausgesetzt wird, daß Luft genug in den Windungen ist, um den Raum zwischen den Wasserbogen auszufüllen. Der Druck bei G und A″ (Fig. 27) ist alsdann $=$ H; bei B″ und T. III. F. 27.

B' = H + h; bei A' und B = H + h — h = H und bei A = H — h = o, also H = h wie erfordert wird. Diese negativen Wasserbogen oder Wasserpaßwechsel müssen also jedesmal entstehen, sobald die Höhe der Wassersäule in der Steigröhre, nicht der ganzen Wirkung der Maschine entspricht; dahingegen, wenn sich die Maschine in ihrer vollen Wirksamkeit befindet, so sind alle Wasserbogen auf der positiven Seite der Windungen.

Aus der vorhergehenden Betrachtung folgt, daß die Luft in den Windungen immer stärker zusammengepreßt wird, je näher sie an die Steigröhre kommt. In der ersten Windung wird sie lediglich von der Höhe des ersten Wasserbogens, dahingegen in der letzten Windung, von der ganzen Wassersäule in der Steigröhre zusammengedrückt. Es muß daher bei unveränderter Luftmenge, der Raum derselben in jeder folgenden Windung immer kleiner werden.

Dieser Umstand verursacht entweder eine Verminderung der Druckhöhen oder ein Zurückströmen des Wassers in den Windungen, nachdem man die Schlange auf eine oder die andere Art einrichtet. Es lassen sich mancherlei Anordnungen für die Schlangen geben; man kann eine cylindrische Röhre um einen Cylinder oder Kegel, oder eine konische Röhre um einen Kegel oder Cylinder winden; auch lassen sich sonst noch Einrichtungen finden, über welche es hier der Raum nicht verstattet Untersuchungen anzustellen. Es wird hinlänglich seyn solche Schlangen näher zu betrachten, welche in der Ausübung leicht verfertiget werden können und die in den meisten Fällen dem vorgesetzten Endzwecke gemäß sind.

240. §.

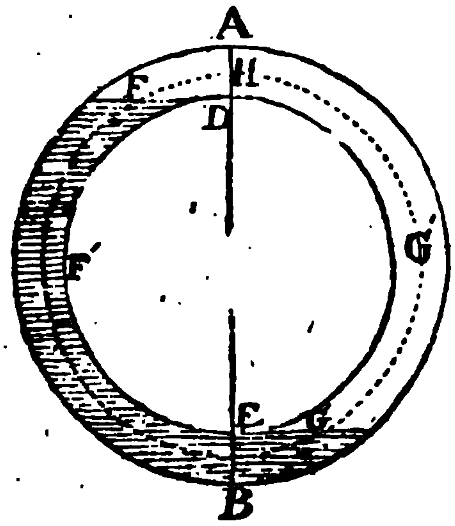
Die folgenden Untersuchungen beziehen sich zuerst auf Schlangen, welche aus einer cylindrischen über einen Kegel gewickelten Röhre bestehen.

T. III. F. 28. Die Spiralpumpe (Figur 28) habe die eben beschriebene Eigenschaft, und das Wasser in der Steigröhre befinde sich auf der größtmöglichen Höhe, so müssen sich die

Druckhöhen der Wasserbogen in den letzten Windungen vermindern, weil die gleichen Luftmengen immer kleinere Räume einnehmen; und daher die Grundflächen der Wasserbogen in den kleinern Windungen immer höher kommen. Bei fortgesetzter Umdrehung kommt es nun darauf an, daß von dem Horn AE gleich viel Wasser und Luft in die erste Windung geschöpft wird. Es läßt sich aber einsehen, daß die Gestalt des Horns ziemlich gleichgültig ist, wenn nur nicht weniger Wasser und Luft geschöpft wird, als jede Windung erfordert. Denn gesetzt, das Horn habe bei seinem Eintritte ins Wasser mehr Luft eingenommen, so wird wegen des Gleichgewichts unter den Wassersäulen, die Oberfläche des Wasserbogens AB dennoch bei A stehen bleiben, und daher, wenn das Horn weiter herunter kommt, also der Raum, in welchem die Luft eingeschlossen ist, kleiner wird, so wird diejenige Luft, welche weniger als eine halbe Windung ausfüllt, wieder aus dem Wasser durch die Oeffnung des Horns zurücktreten. Auf gleiche Art wird durch die eingeschlossene Luft und wegen des Gleichgewichts unter den Wasserbogen verhindert, daß nicht mehr Wasser aus dem Horn in die Schlange eintreten kann, als zur Ausfüllung der ersten halben Windung erforderlich ist, weil das anfänglich wegen der größern Weite des Horns zu viel geschöpfte Wasser aus der engern Windung bei A überläuft, und durch das Horn ins Gefäß zurücktritt.

Es kommt also vorzüglich darauf an, daß Wasser und Luft in hinlänglicher Menge geschöpft werde; in keinem Falle schadet eine zu große Menge, dahingegen zu wenig Luft, die Druckhöhe, und zu wenig Wasser, die Wassermenge vermindert. Um daher sicher zu seyn, kann man die Axe der Schlange über die Oberfläche des zu schöpfenden Wassers legen, dem Horn selbst aber eine Länge von etwa dreiviertel einer Windung geben und solches gehörig erweitern.

241. §.



In der nebenstehenden Figur sei die erste Windung der Schlange, am Ende des Horns abgebildet, so ist F F′ G der Wasser- und F G′ G der Luftbogen, welche beide gleichen körperlichen Inhalt haben. Man setze, daß

R $R = CD$ den Halbmesser der ersten Windung, und

r $r = AH = HD$ den Halbmesser der Röhre bezeichne,

so ist der körperliche Inhalt der ersten Windung

$$2\pi(R+r)\cdot\pi r^2 = 2\pi^2(R+r)\,r^2$$

wo $\pi = 3{,}14159\ldots$ ist.

Daher der Raum A, welchen die Luft oder das Wasser in der ersten Windung einnimmt

$$A = \pi^2(R+r)\,r^2$$

l die Länge l des Wasserbogens F F′ G in der ersten Windung

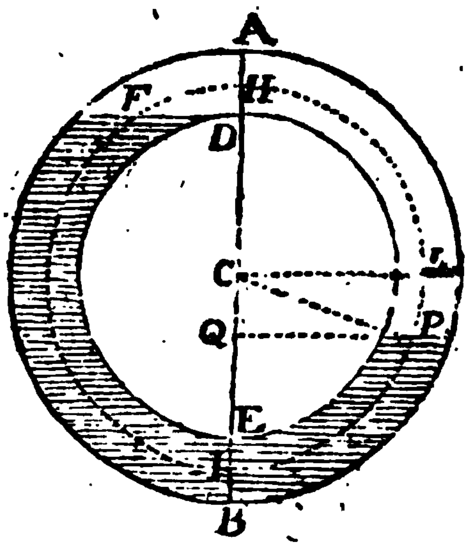
$$l = \pi(R+r)$$

und die vertikale Höhe des Wasserbogens oder D E, in der ersten Windung

$$= 2R \text{ *)}.$$

---

*) Bei dieser Bestimmung ist angenommen, daß der Punkt F mit D gleich hoch liege, welches bei einer schnellen Umdrehung der Schlange nicht der Fall ist. Denn ein Theil des Wassers ruhet auf den gebogenen Windungen, daher bekommt derselbe ein Bestreben aufwärts zu steigen, welches durch die Adhäsion noch vermehrt wird, weshalb das Uebertreten eines Theils des Wassers wirklich erfolgt, wenn bei einer schnellen Umdrehung, das Vermögen der Wassertheile aufwärts zu steigen größer wird, als die Kraft, mit welcher sie zu sinken streben. In den meisten Fällen der Ausübung ist aber die Umdrehung der Schlange so beschaffen, daß nicht leicht ein Uebertreten zu befürchten ist, und selbst, wenn dieses Statt findet, so wird dadurch die Wasserhöhe nur um einen so geringen Theil vermindert, daß man ohne Nachtheil den Punkt F mit D als in einerlei Horizont liegend, annehmen kann.



Wenn nun ferner die nebenstehende Figur die letzte Windung vorstellt, in welcher eben so viel Wasser und Luft als in der ersten vorhanden seyn soll, so bezeichne

α den Raum FHP, welchen die zusammengepreßte Luft in der letzten Windung einnimmt,

λ die Länge dieses Luftbogens,

H die Höhe des Wassers in der Steigröhre,

k die der Atmosphäre zugehörige Druckhöhe.

Nun ist die Höhe des Drucks auf die Luft in der ersten Windung $= k + 2R$; in der letzten Windung $= k + H$, deshalb müssen sich bei gleicher Luftmenge die Räume A, α umgekehrt wie die Druckhöhen verhalten (198. §.) also

$$k + H : k + 2R = A : \alpha \text{ daher}$$

der Raum, welchen die Luft in der letzten Windung einnimmt:

$$\alpha = \frac{k + 2R}{k + H} A = \frac{k + 2R}{k + H} \pi^2 (R + r) r^2$$

Ferner ist der Querschnitt der Röhre in allen Windungen gleich groß, daher $\frac{\alpha}{\pi r^2} = \lambda$ oder die Länge des Luftbogens in der letzten Windung

$$\lambda = \pi \frac{k + 2R}{k + H} (R + r) .$$

Der Halbmesser $CD = \varrho$ für die letzte Windung läßt ϱ sich nunmehr leicht bestimmen. Denn die centrische Linie $FHPIF = 2\pi(\varrho + r)$ muß der Länge des Wasser- und Luftbogens zusammen genommen gleich seyn, daher

$$2\pi(\varrho + r) = l + \lambda \text{ oder}$$

$$2\pi(\varrho + r) = \pi(R + r) + \pi \frac{k + 2R}{k + H} (R + r).$$

Hieraus findet man den Halbmesser der letzten Windung

$$\varrho = \frac{R + r}{2} \left(1 + \frac{k + 2R}{k + H}\right) - r$$

Beispiel. Wenn eine Spiralpumpe, bei welcher der Halbmesser der ersten Windung 4 Fuß, und die Weite der Röhre ¼ Fuß beträgt, das Wasser 40 Fuß hoch heben soll; wie groß muß der Halbmesser der letzten Windung seyn?

Hier ist $R = 4$, $r = \frac{1}{4}$, $H = 40$ und $k = 32$ Fuß, daher der Halbmesser

$$\varrho = \frac{4 + \frac{1}{4}}{2}\left(1 + \frac{32 + 8}{32 + 40}\right) - \tfrac{1}{4} = 3{,}05 \text{ Fuß}.$$

242. §.

Setzt man die Druckhöhe der Wassersäule in der letzten Windung oder $DQ = h$, so läßt sich diese nicht eher bestimmen, bis nicht die Höhe CQ, welche zu dem Bogen LP gehört, bekannt ist. Man setze

$$\text{Bogen } LP = \beta$$
$$CQ = x$$

so ist

$$\text{Sehne } HF = \sqrt{(DF^2 + HD^2)}$$

Aber $DF^2 = r(2\varrho + r)$ und $HD^2 = r^2$ daher

$$\text{Sehne } HF = \sqrt{(2r\varrho + 2r^2)}$$

und man kann in den meisten Fällen die Sehne HF statt des Bogens in Rechnung bringen. Mit mehrerer Genauigkeit erhält man diesen Bogen, wenn der ihm zugehörige Bogen für den Halbmesser $1 = 2\omega$ gesetzt wird; alsdann ist

$$\text{Bogen } HF = 2\omega\,(\varrho + r)$$

$$\text{Sin } \omega = \frac{\frac{1}{2}\text{ Sehne } HF}{\varrho + r} = \frac{\sqrt{(2r\varrho + 2r^2)}}{2(\varrho + r)}$$

Es ist aber

$$\text{Bogen } \omega = \text{Sin } \omega + \tfrac{1}{6}\text{ Sin } \omega^3 + \tfrac{3}{40}\text{ Sin } \omega^5 + \ldots\ ^{*})$$

---

*) L. Euler, Vollständige Anleitung zur Differentialrechnung. Aus dem Lateinischen übers. und mit Anmerk. und Zusätzen begleitet von J. A. C. Michelsen. 2ter Th. Berlin und Libau 1790. 83. §., wenn daselbst $x = o$ gesetzt wird.

und weil das dritte Glied dieser Reihe schon sehr klein wird, also hier weggelassen werden kann

$$\omega = \frac{\sqrt{(2r\varrho + 2r^2)}}{2(\varrho + r)} + \frac{\sqrt{(2r\varrho + 2r^2)^3}}{6.8(\varrho + r)^3} \text{ oder}$$

$$2\omega(\varrho+r) = \sqrt{(2r\varrho+2r^2)} + \tfrac{1}{12} r \sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho + r}\right]}$$

$$= (\varrho+r)\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho+r}\right]} + \tfrac{1}{12} r \sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho+r}\right]} \text{ daher}$$

Bogen HF $= (\varrho + \tfrac{13}{12} r)\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho + r}\right]}$

Nun ist

Bog. LP = Bog. HFIL — Bog. HF — Bog. FIP oder

$$\beta = \tfrac{3}{2}\pi(\varrho+r) - (\varrho + \tfrac{13}{12} r)\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho+r}\right]} - \pi(R+r)$$

$$\text{oder } \beta = \tfrac{1}{2}\pi(3\varrho + r - 2R) - (\varrho + \tfrac{13}{12} r)\sqrt{\left[\frac{2r}{\varrho + r}\right]}$$

woraus der Bogen LP leicht bestimmt werden kann. Aus dem Bogen LP läßt sich leicht der Winkel LCP berechnen, und hieraus könnte man den Sinus CQ = x für den Bogen LP finden, da alsdann die gesuchte Druckhöhe DQ oder

$$h = \varrho + x \text{ ist.}$$

Wird β negativ, also x negativ, so wird

$$h = \varrho - x.$$

Um aber ohne diese Berechnung einen bestimmten Ausdruck für x durch β zu erhalten, so setze man, daß für den Halbmesser = 1, der zu β gehörige Bogen = φ sei, so ist

$$\beta = \varphi(\varrho + r) \text{ also } \varphi = \frac{\beta}{\varrho + r} \text{ und}$$

$$\text{Sin}\,\varphi = \frac{CQ}{CP} = \frac{x}{\varrho + r}$$

Nun kann man den Sinus eines Bogens durch folgende Reihe ausdrücken, die schnell genug zusammenläuft, wenn $\varphi < 1$ ist *)

$$\text{Sin}\,\varphi = \varphi - \tfrac{1}{6}\varphi^3 + \tfrac{1}{120}\varphi^5 - \tfrac{1}{5040}\varphi^7 + \ldots$$

---

*) L. Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerk. und Zusätzen begleitet von J. A. C. Michelsen. 1. Buch. Berlin 1788. 134. §.

es ist daher

$$\frac{x}{\varrho + r} = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5 \text{ oder}$$

$$\varphi = \frac{\beta}{\varrho + r} \text{ gesetzt}$$

$$x = \beta - \frac{1}{6}\frac{\beta^3}{(\varrho + r)^2} + \frac{1}{120}\frac{\beta^5}{(\varrho + r)^4} \text{ oder}$$

$$x = \beta\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{\varrho + r}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{\beta}{\varrho + r}\right)^4\right]$$

wo man in den meisten Fällen das dritte Glied weglassen kann.

Hieraus findet man die Druckhöhe DQ von dem Wasserbogen in der letzten Windung oder

$$h = \varrho + \beta\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{\varrho + r}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{\beta}{\varrho + r}\right)^4\right]$$

Beispiel. Bei einer Spiralpumpe sei der Halbmesser der ersten Windung 4 und der letzten 3 Fuß. Die Weite der Röhre $\frac{1}{2}$ Fuß; man soll die Druckhöhe in der letzten Windung finden.

$R = 4$, $\varrho = 3$ und $r = \frac{1}{4}$ Fuß, daher der Bogen

$$\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{22}{7}\left(9 + \frac{1}{4} - 8\right) - \left(3 + \frac{13}{12}\cdot\frac{1}{4}\right)\sqrt{\left[\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{3 + \frac{1}{4}}\right]}$$
$$= 0{,}681$$

und hieraus die Druckhöhe

$$h = 3 + 0{,}681\left[1 - \frac{0{,}681^2}{6(3 + \frac{1}{4})^2} + \frac{0{,}681^4}{120(3 + \frac{1}{4})^4}\right]$$
$$= 3 + 0{,}681\left[1 - 0{,}0749 + 0{,}000017\right]$$
$$= 3{,}63 \text{ Fuß.}$$

243. §.

Betrachtet man die Spiralpumpe im Zustande der Bewegung, wenn die Geschwindigkeit von der centrischen Linie der ersten Windung = v gesetzt wird, also v die mittlere Geschwindigkeit der Röhre ist, so ist offenbar, daß, wenn der Wasserbogen von der Länge l mit der Geschwindigkeit v in der Röhre bewegt werden sollte, hiezu (152. §.) eine Widerstandshöhe

$$h' = \frac{l\,v^2}{2006\,.\,2r} = \frac{\pi v^2 (R + r)}{4012\,.\,r}$$

für die erste Windung erfordert wird, wenn man den Widerstand wegen der Krümmung bei Seite setzt.

Bewegt sich hingegen die Röhre und das Wasser steht still, so müssen die Wände der Röhre von dem Wasser mit einer Gewalt losgerissen werden, welche der Druckhöhe h' entspricht, oder das Wasser wird so fortgerissen, als wenn eine Wassersäule von der Höhe h' dasselbe von unten nach oben preßte. Hiedurch wird also bei der bewegten Maschine der Druck der einzelnen Wassersäulen um die Höhe h' vermindert, und nur der Ueberschuß kann als Kraft in Rechnung gebracht werden.

Das Wasser in der Steigröhre wird daher bei einer kleinen Geschwindigkeit der Maschine, höher als bei einer großen steigen.

Für die letzte Windung ist $\varrho + r$ der Halbmesser der centrischen Linie, daher die Geschwindigkeit derselben $= v \frac{\varrho + r}{R + r}$ und man findet die Widerstandshöhe in der letzten Windung

$$h'' = \frac{l v^2 (\varrho + r)^2}{2006 \cdot 2r (R + r)^2} \text{ oder}$$
$$= \frac{\pi v^2 (\varrho + r)^3}{4012 \cdot r (R + r)^2}$$

folglich die Summe der Widerstandshöhen in der ersten und letzten Windung

$$h' + h'' = \frac{\pi v^2}{4012 \cdot r} \cdot \frac{(R + r)^3 + (\varrho + r)^3}{(R + r)^2}$$

Ist die Steigröhre mit den Windungen von gleicher Weite und man nimmt die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Steigröhre $= v$ und die Höhe des Wassers in derselben $= H$ an, so wird zur Fortbewegung des Wassers in der senkrechten Steigröhre (152. §.) eine Widerstandshöhe

$$h''' = \frac{H v^2}{2006 \cdot 2r} \text{ erfordert.}$$

244. §.

Die Anzahl sämmtlicher Windungen sei n, so ist die Druckhöhe des Wasserbogens in der ersten Windung

$= 2R - h'$ und in der letzten Windung $= h - h''$. Weil aber die gleichweite Schlange, nach den entwickelten Grundsätzen, um einen Kegel gewunden, vorausgesetzt wird, so läßt sich annehmen, daß die Druckhöhen in jeder Windung von $2R$ bis h gleichförmig abnehmen; alsdann ist die Summe aller Druckhöhen

$$= n \cdot \frac{2R - h' + h - h''}{2}.$$

Diese Wassersäulen in den Windungen müssen nicht nur dem Wasser in der Steigröhre von der Höhe H sondern auch der Widerstandshöhe h''' das Gleichgewicht halten, es ist daher (239. §.)

$$H + h''' = \tfrac{1}{2} n \,(2R + h - h' - h'')$$

und man findet die hydrostatische Wasserhöhe in der Steigröhre oder

$$H = \tfrac{1}{2} n \,(2R + h - h' - h'') - h'''$$

woraus man die Anzahl der Windungen oder

$$n = \frac{2\,(H + h''')}{2R + h - (h' + h'')}$$

findet.

Es ist zu bemerken, daß H nur die Höhe des Wassers in der Steigröhre bezeichnet; weil aber die Maschine Wasser und Luft zugleich hebt, so ist die eigentliche Höhe, auf welche das Wasser bei einer schnellen Bewegung der Maschine steigt, zwar höher, aber die Höhe des Wasserdrucks bleibt $= H$, weil das Gewicht der Luftsäulen nicht in Rechnung kommt.

245. §.

Die Höhe bis zu welcher das Wasser in der Steigröhre gehoben werden kann, wäre $= H$, wenn außer dem Wasser keine Luft durch die Steigröhre aufgefördert würde. Weil aber immer ein Wassercylinder von der Länge $l = \pi(R + r)$ (241. §.) und eine Luftmenge von eben dem Inhalte für den natürlichen Zustand derselben eintritt, so ist offenbar, wenn die Steigröhre mit den Schlangenröhren gleich weit ist, daß alsdann die Höhe jedes einzelnen Wassersatzes $= \pi\,(R + r) = l$ ist, die Höhe jedes Luftsatzes wird aber

desto geringer seyn, je mehr Wassersätze sich über dem Luftsatze befinden, weil die zwischen zwei Wassersätzen eingeschlossene Luft stärker zusammengepreßt wird. Ist nun die Bewegung der Schlange nicht zu langsam, so daß die Luftsätze zwischen ihren Wassersätzen nicht ohne diese in die Höhe steigen, so entstehet die Frage, wie groß

H' die Höhe sämmtlicher Luftsätze in der Steigröhre ist. H'

Die Anzahl sämmtlicher Wassersätze ist $= \frac{H}{l}$ und eben so viel Luftsätze sind in der Steigröhre. Man setze

$$\frac{H}{l} = \mu$$

wo für μ die nächste ganze Zahl genommen werden kann. Die Höhe eines Luftsatzes im natürlichen Zustande oder bei einem atmosphärischen Drucke von $32' = k$ ist l, woraus die Höhe des ersten Luftsatzes in der Steigröhre unter dem ersten oder obersten Wassersatze, leicht gefunden werden kann. Denn (198. §.)

$$k + l : k = l : \frac{kl}{k+l}$$

also ist $\frac{kl}{k+l}$ die Höhe des ersten Luftsatzes.

Für den zweiten Luftsatz erhält man, wenn das Gewicht der Luft in der Steigröhre als unbedeutend bei Seite gesetzt wird

$$k + 2l : k = l : \frac{kl}{k+2l}$$

und eben so findet man die Höhe des letzten oder untersten Luftsatzes in der Steigröhre

$$= \frac{kl}{k+\mu l}.$$

Hieraus erhält man die Höhe sämmtlicher Luftsätze in der Steigröhre oder

$$H' = kl \left[\frac{1}{k+l} + \frac{1}{k+2l} + \frac{1}{k+3l} + \cdots \frac{1}{k+\mu l}\right]$$

wo in der Parenthese so viel Glieder sind, als μ Einheiten hat.

Die gesammte Höhe, auf welche das Wasser in der Steigröhre gefördert wird, oder die vertikale Förderungshöhe S ist daher

$$S = H + H'.$$

Setzt man voraus, daß sich Luft und Wasser in der Steigröhre gleichförmig vermischen, so findet man für die Lufthöhe in der Steigröhre

$$H' = 73{,}68 \text{ Log } \left[1 + \frac{H}{k}\right] \quad *).$$

*) Um zu dem vorstehenden Ausdrucke zu gelangen, sei AB die Höhe der Steigröhre $= H + H'$; $AP = x$; $Pp = dx$. Dem Drucke in A hält eine Wassersäule von der Höhe k, und in B von der Höhe $k + H$ das Gleichgewicht. Dem Drucke in P entspreche eine Wassersäule von der Höhe y; so wird, wenn x um dx wächst, y um dy wachsen. Denkt man sich nun die ganze Steigröhre in lauter unendlich dünne Wasser- und Luftschichten getheilt, so daß die ersten Wasser- und Luftschichten bei A, jede eine Höhe $\frac{1}{2} dx$ haben, so findet man die Höhe einer solchen Luftschicht bei P

$$y : k = \tfrac{1}{2} dx : \frac{k}{2y}\, dx$$

Die Höhe der Wasserschicht bei P ist $= \frac{1}{2} dx$, beide Schichten haben also daselbst eine Höhe

$$\frac{k}{2y}\, dx + \tfrac{1}{2} dx = \frac{y+k}{2y}\, dx$$

Um nun die Wasserhöhe zu bestimmen, welche auf die Höhe dx bei P kommt, so enthält die Höhe $\frac{y+k}{2y}\, dx$ die Wasserhöhe $\frac{1}{2} dx$ also

$$\frac{y+k}{2y}\, dx : dx = \tfrac{1}{2} dx : \frac{y}{y+k}\, dx$$

welches die Wasserhöhe ist, die auf die Höhe dx bei P kommt.

Wenn nun D die Dichtigkeit des Wassers und δ die Dichtigkeit der Wasser- und Luftmischung bei P bezeichnet, so verhält sich, wenn auf das Gewicht der Luft in der Steigröhre nicht Rücksicht genommen wird

$$\delta : D = \frac{y}{y+k}\, dx : dx \text{ also } \frac{D}{\delta} = \frac{y+k}{y}$$

welcher Ausdruck in dem Falle anzuwenden ist, wenn viele und niedrige Wassersätze vorkommen, oder wenn die Steigröhre sehr geneigt ist, weil alsdann weit mehr Luftsätze als bei einer vertikalen Steigröhre vorkommen, obgleich die vertikale hydrostatische Druckhöhe dieselbe bleibt.

Auch ist überhaupt noch zu bemerken, daß, wenn die Schlange weiter als die Steigröhre ist, die Höhe H′ kleiner und im umgekehrten Falle größer wird.

Beispiel. Für $H = 40$ und $l = 4$ Fuß ist $\mu = \frac{40}{4} = 10$ also die Höhe sämmtlicher Luftsätze

$$H' = 32 . 4 . \left(\tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{44} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{52} + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{60} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{68} + \tfrac{1}{72}\right)$$
$$= 24{,}86 \text{ Fuß.}$$

Für $H = 16$ und $l = 1$ Fuß findet man

$$H' = 32 . 1 \left(\tfrac{1}{33} + \tfrac{1}{34} + \tfrac{1}{35} + \ldots . . \tfrac{1}{47} + \tfrac{1}{48}\right)$$
$$= 12{,}81 \text{ Fuß}$$

und wenn man nach dem zweiten Ausdrucke mit Logarithmen rechnet

$$H' = 73{,}68 \text{ Log } \left(1 + \tfrac{16}{32}\right) = 12{,}96 \text{ Fuß.}$$

Zusatz. Wenn die Förderungshöhe $= S$ gegeben ist, und man soll daraus die Höhen H und H′ bestimmen, so erfordert dies eine weitläuftige Näherungsrechnung, man mag den einen oder andern für H gefundenen Ausdruck zum Grunde der Rechnung annehmen. Dieß zu erleichtern können die nachstehenden Tafeln dienen, wo

---

Aber $\delta . dx = D . dy$ also

$$dx = \frac{D}{\delta}\, dy = \frac{y + k}{y}\, dy = \left(1 + \frac{k}{y}\right) dy \text{ daher}$$
$$x = y + k . \text{Log. nat } y + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $y = k$ also

$$x = y + k\,\text{L. nat}\, y - k - k\,\text{L. nat}\, k = y - k + k\,\text{L. nat.}\, \frac{y}{k}$$

Für $x = H + H'$ wird $y = k + H$ folglich

$$H + H' = k + H - k + k \text{ Log. nat } \frac{k + H}{k} \text{ oder}$$
$$H' = k \text{ Log. nat. } \left[1 + \frac{H}{k}\right]$$

Wird $k = 32'$ gesetzt und durch die Division mit dem Model der gemeinen Logarithmen $= 0{,}4342945$, der natürliche Logarithmus weggeschaft, so erhält man den oben *) stehenden Ausdruck.

l die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung,
H die hydrostatische Höhe in der vertikalen Steigröhre,
H' die Höhe sämmtlicher Luftsätze, und
S die Förderungshöhe $= H + H'$ bezeichnet, und wo alle Zahlen sich auf rheinländisches Fußmaß beziehen, wenn $k = 32$ Fuß gesetzt wird.

$l = 1$ Fuß		
H	H'	S
1	0,97	1,97
2	1,91	3,91
3	2,82	5,82
4	3,71	7,71
5	4,58	9,58
6	5,42	11,42
7	6,24	13,24
8	7,04	15,04
9	7,82	16,82
10	8,58	18,58
11	9,33	20,33
12	10,05	22,05
13	10,76	23,76
14	11,46	25,46
15	12,14	27,14
16	12,81	28,81
17	13,46	30,46
18	14,10	32,10
19	14,73	33,73
20	15,33	35,33
21	15,95	36,95
22	16,54	38,54
23	17,12	40,12
24	17,69	41,69
25	18,25	43,25

$l = 2$ Fuß		
H	H'	S
2	1,88	3,88
4	3,65	7,65
6	5,34	11,34
8	6,94	14,94
10	8,46	18,46
12	9,92	21,92
14	11,31	25,31
16	12,64	28,64
18	13,92	31,92
20	15,15	35,15
22	16,33	38,33
24	17,48	41,48
26	18,58	44,58
28	19,65	47,65
30	20,68	50,68
32	21,68	53,68
34	22,64	56,64
36	23,58	59,58
38	24,50	62,50
40	25,39	65,39
42	26,25	68,25
44	27,10	71,10
46	27,92	73,92
48	28,71	76,71
50	29,50	79,50

l = 3 Fuß

H	H′	S
3	2,75	5,75
6	5,27	11,27
9	7,61	16,61
12	9,79	21,79
15	11,84	26,84
18	13,66	31,66
21	15,57	36,57
24	17,28	41,28
27	18,90	45,90
30	20,45	50,45
33	21,94	54,94
36	23,38	59,38
39	24,75	63,75
42	26,07	68,07
45	27,33	72,33
48	28,54	76,54
51	29,71	80,71
54	30,84	84,84
57	31,93	88,93
60	32,98	92,98

l = 4 Fuß

H	H′	S
4	3,56	7,56
8	6,76	14,76
12	9,61	21,61
16	12,33	28,33
20	14,78	34,78
24	17,06	41,06
28	19,20	47,20
32	21,20	53,20
36	23,08	59,08
40	24,86	64,86
44	26,63	70,63
48	28,13	76,13
52	29,66	81,66
56	31,12	87,12
60	32,50	92,50
64	33,83	97,83
68	35,10	103,10
72	36,34	108,34
76	37,52	113,52
80	38,66	118,66

l = 5 Fuß

5	4,32	9,32
10	8,13	18,13
15	11,54	26,54
20	14,61	34,61
25	17,41	42,41
30	19,98	49,98
35	22,37	57,37
40	24,59	64,59
45	26,67	71,67
50	28,62	78,62
55	30,46	85,46
60	32,19	92,19
65	33,84	98,84
70	35,41	105,41
75	36,81	111,81

l = 6 Fuß

6	5,05	11,05
12	9,41	21,41
18	13,25	31,25
24	16,67	40,67
30	19,76	49,76
36	22,58	58,58
42	25,17	67,17
48	27,57	75,57
54	29,80	83,80
60	31,89	91,89
66	33,85	99,85
72	35,69	107,69
78	37,44	115,44
84	39,09	123,09
90	40,67	130,67

l = 7 Fuß		
H	H′	S
7	5,73	12,73
14	10,59	24,59
21	14,83	35,83
28	18,57	46,57
35	21,91	56,91
42	24,93	66,93
49	27,69	76,69
56	30,27	86,27
63	32,58	95,58
70	34,79	104,79
77	36,85	113,85
84	38,77	122,77

l = 8 Fuß		
H	H′	S
8	6,40	14,40
16	11,72	27,72
24	16,28	40,28
32	20,27	52,27
40	23,83	63,83
48	27,03	75,03
56	29,95	85,95
64	32,61	96,61
72	35,07	107,07
80	37,35	117,35
88	39,47	127,47
96	41,47	137,47

l = 9 Fuß		
H	H′	S
9	7,03	16,03
18	12,79	30,79
27	17,65	44,65
36	21,89	57,89
45	25,63	70,63
54	28,97	82,97
63	31,10	94,10
72	34,76	106,76
81	37,30	118,30
90	39,66	129,66

l = 10 Fuß		
H	H′	S
10	7,62	17,62
20	13,76	33,76
30	18,91	48,91
40	23,36	63,36
50	27,26	77,26
60	30,75	90,75
70	33,89	103,89
80	36,74	116,74
90	39,33	129,33
00	41,76	141,76

l = 11 Fuß		
H	H′	S
11	8,17	19,17
22	14,68	36,68
33	20,10	53,10
44	24,71	68,71
55	28,76	83,76
66	32,35	98,35
77	35,59	112,59
88	38,51	126,51
99	41,18	140,18
110	43,65	153,65

l = 12 Fuß		
H	H′	S
12	8,72	20,72
24	15,55	39,55
36	21,68	57,68
48	25,10	73,10
60	30,18	90,18
72	33,87	105,87
84	37,17	121,17
96	40,17	136,17
108	42,89	150,89
120	45,43	165,43

l = 13 Fuß

H	H′	S
13	9,23	22,23
26	16,39	42,39
39	22,26	51,26
52	27,21	79,21
65	31,49	96,49
78	35,28	113,28
91	38,65	129,65
104	41,68	145,68
117	44,47	161,47
130	47,05	177,05

l = 14 Fuß.

H	H′	S
14	9,71	23,71
28	17,20	45,20
42	23,25	65,25
56	28,36	84,36
70	32,75	102,75
84	36,60	120,60
98	40,05	138,05
112	43,14	155,14
126	45,96	171,96
140	48,56	188,56

l = 15 Fuß

H	H′	S
15	10,22	25,22
30	17,95	47,95
45	24,19	69,19
60	29,42	89,42
75	33,89	108,89
90	37,82	127,82
105	41,33	146,33
120	44,50	164,50
135	47,38	182,38
150	50,02	200,02

l = 16 Fuß

H	H′	S
16	10,65	26,65
32	18,64	50,64
48	25,04	73,04
64	30,36	94,36
80	34,84	114,84
96	38,91	134,91
112	42,44	154,44
128	45,62	173,62
144	48,54	192,54
160	51,20	211,20

Aus diesen Tafeln sieht man, daß nahe gelegene Förderungshöhen beinahe gleiche Differenzen haben, wenn die Differenzen der zugehörigen hydrostatischen Druckhöhen einander gleich sind. Dies gibt ein Mittel mit Hülfe der Tafeln, aus der gegebenen Förderungshöhe und der Länge des Wasserbogens in der ersten Windung, die hydrostatische Druckhöhe in der Steigröhre zu finden, indem man annimmt, daß sich die Differenzen der nahe gelegenen Förderungshöhen, wie die Differenzen der zugehörigen hydrostatischen Druckhöhen verhalten.

Beispiel. Die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung einer Spiralpumpe ist 6 Fuß. Man sucht die hydrostatische Druckhöhe für eine Förderungshöhe von 60 Fuß.

Hier ist l = 6; sucht man daher in der vorstehenden Tafel für S = 60 die nächsten Förderungshöhen, so kann man schließen, wenn d die Differenz zwischen der gesuchten und

der nächst kleinern hydrostatischen Druckhöhe ist, daß sich verhält

$$67{,}17 - 58{,}58 : 60 - 58{,}58 = 42 - 36 : d \text{ oder}$$
$$8{,}59 : 1{,}42 = 6 : d \text{ daher}$$
$$d = \frac{1{,}42 \cdot 6}{8{,}59} = 0{,}99.$$

Es ist daher die gesuchte hydrostatische Höhe
$$= 36 + 0{,}99 = 36{,}99 \text{ Fuß},$$
und die Lufthöhe
$$= 60 - 36{,}99 = 23{,}01 \text{ Fuß}.$$

Sollte die gegebene Länge l einen Bruch enthalten, so kann man die nächste ganze Zahl dafür annehmen und die Rechnung mit Hülfe der Tafel wie vorher ausführen.

246. §.

Die Wassermenge, welche bei jeder Umdrehung der Schlange gehoben wird, ist
$$\pi r^2 l = \pi^2 r^2 (R+r)$$
m macht daher die Schlange in jeder Minute m Umläufe, so findet man für eine Minute die Wassermenge, welche die Maschine hebt, oder
$$M = m\pi^2 r^2 (R+r).$$

Zu einem Umlaufe der Schlange werden $\frac{60}{m}$ Sekunden
v Zeit erfordert, ist daher v die mittlere Geschwindigkeit der ersten Windung, so verhält sich
$$\frac{60}{m} : 1'' = 2\pi (R+r) : v \text{ daher ist}$$
$$m\pi (R+r) = 30 v$$
oder die Wassermenge
$$M = 30 \cdot v \cdot \pi r^2$$
und hieraus der Halbmesser der Röhre
$$r = \sqrt{\left[\frac{M}{30 \cdot \pi v}\right]}$$

Ist P die Kraft, welche am Halbmesser R+r dem Uebergewichte der Wasserbogen das Gleichgewicht hält, so müßte man die Momente sämmtlicher Wasserbogen zusammen nehmen und durch (R+r) dividiren um P zu finden. Nimmt man hingegen an, daß die Momente gleichförmig

abnehmen, so ist das Moment des Wasserbogens in der ersten Windung

$$= (R+r) \cdot 2R \cdot \pi r^2 \cdot \gamma$$

und in der letzten Windung

$$= (\varrho+r) \cdot h \cdot \pi r^2 \gamma$$

die halbe Summe beider Momente oder das mittlere Moment

$$\tfrac{1}{2}\pi r^2 [2R(R+r) + h(\varrho+r)]\gamma;$$

wird dieses mit der Anzahl der Wasserbogen n multiplizirt, so gibt dies die Summe aller Momente, und diese Summe durch den Halbmesser R + r dividirt, gibt die gesuchte Kraft

$$P = \tfrac{1}{2}\pi r^2 n \left[2R + h\,\frac{\varrho+r}{R+r}\right]\gamma$$

oder wenn man $\frac{M}{30v}$ anstatt πr^2 setzt

$$P = \frac{nM}{60v}\left[2R + h\,\frac{\varrho+r}{R+r}\right]\gamma.$$

Beispiel. Man soll die cylindrische um einen Kegel gewickelte Schlange einer Spiralpumpe so anordnen, daß in jeder Minute 30 Kubikfuß Wasser auf eine Höhe von 63 Fuß gehoben werden.

Man setze die Geschwindigkeit der ersten Windung = 4 Fuß, so wird der Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{30}{30 \cdot \frac{22}{7} \cdot 4}\right]} = 0{,}282 \text{ Fuß.}$$

$$= 3{,}38 \text{ Zoll.}$$

Für die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung ist (241. §.), wenn R willkührlich = 4 Fuß angenommen wird

$$l = \pi(R+r) = \tfrac{22}{7} \cdot 4{,}282 = 13{,}46 \text{ Fuß.}$$

Nun ist S = 63, wodurch sich mit Hülfe der Tafeln (245. §.) die hydrostatische Höhe finden läßt. Denn

$$79{,}21 - 61{,}26 : 63 - 61{,}26 = 42 - 39 : 1{,}26$$

daher ist die hydrostatische Höhe

$$H = 39 + 1{,}26 = 40{,}26 \text{ Fuß}$$

Der Halbmesser der letzten Windung ist (241. §.)

$$\varrho = \frac{4{,}28}{2}\left(1 + \frac{32+8}{32+40{,}26}\right) - 0{,}28 = 3{,}04 \text{ Fuß.}$$

daher (242. §.) der Bogen

$$\beta = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{22}{7} [9{,}12 + 0{,}28 - 8] - (3{,}04 + \tfrac{11}{12} \cdot 0{,}28) \sqrt{\left[\tfrac{0{,}56}{3{,}32}\right]}$$
$$= -0{,}173$$

Der negative Werth zeigt an, daß β oberhalb des horizontalen Halbmessers CL (Fig. S. 374) liegt.

Hieraus findet man die Druckhöhe in der letzten Windung

$$h = 3{,}04 - 0{,}173 \left[1 - \frac{0{,}173^2}{6 \cdot 3{,}32^2}\right] = 2{,}872 \text{ Fuß.}$$

Für die Widerstandshöhen in der ersten und letzten Windung ist

$$h' + h'' = \frac{22 \cdot 16}{7 \cdot 4012 \cdot 0{,}28} \cdot \frac{4{,}28^2 + 3{,}32^2}{4{,}28^2} = 0{,}281 \text{ Fuß.}$$

Ferner

$$h''' = \frac{40{,}26 \cdot 16}{4012 \cdot 0{,}28} = 0{,}573 \text{ Fuß}$$

daher die Anzahl der Windungen

$$n = \frac{2\,(40{,}26 + 0{,}573)}{8 + 2{,}872 - 0{,}281} = 7{,}71$$

Endlich findet man die erforderliche Kraft

$$P = \frac{7{,}71 \cdot 30}{60 \cdot 4} \left[8 + 2{,}872 \cdot \frac{3{,}32}{4{,}28}\right] 66$$
$$= 649{,}9 \text{ Pfund.}$$

247. §.

Es bleibt nun noch übrig diejenigen Schlangen zu untersuchen, welche aus einer **gleich weiten Röhre** bestehen, die um **einen Cylinder gewunden** ist. Sämmtliche Betrachtungen bis an das Ende dieses Kapitels beziehen sich hierauf.

Weil die Luft in den letzten Windungen stärker zusammengepreßt ist als in den erstern, die Gänge aber von einerlei Größe bleiben, so muß näher nach der Steigröhre zu, eine größere Luft- oder Wassermenge als nahe am Horn in jeder Windung vorhanden seyn, wenn die Wasserbogen mit dem Drucke des Wassers in der Steigröhre im Gleichgewichte sind. Wegen dieses Gegendrucks kann mittelst des Horns nicht mehr Wasser aufgenommen werden, als eine halbe Windung ausfüllt (240. §.); dasselbe gilt von der aufzunehmenden Luft. Stellt man sich nun unter

Figur 28 eine um einen Cylinder gewundene Schlange vor, T. III. F. 28.
so wird, weil die Luft nicht entweichen kann, durch den stärkern Druck des Wassers in der Steigröhre, aus der horizontalen Röhre IG, das Wasser bei A^{VI} in die Windung $A^{VI}B^{V}$ übertreten, und den übrigen Raum, welchen die Luft nicht einnehmen kann, ausfüllen. Eben dieses Zurücktreten des Wassers wird in einem geringern Verhältnisse bei A^{V} in die Windung $A^{V}B^{IIII}$ erfolgen, und so wird dieser Rückgang des Wassers aus jeder hintern Windung in die nächst folgende vordere fortgehen, und immer geringer werden, bis bei A', wo die Luftsäule $A'B$ sich im Gleichgewichte befindet. Bei fortgesetzter Umdrehung der Schlange werden daher durch den beständigen Rückstrom des Wassers die Wassersäulen unter den Luftbogen erhalten, und es kann, wenn die Maschine im Beharrungsstande ist, deshalb aus der letzten Windung nicht mehr Wasser in die Steigröhre treten, als bei jedem Umlaufe in die erste Windung getreten ist, weil wegen des erwähnten Rückstroms bei der Umdrehung, jede hintere Windung der vorhergehenden so viel Wasser abgibt, als sie selbst vorher erhalten hat.

248. §.

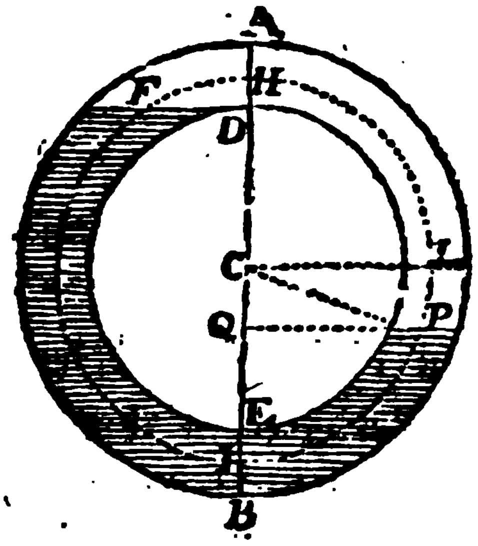
Es wird nun leicht seyn für eine Schlange, welche aus einer cylindrischen um einen Cylinder gewundenen Röhre bestehet, die Abmessungen zu finden.

Wenn

- R den Halbmesser der Windungen (vom Mittelpunkte bis an den Wasser- oder Luftbogen gerechnet)
- r den Halbmesser der Röhre,
- H die Höhe des Wassers in der Steigröhre,
- l' die Länge des Wasserbogens in der letzten Windung, und
- λ die Länge des Luftbogens in der letzten Windung,

bezeichnet, so findet man wie 241. §.

$$\lambda = \pi \frac{k + 2R}{k + H} (R + r)$$



Die centrische Linie in jeder Windung ist

$$= 2\pi\,(R+r)$$

wird daher von dieser Länge λ abgezogen, so wird

$$l' = \pi\,(R+r)\left(2 - \frac{k+2R}{k+H}\right)$$

Nun ist, wenn nebenstehende Figur die letzte Windung vorstellt

Bog. LP = Bog. HFIL — Bog. HF — Bog. FIP oder

$$\beta = \tfrac{3}{2}\pi(R+r) - (R+\tfrac{1}{12}r)\sqrt{\left[\frac{2r}{R+r}\right]} - \pi(R+r)\left(2 - \frac{k+2R}{k+H}\right)$$

oder

$$\beta = \pi(R+r)\left[\frac{k+2R}{k+H} - \tfrac{1}{2}\right] - (R+\tfrac{1}{12}r)\sqrt{\left[\frac{2r}{R+r}\right]}$$

Hieraus findet man wie 242. §. für den Wasserbogen in der letzten Windung, die Druckhöhe

$$h = R + \beta\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\beta}{R+r}\right)^2 + \tfrac{1}{120}\left(\frac{\beta}{R+r}\right)^4\right]$$

249. §.

Die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung und die dazu gehörige Widerstandshöhe h' findet man wie 243. §.

$$h' = \frac{l\,v^2}{4012\,r} = \frac{\pi\,v^2\,(R+r)}{4012\,r}$$

Ist nun h'' die Widerstandshöhe für die letzte Windung, so erhält man auf ähnliche Art

$$h'' = \frac{l'\,v^2}{4012\,r} \text{ oder 248. §.}$$

$$h'' = \frac{\pi\,v^2\,(R+r)}{4012\,.\,r}\left(2 - \frac{k+2R}{k+H}\right)$$

folglich ist die Summe beider Widerstandshöhen, oder

$$h' + h'' = \frac{\pi\,v^2\,(R+r)}{4012\,.\,r}\left[3 - \frac{k+2R}{k+H}\right]$$

Auf gleiche Art findet man die hydraulische Widerstandshöhe in der senkrechten Steigröhre

$$h''' = \frac{H\,v^2}{4012\,.\,r}$$

Setzt man nun die Anzahl der Windungen der Schlange $= n$, so ist die Druckhöhe des Wasserbogens

in der ersten Windung $2R - h'$

in der letzten Windung $h - h''$

und daher eben so, wie 244. §., die Höhe des Wassers in der Steigröhre oder

$$H = \tfrac{1}{2} n \,(2R + h - h' - h'') - h'''$$

und hieraus die Anzahl der Windungen

$$n = \frac{2(H + h''')}{2R + h - (h' + h'')}$$

Die Höhe sämmtlicher Luftsätze $= H'$ also die gesammte Aufförderungshöhe $H + H'$ wird nach 245. §. gefunden.

Eben so, wie 246. §., ist die Wassermenge in einer Minute

$$M = m\pi^2 r^2 (R + r)$$
$$= 30 \cdot v\pi r^2$$

und der Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{M}{30\pi v}\right]}$$

Für den Halbmesser $R + r$ ist das Moment des Wasserbogens in der ersten Windung

$$= (R + r)\, 2R \cdot \pi r^2 \gamma$$

und in der letzten Windung

$$= (R + r)\, h \cdot \pi r^2 \cdot \gamma$$

daher wie 246. §. die zur Umdrehung der Schlange am Halbmesser $R + r$ erforderliche Kraft

$$P = \tfrac{1}{2} \pi r^2 n \,[2R + h]\, \gamma \text{ oder}$$
$$P = \frac{nM}{60 \cdot v} \,[2R + h]\, \gamma.$$

Beispiel. Man soll die cylindrische um einen Cylinder gewundene Schlange einer Spiralpumpe so anordnen, daß in jeder Minute 30 Kubikfuß Wasser auf eine Höhe von 63 Fuß gehoben werden.

Die Geschwindigkeit der ersten Windung sei $= 4$ Fuß, so findet man den Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{30}{30 \cdot \frac{22}{7} \cdot 4}\right]} = 0{,}28 \text{ Fuß}$$

§.

$$+ h'') = \frac{l v^2}{4012 r}\left[3 - \frac{32 + 2R}{32 + H}\right]$$

$$h''' = \frac{H v^2}{4012 r} \text{ und } (248. \text{ §.})$$

$$\frac{32 + 2R}{32 + H} - \tfrac{1}{2}\Big] - (R + \tfrac{11}{12} r)\sqrt{\left[\frac{2r}{R + r}\right]}.$$

an die Werthe von h', h'', h''' und β in die ichung, und nimmt

$$32 + H = y$$

nach gehöriger Zusammenziehung und Ordnung

$$y^2 - Ay - B = 0$$

$$\frac{-(R + \tfrac{11}{12} r)\sqrt{\left[\frac{2r}{R + r}\right]} + v^2(64 - 3nl + 256768 r}{2(4012 r + v^2)}$$

nl (16 + R) ist.

die hydrostatische Druckhöhe in

$$A + \sqrt{[\tfrac{1}{4}A^2 + B]} - 32$$

245. §. die Lufthöhe und die Förderungsen kann.

Beibehaltung der Abmessungen des drostatische Druckhöhe in der Steigen.

$$(R + r) = \tfrac{22}{7} \,.\, 4{,}28 = 13{,}45$$

$$\frac{725 - 1{,}085) + 16(64 - 3.7{,}62.13{,}45) + 71895{,}04}{2\,(4012 . 0{,}28 + 16)}$$

$$= \frac{103866{,}85}{2278{,}72} = 45{,}58$$

$$13{,}45\ (16 + 4) = 2049{,}78$$

atische Druckhöhe

$$+ \sqrt{2569{,}16} - 32 = 41{,}48 \text{ Fuß.}$$

Ist der Halbmesser jeder Windung oder $R = 4$ Fuß, so findet man wie im 246. §. die hydrostatische Höhe in der Steigröhre

$$H = 40{,}26 \text{ Fuß.}$$

Nach dem 248. §. ist der Bogen

$$\beta = \tfrac{22}{7} \cdot 4{,}28 \left[\frac{40}{72{,}26} - \tfrac{1}{2}\right] - \left(4 + \tfrac{11}{14} \cdot 0{,}28\right) \sqrt{\left[\frac{2 \cdot 0{,}28}{4{,}28}\right]}$$
$$= -\,0{,}837 \text{ Fuß,}$$

welches anzeigt, daß der Bogen PL oberhalb des horizontalen Halbmessers CL liegt. Hieraus findet man die Druckhöhe in der letzten Windung

$$h = 4 - 0{,}837 \left[1 - \frac{0{,}837^2}{6 \cdot 4{,}28^2}\right] = 3{,}17 \text{ Fuß.}$$

Für die Widerstandshöhen erhält man

$$h' + h'' = \frac{22 \cdot 16 \cdot 4{,}28}{7 \cdot 4012 \cdot 0{,}28} \left[3 - \frac{40}{72{,}26}\right] = 0{,}464 \text{ Fuß,}$$

$$\text{und } h''' = \frac{40{,}26 \cdot 16}{4012 \cdot 0{,}28} = 0{,}573 \text{ Fuß}$$

daher die Anzahl der Windungen

$$n = \frac{2\,(40{,}26 + 0{,}573)}{8 + 3{,}17 - 0{,}464} = 7{,}62$$

und hieraus die Kraft

$$P = \frac{7{,}62 \cdot 30}{60 \cdot 4} \,[8 + 3{,}17]\, 66 = 702{,}2 \text{ Pfund.}$$

250. §.

Es kann nun noch die Frage entstehen, welches die größte Höhe ist, auf die eine um einen Cylinder gewickelte Spiralpumpe, von gegebenen Abmessungen, das Wasser heben kann.

Die genaue Beantwortung dieser Frage ist mit weitläuftigen Rechnungen verbunden. Will man sich aber mit einer ungefähren Bestimmung der Förderungshöhe begnügen, so dient hiezu nachstehende Auseinandersetzung.

Nach dem 249. §. erhält man

$$nh = 2H - 2nR + n(h' + h'') + 2h'''$$

und 248. §. wenn die auf β folgenden Glieder weggelassen werden

$$nh = nR + n\beta, \text{ daher}$$
$$2H - 3nR + n(h' + h'') + 2h''' = n\beta.$$

Nun ist 249. §.

$$(h' + h'') = \frac{l v^2}{4012 r}\left[3 - \frac{32 + 2R}{32 + H}\right]$$

$$h''' = \frac{H v^2}{4012 r} \text{ und } (248. \text{ §.})$$

$$\beta = l\left[\frac{32 + 2R}{32 + H} - \tfrac{1}{2}\right] - (R + \tfrac{13}{12} r)\sqrt{\left[\frac{2r}{R + r}\right]}.$$

Setzt man die Werthe von h', h'', h''' und β in die vorstehende Gleichung, und nimmt

$$32 + H = y$$

so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung und Ordnung der Gleichung

$$y^2 - A y - B = 0$$

wo alsdann

$$A = \frac{4012\, r n \left[3R - \tfrac{1}{2} l - (R + \tfrac{13}{12} r)\sqrt{\frac{2r}{R+r}}\right] + v^2(64 - 3nl + 256768\, r}{2(4012\, r + v^2)}$$

und

$$B = nl\,(16 + R) \text{ ist.}$$

Man erhält daher die **hydrostatische Druckhöhe** in der Steigröhre

$$H = \tfrac{1}{2} A + \sqrt{[\tfrac{1}{4} A^2 + B]} - 32$$

woraus nach dem 245. §. die Lufthöhe und die Förderungshöhe bestimmt werden kann.

Beispiel. Mit Beibehaltung der Abmessungen des 246. §. die hydrostatische Druckhöhe in der Steigröhre zu finden.

Hier ist $l = \pi (R + r) = \frac{22}{7} . 4{,}28 = 13{,}45$

$$A = \frac{4012 . 0{,}28 . 7{,}26\,(12 - 6{,}725 - 1{,}085) + 16(64 - 3 . 7{,}62 . 13{,}45) + 71895{,}04}{2\,(4012 . 0{,}28 + 16)}$$

$$= \frac{103866{,}85}{2278{,}72} = 45{,}58$$

$$B = 7{,}62 . 13{,}45\ (16 + 4) = 2049{,}78$$

folglich die hydrostatische Druckhöhe

$$H = 22{,}79 + \sqrt{2569{,}16} - 32 = 41{,}48 \text{ Fuß.}$$

251. §.

Aus dem 249. §. berechneten Beispiele, wenn man solches mit dem 246. §. vergleicht, ergibt sich, daß die um einen Kegel gewundene Schlange bei gleicher Förderungshöhe mehr Windungen und weniger Kraft erfordert, als die um einen Cylinder gewundene, wie man sich auch leicht aus Vergleichung der allgemeinen Ausdrücke überzeugen kann.

Die ersten theoretischen Untersuchungen über die Spiralpumpe, befinden sich in den Petersburger Commentarien vom Jahre 1772, von Daniel Bernoulli. Eine Beschreibung der Wirzschen Pumpe, von J. H. Ziegler von Winterthur, ist im dritten Bande der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich vom Jahre 1766 eingerückt. Die vollständigsten Untersuchungen über diese Maschine sind von Nicander in den Neuen Abhandlungen der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1783 und 1784, im vierten und fünften Bande enthalten.

Es wird vielleicht nicht undienlich seyn, die Einrichtung zu erklären, wie nach der Nicanderschen Beschreibung
T.III. das Ende der Schlange GH (Fig. 29) unmittelbar mit
F.29. der Steigröhre IK verbunden wird. Am Ende der Schlange ist dieselbe um so viel verjüngt, daß das Ende der Steigröhre genau hineinpaßt, welches in allen Theilen anschließen, gut abgedreht und eingerieben werden muß. Am Ende der Schlange ist eine Platte ab und an der Steigröhre eine etwas größere Platte cd befestiget und rechtwinklich abgedreht. Auf der Schlange befindet sich ein metallner Ring ef, welcher sich frei um die Röhre drehen kann. Dieser Ring wird mittelst vier Schrauben an der Platte cd der Steigröhre befestiget, wenn zuvor zwischen die Platten, lederne in heißes Oel, Talg und Theer getränkte Scheiben dazwischen gelegt sind. Hiedurch erhält man eine luft- und wasserdichte Verbindung, etwa wie G'H'I', die aber, wenn gleich alle Theile noch so sorgfältig gearbeitet sind, dennoch eine ansehnliche Reibung ver-

ursacht, weshalb noch eine besserere Einrichtung angegeben werden soll.

252. §.

So viel Vorzüge diese Maschine, so weit sie hier beschrieben ist, vor andern Einrichtungen zum Wasserheben hat, so kann sie doch noch dadurch verbessert werden, daß man die letzte Windung GI (Fig. 30) nicht unmittelbar in T. III.
die Steigröhre, sondern zuvor, wie in einem Windkessel F. 30.
ABCD gehen läßt, welcher sich unmittelbar an dem Gefäße ABLM, worin die Schlange ist, befindet. An dem Obertheile des Windkessels wird die Steigröhre K angebracht *). Hiedurch kann man eine bessere mit weniger Reibung verbundene luft- und wasserdichte Befestigung erhalten.

Um die letzte Windung der Schlange am besten mit dem sogenannten Windkessel zu verbinden, dient folgende Einrichtung. Am Ende der letzten Windung I (Figur 31) T. III.
bleibt eine breite Scheibe oder Lappen ab stehen. In der F. 31.
Wand AB des Windkessels wird alsdann eine etwas kleinere kreisförmige Oefnung cd gemacht, und zwischen der Schlange und der Wand des Kessels, eine große lederne Scheibe eg, welche mit einer Oefnung fh versehen ist, an

*) Ich habe ein solches Modell von einer Spiralpumpe mit gläsernen $\frac{3}{8}$ Zoll weiten Röhren, die sich gegen die gläserne Steigröhre etwas verengen, aus eilf Windungen, jede von einem Fuß Durchmesser, verfertigen lassen, welches die beschriebene Einrichtung hat. Noch kann an dem Windkessel desselben, statt der Steigröhre, ein Schlauch mit einem Gußrohre angebracht werden, und damit der Strahl nicht durch das Austreten der Luft unterbrochen wird, so geht die Röhre des Schlauchs bis beinahe auf den Boden des Windkessels, da sie denn nur Wasser aufnimmt; am Obertheile des Kessels ist aber ein Luftventil befindlich, welches durch eine gewundene Feder nur so stark angedrückt wird, damit die zu sehr zusammengepreßte Luft solches öfnen und entweichen kann. Es läßt sich aber bald einsehen, daß hiedurch ein Theil des Effekts verloren geht.

die äußere Wand des Windkessels befestiget, wie solches aus der Figur näher hervorgeht. Wird nun das Ende der Stange gegen diese lederne Scheibe stumpf angesetzt, so ist es nicht leicht möglich, daß zwischen der Scheibe und Windung Luft oder Wasser durchdringen könnte, weil die im Windkessel befindliche Luft und das Wasser die lederne Scheibe sehr stark gegen die metallne Scheibe der Schlange anpressen.

253. §.

Die Schlangen zu den Spiralpumpen lassen sich am besten aus Kupfer arbeiten, wie die Schlangen bei den Brantweinblasen, auch kann der Windkessel aus Kupfer, gegossenem Eisen oder aus dreizölligen Bohlen, welche durch eiserne Bänder zusammengetrieben sind, verfertiget werden. Die Steigröhre kann von Blei, Eisen oder aus hölzernen gebohrten Röhren bestehen, auch können hiezu solche Röhren dienen, welche aus vier Bohlen zusammen geschlagen und durch eiserne Bänder befestiget sind, wobei nur darauf zu sehen ist, daß der quadratförmige Querschnitt dieser Röhren dem Querschnitte der Schlange an Inhalt gleich ist.

Bei der im 238. §. angeführten, in Archangelsky erbauten Spiralpumpe, waren zwei Schlangen von geschlagenem Kupfer nebeneinander gewunden, die Fugen mit Zinn gelöthet, und die eine hatte drei, die andere vier schwedische Zoll Röhrendurchmesser. Jede von den 6½ Windungen der Schlange, welche keinen Kreis, sondern ein Achteck bildeten, hatte 18 schwedische Fuß Durchmesser, und das Rad machte in jeder Minute 4 Umläufe. Es ist leicht einzusehen, daß, wegen der achteckigen Form der Windungen, ein Verlust an Kraft und Hub entstehen mußte.

So einfach und verhältnißmäßig weniger kostbar auch übrigens die Spiralpumpen gegen andere Maschinen sind, welche das Wasser auf eine beträchtliche Höhe heben, so wollte ich doch versuchen, ob man sich nicht anstatt der ku-

ifernen Windungen, einer hölzernen Schlange bedienen könne. Ich ließ zu dem Ende eine hölzerne Schlange von ieben Windungen, jede 2 Zoll weit und 2 Zoll hoch verfertigen, den Durchmesser der Windungen mit Inbegrif der Windungsweite 2 Fuß groß annehmen, und die ganze Schlange auf eine ähnliche Art konstruiren, wie die Figur 33 T.IV. F.33. abgebildete Wasserschnecke, außer daß hiebei keine massive Welle nöthig war. Diese Schlange hat die Gestalt eines an seinem Umfange bekleideten oberschlächtigen Wasserrades; bei der Einmündung ist statt des Horns eine Erweiterung von Blech angebracht, und die letzte Windung endet ich mittelst einer metallnen Röhre in den sogenannten Windkessel (Fig. 30). Bei dem Gebrauche zeigte sich, daß T.III. F.30. die Schlangenwindungen, eben so wie metallne Röhren, ganz wasser- und luftdicht waren, so daß der Verfertigung hölzerner Schlangen, bei übrigens genauer Arbeit, nichts im Wege stehet.

Ein und zwanzigstes Kapitel.

Von der archimedischen Wasserschnecke und der Wasserschraube.

254. §.

Nach denselben Gesetzen, wie man um die Spindel einer Schraube die Schraubengänge zeichnet, kann man sich um einen Cylinder, welcher hier ebenfalls die Spindel (Fusus, *Noyau*) heißen kann, eine Schraubenlinie (Helix, *Helice*) denken und nach derselben um den Cylinder eine gleichweite Röhre so winden, daß ihre centrische Linie in die Schraubenlinie der Spindel fällt, so entstehet daraus eine archimedische Wasserschnecke (Cochlea Archimedis, *Vis d'Archimede*), deren Erfindung man dem Ar-

der nächst kleinern hydrostatischen Druckhöhe ist, daß sich verhält

$$67{,}17 - 58{,}58 : 60 - 58{,}58 = 42 - 36 : d \text{ oder}$$
$$8{,}59 : 1{,}42 = 6 : d \text{ daher}$$
$$d = \frac{1{,}42 \,.\, 6}{8{,}59} = 0{,}99.$$

Es ist daher die gesuchte hydrostatische Höhe

$$= 36 + 0{,}99 = 36{,}99 \text{ Fuß},$$

und die Lufthöhe

$$= 60 - 36{,}99 = 23{,}01 \text{ Fuß}.$$

Sollte die gegebene Länge l einen Bruch enthalten, so kann man die nächste ganze Zahl dafür annehmen und die Rechnung mit Hülfe der Tafel wie vorher ausführen.

246. §.

Die Wassermenge, welche bei jeder Umdrehung der Schlange gehoben wird, ist

$$\pi r^2 l = \pi^2 r^2 (R + r)$$

m macht daher die Schlange in jeder Minute m Umläufe, so findet man für eine Minute die Wassermenge, welche die Maschine hebt, oder

$$M = m \pi^2 r^2 (R + r).$$

Zu einem Umlaufe der Schlange werden $\frac{60}{m}$ Sekunden

v Zeit erfordert, ist daher v die mittlere Geschwindigkeit der ersten Windung, so verhält sich

$$\frac{60}{m} : 1'' = 2\pi (R + r) : v \text{ daher ist}$$
$$m\pi (R + r) = 30 v$$

oder die Wassermenge

$$M = 30 \,.\, v \,.\, \pi r^2$$

und hieraus der Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{M}{30 \,.\, \pi v}\right]}$$

Ist P die Kraft, welche am Halbmesser R + r dem Uebergewichte der Wasserbogen das Gleichgewicht hält, so müßte man die Momente sämmtlicher Wasserbogen zusammen nehmen und durch (R + r) dividiren um P zu finden. Nimmt man hingegen an, daß die Momente gleichförmig

abnehmen, so ist das Moment des Wasserbogens in der ersten Windung

$$= (R+r) \cdot 2R \cdot \pi r^2 \cdot \gamma$$

und in der letzten Windung

$$= (\varrho + r) \cdot h \cdot \pi r^2 \gamma$$

die halbe Summe beider Momente oder das mittlere Moment

$$\tfrac{1}{2}\pi r^2 [2R(R+r) + h(\varrho + r)]\gamma;$$

wird dieses mit der Anzahl der Wasserbogen n multiplizirt, so gibt dies die Summe aller Momente, und diese Summe durch den Halbmesser R + r dividirt, gibt die gesuchte Kraft

$$P = \tfrac{1}{2}\pi r^2 n \left[2R + h\,\frac{\varrho + r}{R + r}\right]\gamma$$

oder wenn man $\frac{M}{30 v}$ anstatt πr^2 setzt

$$P = \frac{nM}{60 v}\left[2R + h\,\frac{\varrho + r}{R + r}\right]\gamma.$$

Beispiel. Man soll die cylindrische um einen Kegel gewickelte Schlange einer Spiralpumpe so anordnen, daß in jeder Minute 30 Kubikfuß Wasser auf eine Höhe von 63 Fuß gehoben werden.

Man setze die Geschwindigkeit der ersten Windung = 4 Fuß, so wird der Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{30}{30 \cdot \frac{22}{7} \cdot 4}\right]} = 0{,}282 \text{ Fuß}.$$

$$= 3{,}38 \text{ Zoll}.$$

Für die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung ist (241. §.), wenn R willkührlich = 4 Fuß angenommen wird

$$l = \pi(R + r) = \tfrac{22}{7} \cdot 4{,}282 = 13{,}46 \text{ Fuß}.$$

Nun ist S = 63, wodurch sich mit Hülfe der Tafeln (245. §.) die hydrostatische Höhe finden läßt. Denn

$$79{,}21 - 61{,}26 : 63 - 61{,}26 = 52 - 39 : 1{,}26$$

daher ist die hydrostatische Höhe

$$H = 39 + 1{,}26 = 40{,}26 \text{ Fuß}$$

Der Halbmesser der letzten Windung ist (241. §.)

$$\varrho = \frac{4{,}28}{2}\left(1 + \frac{32 + 8}{32 + 40{,}26}\right) - 0{,}28 = 3{,}04 \text{ Fuß}.$$

daher (242. §.) der Bogen

$$\beta = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{22}{7} [9{,}12 + 0{,}28 - 8] - (3{,}04 + \tfrac{12}{12} \cdot 0{,}28) \sqrt{\left[\frac{0{,}56}{3{,}32}\right]}$$
$$= -0{,}173$$

Der negative Werth zeigt an, daß β oberhalb des horizontalen Halbmessers CL (Fig. S. 374) liegt.

Hieraus findet man die Druckhöhe in der letzten Windung

$$h = 3{,}04 - 0{,}173 \left[1 - \frac{0{,}173^2}{6 \cdot 3{,}32^2}\right] = 2{,}872 \text{ Fuß.}$$

Für die Widerstandshöhen in der ersten und letzten Windung ist

$$h' + h'' = \frac{22 \cdot 16}{7 \cdot 4012 \cdot 0{,}28} \cdot \frac{4{,}28^2 + 3{,}32^2}{4{,}28^2} = 0{,}281 \text{ Fuß.}$$

Ferner

$$h''' = \frac{40{,}26 \cdot 16}{4012 \cdot 0{,}28} = 0{,}573 \text{ Fuß}$$

daher die Anzahl der Windungen

$$n = \frac{2\,(40{,}26 + 0{,}573)}{8 + 2{,}872 - 0{,}281} = 7{,}71$$

Endlich findet man die erforderliche Kraft

$$P = \frac{7{,}71 \cdot 30}{60 \cdot 4} \left[8 + 2{,}872 \cdot \frac{3{,}32}{4{,}28}\right] 66$$
$$= 649{,}9 \text{ Pfund.}$$

247. §.

Es bleibt nun noch übrig diejenigen Schlangen zu untersuchen, welche aus einer gleich weiten Röhre bestehen, die um einen Cylinder gewunden ist. Sämmtliche Betrachtungen bis an das Ende dieses Kapitels beziehen sich hierauf.

Weil die Luft in den letzten Windungen stärker zusammengepreßt ist als in den erstern, die Gänge aber von einerlei Größe bleiben, so muß näher nach der Steigröhre zu, eine größere Luft- oder Wassermenge als nahe am Horn in jeder Windung vorhanden seyn, wenn die Wasserbogen mit dem Drucke des Wassers in der Steigröhre im Gleichgewichte sind. Wegen dieses Gegendrucks kann mittelst des Horns nicht mehr Wasser aufgenommen werden, als eine halbe Windung ausfüllt (240. §.); dasselbe gilt von der aufzunehmenden Luft. Stellt man sich nun unter

Figur 28 eine um einen Cylinder gewundene Schlange vor, T.III F.28.
so wird, weil die Luft nicht entweichen kann, durch den stärkern Druck des Wassers in der Steigröhre, aus der horizontalen Röhre IG, das Wasser bei A^{VI} in die Windung $A^{VI}B^{V}$ übertreten, und den übrigen Raum, welchen die Luft nicht einnehmen kann, ausfüllen. Eben dieses Zurücktreten des Wassers wird in einem geringern Verhältnisse bei A^{V} in die Windung $A^{V}B^{IIII}$ erfolgen, und so wird dieser Rückgang des Wassers aus jeder hintern Windung in die nächst folgende vordere fortgehen, und immer geringer werden, bis bei A', wo die Luftsäule $A'B$ sich im Gleichgewichte befindet. Bei fortgesetzter Umdrehung der Schlange werden daher durch den beständigen Rückstrom des Wassers die Wassersäulen unter den Luftbogen erhalten, und es kann, wenn die Maschine im Beharrungsstande ist, deshalb aus der letzten Windung nicht mehr Wasser in die Steigröhre treten, als bei jedem Umlaufe in die erste Windung getreten ist, weil wegen des erwähnten Rückstroms bei der Umdrehung, jede hintere Windung der vorhergehenden so viel Wasser abgibt, als sie selbst vorher erhalten hat.

248. §.

Es wird nun leicht seyn für eine Schlange, welche aus einer cylindrischen um einen Cylinder gewundenen Röhre bestehet, die Abmessungen zu finden.

Wenn

R den Halbmesser der Windungen (vom Mittelpunkte bis an den Wasser- oder Luftbogen gerechnet)

r den Halbmesser der Röhre,

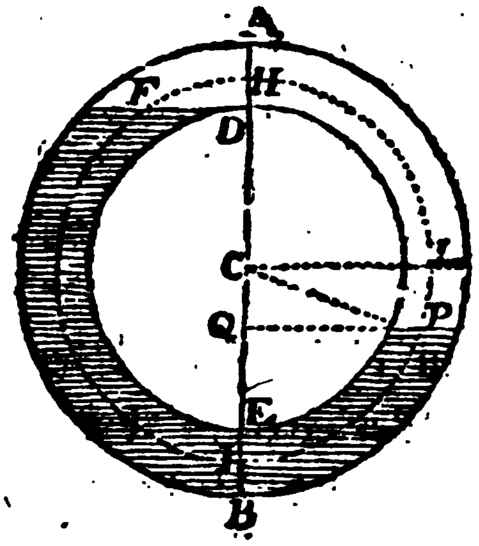
H die Höhe des Wassers in der Steigröhre,

l' die Länge des Wasserbogens in der letzten Windung, und

λ die Länge des Luftbogens in der letzten Windung,

bezeichnet, so findet man wie 241. §.

$$\lambda = \pi \frac{k + 2R}{k + H} (R + r)$$



Die centrische Linie in jeder Windung ist

$$= 2\pi\,(R + r)$$

wird daher von dieser Länge λ abgezogen, so wird

$$l' = \pi\,(R + r)\left(2 - \frac{k + 2R}{k + H}\right)$$

Nun ist, wenn nebenstehende Figur die letzte Windung vorstellt

Bog. LP = Bog. HFIL — Bog. HF — Bog. FIP oder

$$\beta = \tfrac{3}{2}\pi(R + r) - (R + \tfrac{11}{12}r)\sqrt{\left[\frac{2r}{R + r}\right]} - \pi(R + r)\left(2 - \frac{k + 2R}{k + H}\right)$$

oder

$$\beta = \pi(R + r)\left[\frac{k + 2R}{k + H} - \tfrac{1}{2}\right] - (R + \tfrac{11}{12}r)\sqrt{\left[\frac{2r}{R + r}\right]}$$

Hieraus findet man wie 242. §. für den Wasserbogen in der letzten Windung, die Druckhöhe

$$h = R + \beta\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\beta}{R + r}\right)^2 + \tfrac{1}{120}\left(\frac{\beta}{R + r}\right)^4\right]$$

249. §.

Die Länge des Wasserbogens in der ersten Windung und die dazu gehörige Widerstandshöhe h' findet man wie 243. §.

$$h' = \frac{l v^2}{4012\, r} = \frac{\pi v^2 (R + r)}{4012\, r}$$

Ist nun h'' die Widerstandshöhe für die letzte Windung, so erhält man auf ähnliche Art

$$h'' = \frac{l' v^2}{4012\, r} \text{ oder 248. §.}$$

$$h'' = \frac{\pi v^2 (R + r)}{4012 . r}\left(2 - \frac{k + 2R}{k + H}\right)$$

folglich ist die Summe beider Widerstandshöhen, oder

$$h' + h'' = \frac{\pi v^2 (R + r)}{4012 . r}\left[3 - \frac{k + 2R}{k + H}\right]$$

Auf gleiche Art findet man die hydraulische Widerstandshöhe in der senkrechten Steigröhre

$$h''' = \frac{H v^2}{4012 . r}$$

Setzt man nun die Anzahl der Windungen der Schlange $= n$, so ist die Druckhöhe des Wasserbogens

in der ersten Windung $2R - h'$

in der letzten Windung $h - h''$

und daher eben so, wie 244. §., die Höhe des Wassers in der Steigröhre oder

$$H = \tfrac{1}{2} n \, (2R + h - h' - h'') - h'''$$

und hieraus die Anzahl der Windungen

$$n = \frac{2(H + h''')}{2R + h - (h' + h'')}$$

Die Höhe sämmtlicher Luftsätze $= H'$ also die gesammte Aufförderungshöhe $H + H'$ wird nach 245. §. gefunden.

Eben so, wie 246. §., ist die Wassermenge in einer Minute

$$M = m\pi^2 r^2 (R + r)$$
$$= 30 \cdot v\pi r^2$$

und der Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{M}{30 \pi v}\right]}$$

Für den Halbmesser $R + r$ ist das Moment des Wasserbogens in der ersten Windung

$$= (R + r) \, 2R \cdot \pi r^2 \gamma$$

und in der letzten Windung

$$= (R + r) \, h \cdot \pi r^2 \cdot \gamma$$

daher wie 246. §. die zur Umdrehung der Schlange am Halbmesser $R + r$ erforderliche Kraft

$$P = \tfrac{1}{2} \pi r^2 n \, [2R + h] \, \gamma \text{ oder}$$

$$P = \frac{nM}{60 \cdot v} \, [2R + h] \, \gamma.$$

Beispiel. Man soll die cylindrische um einen Cylinder gewundene Schlange einer Spiralpumpe so anordnen, daß in jeder Minute 30 Kubikfuß Wasser auf eine Höhe von 63 Fuß gehoben werden.

Die Geschwindigkeit der ersten Windung sei $= 4$ Fuß, so findet man den Halbmesser der Röhre

$$r = \sqrt{\left[\frac{30}{30 \cdot \frac{22}{7} \cdot 4}\right]} = 0{,}28 \text{ Fuß}$$

Ist der Halbmesser jeder Windung oder $R = 4$ Fuß, so findet man wie im 246. §. die hydrostatische Höhe in der Steigröhre

$$H = 40{,}26 \text{ Fuß.}$$

Nach dem 248. §. ist der Bogen

$$\beta = \tfrac{22}{7} \cdot 4{,}28 \left[\frac{40}{72{,}26} - \tfrac{1}{2}\right] - \left(4 + \tfrac{11}{10} \cdot 0{,}28\right) \sqrt{\left[\frac{2 \cdot 0{,}28}{4{,}28}\right]}$$
$$= -\,0{,}837 \text{ Fuß,}$$

welches anzeigt, daß der Bogen PL oberhalb des horizontalen Halbmessers CL liegt. Hieraus findet man die Druckhöhe in der letzten Windung

$$h = 4 - 0{,}837 \left[1 - \frac{0{,}837^2}{6 \cdot 4{,}28^2}\right] = 3{,}17 \text{ Fuß.}$$

Für die Widerstandshöhen erhält man

$$h' + h'' = \frac{22 \cdot 16 \cdot 4{,}28}{7 \cdot 4012 \cdot 0{,}28} \left[3 - \frac{40}{72{,}26}\right] = 0{,}464 \text{ Fuß,}$$

$$\text{und } h''' = \frac{40{,}26 \cdot 16}{4012 \cdot 0{,}28} = 0{,}573 \text{ Fuß}$$

daher die Anzahl der Windungen

$$n = \frac{2\,(40{,}26 + 0{,}573)}{8 + 3{,}17 - 0{,}464} = 7{,}62$$

und hieraus die Kraft

$$P = \frac{7{,}62 \cdot 30}{60 \cdot 4} \left[8 + 3{,}17\right] 66 = 702{,}2 \text{ Pfund.}$$

250. §.

Es kann nun noch die Frage entstehen, welches die größte Höhe ist, auf die eine um einen Cylinder gewickelte Spiralpumpe, von gegebenen Abmessungen, das Wasser heben kann.

Die genaue Beantwortung dieser Frage ist mit weitläuftigen Rechnungen verbunden. Will man sich aber mit einer ungefähren Bestimmung der Förderungshöhe begnügen, so dient hiezu nachstehende Auseinandersetzung.

Nach dem 249. §. erhält man

$$nh = 2H - 2nR + n(h' + h'') + 2h'''$$

und 248. §. wenn die auf β folgenden Glieder weggelassen werden

$$nh = nR + n\beta, \text{ daher}$$
$$2H - 3nR + n(h' + h'') + 2h''' = n\beta.$$

Nun ist 249. §.

$$(h' + h'') = \frac{l v^2}{4012 r}\left[3 - \frac{32 + 2R}{32 + H}\right]$$

$$h''' = \frac{H v^2}{4012 r} \text{ und } (248. \text{ §.})$$

$$\beta = l\left[\frac{32 + 2R}{32 + H} - \tfrac{1}{2}\right] - (R + \tfrac{13}{12} r)\sqrt{\left[\frac{2r}{R + r}\right]}.$$

Setzt man die Werthe von h', h'', h''' und β in die vorstehende Gleichung, und nimmt

$$32 + H = y$$

so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung und Ordnung der Gleichung

$$y^2 - A y - B = 0$$

wo alsdann

$$A = \frac{4012\, r n\left[3R - \tfrac{1}{2} l - (R + \tfrac{13}{12} r)\sqrt{\frac{2r}{R + r}}\right] + v^2(64 - 3nl + 256768\, r}{2(4012\, r + v^2)}$$

und

$$B = nl\,(16 + R) \text{ ist.}$$

Man erhält daher die hydrostatische Druckhöhe in der Steigröhre

$$H = \tfrac{1}{2} A + \sqrt{[\tfrac{1}{4} A^2 + B]} - 32$$

woraus nach dem 245. §. die Lufthöhe und die Förderungshöhe bestimmt werden kann.

Beispiel. Mit Beibehaltung der Abmessungen des 246. §. die hydrostatische Druckhöhe in der Steigröhre zu finden.

Hier ist $l = \pi\,(R + r) = \frac{22}{7} \cdot 4{,}28 = 13{,}45$

$$A = \frac{4012 \cdot 0{,}28 \cdot 7{,}26\,(12 - 6{,}725 - 1{,}085) + 16(64 - 3 \cdot 7{,}62 \cdot 13{,}45) + 71895{,}04}{2\,(4012 \cdot 0{,}28 + 16)}$$

$$= \frac{103866{,}85}{2278{,}72} = 45{,}58$$

$$B = 7{,}62 \cdot 13{,}45\,(16 + 4) = 2049{,}78$$

folglich die hydrostatische Druckhöhe

$$H = 22{,}79 + \sqrt{2569{,}16} - 32 = 41{,}48 \text{ Fuß.}$$

251. §.

Aus dem 249. §. berechneten Beispiele, wenn man solches mit dem 246. §. vergleicht, ergibt sich, daß die um einen Kegel gewundene Schlange bei gleicher Förderungshöhe mehr Windungen, und weniger Kraft erfordert, als die um einen Cylinder gewundene, wie man sich auch leicht aus Vergleichung der allgemeinen Ausdrücke überzeugen kann.

Die ersten theoretischen Untersuchungen über die Spiralpumpe, befinden sich in den Petersburger Commentarien vom Jahre 1772, von Daniel Bernoulli. Eine Beschreibung der Wirzschen Pumpe, von J. H. Ziegler von Winterthur, ist im dritten Bande der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich vom Jahre 1766 eingerückt. Die vollständigsten Untersuchungen über diese Maschine sind von Nicander in den Neuen Abhandlungen der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1783 und 1784, im vierten und fünften Bande enthalten.

Es wird vielleicht nicht undienlich seyn, die Einrichtung zu erklären, wie nach der Nicanderschen Beschreibung
T.III. das Ende der Schlange GH (Fig. 29) unmittelbar mit
F.29. der Steigröhre IK verbunden wird. Am Ende der Schlange ist dieselbe um so viel verjüngt, daß das Ende der Steigröhre genau hineinpaßt, welches in allen Theilen anschließen, gut abgedreht und eingerieben werden muß. Am Ende der Schlange ist eine Platte ab und an der Steigröhre eine etwas größere Platte cd befestiget und rechtwinklich abgedreht. Auf der Schlange befindet sich ein metallner Ring ef, welcher sich frei um die Röhre drehen kann. Dieser Ring wird mittelst vier Schrauben an der Platte cd der Steigröhre befestiget, wenn zuvor zwischen die Platten, lederne in heißes Oel, Talg und Theer getränkte Scheiben dazwischen gelegt sind. Hiedurch erhält man eine luft- und wasserdichte Verbindung, etwa wie G'H'I', die aber, wenn gleich alle Theile noch so sorgfältig gearbeitet sind, dennoch eine ansehnliche Reibung ver-

ursacht, weshalb noch eine bessere Einrichtung angegeben werden soll.

252. §.

So viel Vorzüge diese Maschine, so weit sie hier beschrieben ist, vor andern Einrichtungen zum Wasserheben hat, so kann sie doch noch dadurch verbessert werden, daß man die letzte Windung GI (Fig. 30) nicht unmittelbar in die Steigröhre, sondern zuvor, wie in einem Windkessel ABCD gehen läßt, welcher sich unmittelbar an dem Gefäße ABLM, worin die Schlange ist, befindet. An dem Obertheile des Windkessels wird die Steigröhre K angebracht *). Hiedurch kann man eine bessere mit weniger Reibung verbundene luft- und wasserdichte Befestigung erhalten. T.III. F.30.

Um die letzte Windung der Schlange am besten mit dem sogenannten Windkessel zu verbinden, dient folgende Einrichtung. Am Ende der letzten Windung I (Figur 31) bleibt eine breite Scheibe oder Lappen ab stehen. In der Wand AB des Windkessels wird alsdann eine etwas kleinere kreisförmige Oefnung cd gemacht, und zwischen der Schlange und der Wand des Kessels, eine große lederne Scheibe eg, welche mit einer Oefnung fh versehen ist, an T.III. F.31.

*) Ich habe ein solches Modell von einer Spiralpumpe mit gläsernen ⅜ Zoll weiten Röhren, die sich gegen die gläserne Steigröhre etwas verengen, aus eilf Windungen, jede von einem Fuß Durchmesser, verfertigen lassen, welches die beschriebene Einrichtung hat. Noch kann an dem Windkessel desselben, statt der Steigröhre, ein Schlauch mit einem Gußrohre angebracht werden, und damit der Strahl nicht durch das Austreten der Luft unterbrochen wird, so geht die Röhre des Schlauchs bis beinahe auf den Boden des Windkessels, da sie denn nur Wasser aufnimmt; am Obertheile des Kessels ist aber ein Luftventil befindlich, welches durch eine gewundene Feder nur so stark angedrückt wird, damit die zu sehr zusammengepreßte Luft solches öfnen und entweichen kann. Es läßt sich aber bald einsehen, daß hiedurch ein Theil des Effekts verloren geht.

die äußere Wand des Windkessels befestiget, wie solches aus der Figur näher hervorgeht. Wird nun das Ende der Stange gegen diese lederne Scheibe stumpf angesetzt, so ist es nicht leicht möglich, daß zwischen der Scheibe und Windung Luft oder Wasser durchdringen könnte, weil die im Windkessel befindliche Luft und das Wasser die lederne Scheibe sehr stark gegen die metallne Scheibe der Schlange anpressen.

253. §.

Die Schlangen zu den Spiralpumpen lassen sich am besten aus Kupfer arbeiten, wie die Schlangen bei den Brantweinblasen, auch kann der Windkessel aus Kupfer, gegossenem Eisen oder aus dreizölligen Bohlen, welche durch eiserne Bänder zusammengetrieben sind, verfertiget werden. Die Steigröhre kann von Blei, Eisen oder aus hölzernen gebohrten Röhren bestehen, auch können hiezu solche Röhren dienen, welche aus vier Bohlen zusammen geschlagen und durch eiserne Bänder befestiget sind, wobei nur darauf zu sehen ist, daß der quadratförmige Querschnitt dieser Röhren dem Querschnitte der Schlange an Inhalt gleich ist.

Bei der im 238. §. angeführten, in Archangelsky erbauten Spiralpumpe, waren zwei Schlangen von geschlagenem Kupfer nebeneinander gewunden, die Fugen mit Zinn gelöthet, und die eine hatte drei, die andere vier schwedische Zoll Röhrendurchmesser. Jede von den 6½ Windungen der Schlange, welche keinen Kreis, sondern ein Achteck bildeten, hatte 18 schwedische Fuß Durchmesser, und das Rad machte in jeder Minute 4 Umläufe. Es ist leicht einzusehen, daß, wegen der achteckigen Form der Windungen, ein Verlust an Kraft und Hub entstehen mußte.

So einfach und verhältnißmäßig weniger kostbar auch übrigens die Spiralpumpen gegen andere Maschinen sind, welche das Wasser auf eine beträchtliche Höhe heben, so wollte ich doch versuchen, ob man sich nicht anstatt der ku-

pfernen Windungen, einer hölzernen Schlange bedienen könne. Ich ließ zu dem Ende eine hölzerne Schlange von sieben Windungen, jede 2 Zoll weit und 2 Zoll hoch verfertigen, den Durchmesser der Windungen mit Inbegrif der Windungsweite 2 Fuß groß annehmen, und die ganze Schlange auf eine ähnliche Art konstruiren, wie die Figur 33 T.IV.
abgebildete Wasserschnecke, außer daß hiebei keine massive F.33.
Welle nöthig war. Diese Schlange hat die Gestalt eines an seinem Umfange bekleideten oberschlächtigen Wasserrades; bei der Einmündung ist statt des Horns eine Erweiterung von Blech angebracht, und die letzte Windung endet sich mittelst einer metallnen Röhre in den sogenannten Windkessel (Fig. 30). Bei dem Gebrauche zeigte sich, daß T.III.
die Schlangenwindungen, eben so wie metallne Röhren, F.30.
ganz wasser- und luftdicht waren, so daß der Verfertigung hölzerner Schlangen, bei übrigens genauer Arbeit, nichts im Wege stehet.

Ein und zwanzigstes Kapitel.

Von der archimedischen Wasserschnecke und der Wasserschraube.

---

254. §.

Nach denselben Gesetzen, wie man um die Spindel einer Schraube die Schraubengänge zeichnet, kann man sich um einen Cylinder, welcher hier ebenfalls die Spindel (Fusus, *Noyau*) heißen kann, eine Schraubenlinie (Helix, *Helice*) denken und nach derselben um den Cylinder eine gleichweite Röhre so winden, daß ihre centrische Linie in die Schraubenlinie der Spindel fällt, so entstehet daraus eine archimedische Wasserschnecke (Cochlea Archimedis, *Vis d'Archimede*), deren Erfindung man dem Ar-

chimed zuschreibt. Hält man die Schnecke aufwärts gerichtet, so heißt die untere Oefnung der Röhre die Einflußöfnung, und die obere, die Ausflußöfnung. Diejenige Fläche, welche senkrecht auf der Axe der Spindel die Einflußöfnung in ihrem Schwerpunkte schneidet, und durch die Projektion begränzt wird, ist die Grundfläche der Schnecke.

So vielmal die Röhre um die Spindel gewunden ist, so viel Windungen (Convolutiones, *Circonvolutions, Tours*) hat die Schnecke. Die Windung bei der Einflußöfnung heißt die erste, die folgende die zweite u. s. w. Die Entfernung der centrischen Linie einer Windung von der nächst folgenden, parallel mit der Axe gemessen, ist die Höhe eines Schneckenganges. Wenn nur eine Röhre um die Spindel gewunden ist, so heißt die Schnecke eine einfache, sind aber zwei oder drei Röhren nebeneinander umgewickelt, so daß zwei oder drei Ein- und Ausflußöfnuugen entstehen, so wird sie eine doppelte oder dreifache, oder eine Schnecke von zwei, drei Gängen genannt.

Außerdem, daß man eine Röhre um die Spindel winden kann, so läßt sich eine Wasserschnecke auch dadurch bewerkstelligen, daß man nach der Schraubenlinie in die Spindel Vertiefungen macht und Splisse oder Breterchen darin so einpfalzt, damit Linien, welche man in diesen Breterchen nach der Axe der Spindel ziehet, auf dieser Axe senkrecht stehen. Werden diese Breterchen in gleicher Entfernung von der Spindel abgeschnitten und schließen sich dicht aneinander, so wird dadurch ein Schneckengang gebildet, der, wenn an dem äußern Umfange eine Bekleidung mit schmalen Bretern oder ein Mantel (Faß oder Tonne) befestiget wird, wodurch die Räume zwischen dem Schneckengange umschlossen werden, ebenfalls eine Wasserschnecke bildet, die man gewöhnlich Tonnenmühle nennt.

Die Wasserschrauben sind von den Wasserschnekken oder Tonnenmühlen darin verschieden, daß bei ihnen

die Bekleidung nicht an dem Schneckengange befestiget ist, sondern unbeweglich bleibt, wenn sich die Spindel mit den Schneckengängen um ihre Axe drehet. Die Höhlung, in welcher sich die Schraube bewegt, heißt der Trog oder Kumm, welcher so genau wie möglich um die untere Hälfte der Schraube schließt, und auf beiden Seiten noch eine geringe vertikale Erhöhung erhält.

Die 32. Figur zeigt die Abbildung einer Wasserschnecke T. IV. mit einer umgewundenen Röhre; Figur 33 einer Tonnen- F. 32. mühle, und Figur 34 von einer Wasserschraube, mit einem 33. 34. gemauerten Trog.

Bei den Tonnenmühlen und Wasserschnecken ist die Höhe des Schneckenganges von der Höhe der Windungsweite zu unterscheiden, weil letztere die Weite einer Windung im Lichten, senkrecht auf den Bretern des Schneckenganges gemessen, bezeichnet, da erstere parallel mit der Axe der Schnecke gemessen wird. Die Breite der Windung ist diejenige lichte Weite derselben, welche in einer Ebene durch die Axe der Schnecke vom Umfange bis an die Spindel, mit den Breterchen parallel gemessen wird, oder die Länge der Breterchen des Schneckenganges, so weit sie aus der Spindel hervorragen.

255. §.

Wenn eine Schnecke irgend eine Stellung erhalten hat, so gilt in Absicht der Lage von jeder folgenden Schneckenwindung, was von der ersten gilt. Ist AFF′ (Figur 32) T. IV. die erste Windung, so wird erfordert, wenn in derselben F. 32. Wasser stehen bleiben soll, ohne durch die Oefnung A zurück zu fließen, daß ein Theil der Windung bei M niedriger stehe, als einer der vorhergehenden bei L. Wäre kein Theil niedriger wie der vorhergehende nach A zu, so könnte kein Wasser in der ersten Windung stehen bleiben, und weil dieses von jeder folgenden gilt, so müßte unter diesen Umständen eine kleine Kugel, die man bei E in die Ausflußöfnung setzt, durch sämmtliche Windungen und endlich bei A wieder anlaufen.

Hienach ist es sehr wichtig, für jede gegebene Lage der Schnecke zu wissen, ob es, entfernter von der Ausmündung, in den Windungen einen Punkt gibt, der niedriger liegt, als der vorhergehende nach der Ausmündung zu, weil ohne diese Bedingung die Schnecke bei der Umdrehung kein Wasser in der Windung behält.

Liegt hingegen M, M′, M″.... niedriger wie L, L′, L″..., so muß, wenn die Oefnung A unter den Wasserspiegel WW kommt, nach hydrostatischen Grundsätzen, ein Theil der ersten Windung mit Wasser angefüllt werden, und weil bei fortgesetzter Umdrehung der Spindel dieses Wasser nicht zurücktreten kann, so muß es so lange in die Höhe steigen, bis es bei E ausfließt.

256. §.

T. III. F. 55. Ist die Spindel ABCD (Figur 55) gegen den Horizont geneigt, und man legt durch den tiefsten Punkt B in der Grundfläche derselben eine horizontale Ebene EE″, so entstehet die Frage, wie hoch irgend ein Punkt M in der centrischen Linie der ersten Windung AFF′ über der Horizontalebene EE″ liege. Diese Höhe sei MN; ferner

α α = QAL der Winkel, welchen die Schneckenlinie, oder die centrische Linie der Windung, mit dem Umfange der Grundfläche einschließt (wenn man sich beide Linien in eine den Cylinder tangentirende Ebene gelegt vorstellt), welcher hier der **Windungswinkel** heißen soll.

β β = CBE der **Standwinkel**, unter welchem die Axe der Spindel gegen den Horizont geneigt ist.

Man ziehe auf die Oberfläche des Cylinders die Linie MP mit der Axe O′O parallel, und es sei

x x der Bogen für den Halbmesser = 1, welcher zum Bogen AP in der Grundfläche der Spindel gehört, und die Projektion des Punkts M auf der Grundfläche bestimmt,

so ist, wenn

R R = AO den Halbmesser der Spindel bis zur centrischen Linie bezeichnet

$$\text{Bogen } AP = R \cdot x$$ T. IV. F. 56.

Ferner sei PR senkrecht auf MN und Pn senkrecht auf der Ebene EE″, so ist MPnN eine vertikale Fläche und $\angle MPR = \beta$.

Aber $PM = R \cdot x \operatorname{Tgt}\alpha$ und

$$MR = PM \operatorname{Sin}\beta = R x \operatorname{Tgt}\alpha \operatorname{Sin}\beta$$

Man ziehe PH auf AB und HS auf EE″ senkrecht, so ist $\angle HBS = 90° - \beta$ also

$$HS = BH \cdot \operatorname{Cos}\beta$$

und weil HP, PR horizontal und HS, Pn, RN vertikal sind, so ist $HS = Pn = RN$, daher

$$MN = MR + RN = R \cdot x \operatorname{Tgt}\alpha \operatorname{Sin}\beta + BH \cdot \operatorname{Cos}\beta.$$

Nun ist

$$BH = 2R - AH = 2R - \operatorname{Sin.vers} x$$
$$= 2R - R(1 - \operatorname{Cos} x) = R + R \operatorname{Cos} x$$

folglich die gesuchte Höhe des Punkts M über der Horizontalebene EE″, oder

$$MN = R \cdot x \operatorname{Tgt}\alpha \operatorname{Sin}\beta + R(1 + \operatorname{Cos} x) \operatorname{Cos}\beta.$$

257. §.

Derjenige Werth von x, welcher für MN die kürzeste unter allen zunächst gelegenen Linien oder ein Minimum gibt, bestimmt den niedrigsten Punkt in der ersten Windung; so wie derjenige Werth von x, welcher für MN die längste Linie unter den zunächst gelegenen oder ein Maximum gibt, den höchsten unter den nächst vorhergehenden und darauf folgenden Punkten der ersten Windung über dem Horizonte EE″ bestimmt.

Für beide Fälle findet man *)

$$\operatorname{Sin} x = \operatorname{Tgt}\alpha \cdot \operatorname{Tgt}\beta$$

wovon man sich leicht durch Proberechnungen überzeugen kann, so bald α und β bestimmte Werthe erhalten.

---

*) $\frac{d(MN)}{dx} = R \operatorname{Tgt}\alpha \operatorname{Sin}\beta - R \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}\beta = 0$ also

$$\operatorname{Tgt}\alpha \operatorname{Sin}\beta = \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}\beta \text{ oder}$$
$$\operatorname{Sin} x = \operatorname{Tgt}\alpha \operatorname{Tgt}\beta$$

Z. IV. F. 38. Weil aber ein jeder Sinus zu einem spitzen und stumpfen Winkel (welche sich zu 180 Grad ergänzen) zugleich gehört, so folgt daraus, daß der Bogen x zwei Werthe hat, wovon der eine in den ersten, und der andere in den zweiten Quadranten des Bogens APB fällt. Der Bogen für x im ersten Quadranten, gibt für MN ein Maximum, und im zweiten Quadranten ein Minimum.

258. §.

Wenn $\text{Tgt}\,\alpha . \text{Tgt}\,\beta > 1$ ist, so wird

$$\text{Sin}\,x > 1$$

welches unmöglich ist, weil kein Sinus größer als 1 werden kann; es gibt daher auch in diesem Falle weder ein Maximum noch Minimum.

Für $\text{Tgt}\,\alpha . \text{Tgt}\,\beta = 1$ ist

$$\text{Sin}\,x = 1 = \text{Sin}\,90^{\circ}$$

also gehört der Bogen x in diesem Falle zu einem rechten Winkel, und weil nun x nur einen Werth haben kann, so müßte MN für $\text{Sin}\,x = 1$ ein Maximum und Minimum zugleich seyn; daher findet keins von beiden Statt, und man erhält für diesen Bogen einen Wendungspunkt.

In den Windungen kann aber nur dann Wasser bleiben, wenn ein Theil derselben niedriger als der vorher-

---

Um nun zu bestimmen, in wie fern dieser Ausdruck für ein Maximum oder Minimum gilt, so erhält man nach bekannten Lehren

$$\frac{d^2\,(MN)}{dx^2} = -\,R\,\text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,\beta$$

So lange also Cos x positiv ist, wird der ganze Ausdruck negativ und man erhält ein Maximum; welches Statt findet, wenn x im ersten oder vierten Quadranten von A fällt. Wird aber Cos x negativ, welches nur geschehen kann, wenn x in den zweiten oder dritten Quadranten von A fällt, ein Minimum. Es können daher nur im ersten und vierten Quadranten Maxima und im zweiten oder dritten Quadranten Minima enthalten seyn. Soll x in den dritten oder vierten Quadranten fallen, so müßte $\text{Tgt}\,\alpha\ \text{Tgt}\,\beta$ negativ werden; weil dieses aber nie der Fall ist, so kann auch x nie in dem dritten oder vierten Quadranten liegen, oder es gibt daselbst weder ein Maximum noch ein Minimum.

gehende liegt, es läßt sich daher einsehen, daß die Schnecke nur dann Wasser schöpft, wenn es für MN ein Minimum gibt.

Wäre $Tg.\alpha . Tgt\beta < 1$ so wird

$$\mathrm{Sin}\,x < 1 \text{ und weil}$$
$$\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Sin}\,(\pi - x)$$

so fällt der zu x gehörige Bogen von dem Umfange der Grundfläche in den ersten Quadranten und gibt ein Maximum, so wie $\pi - x$ in den zweiten Quadranten fällt und ein Minimum gibt.

Nun war $Tgt\alpha . Tgt\beta < 1$ also

$$Tgt\alpha < \frac{1}{Tgt\beta} \text{ oder } < \mathrm{Cot}\,\beta \text{ oder}$$
$$Tgt\alpha < Tgt\,(90^\circ - \beta) \text{ daher}$$
$$\alpha < 90^\circ - \beta \text{ folglich}$$
$$\alpha + \beta < 90 \text{ Grad,}$$

d. h. **wenn die Schnecke Wasser schöpfen soll, so müssen die Winkel α und β, zusammengenommen, weniger als 90 Grad betragen.**

259. §.

Wenn für den Bogen AQ (Fig. 35) in dem dazu gehörigen Punkte L der centrischen Linie, LN ein Maximum wird, und man setzt, daß T. IV. F. 35.

δ denjenigen Bogen für den Halbmesser $= 1$ bezeichne, welcher zum Bogen AQ gehört,

so ist $AQ = R.\delta$ und δ ein Werth von x im ersten Quadranten, daher

$$\mathrm{Sin}\,\delta = Tgt\alpha . Tgt\beta.$$

Man nehme

$$BP = AQ = APB - AP$$

und ziehe aus P die Linie PM bis an die centrische Linie mit O'O parallel, so ist

$$\mathrm{Sin}\,AQ = \mathrm{Sin}\,AP,$$

daher ist AP der Bogen in der Grundfläche für das Minimum und L liegt am **höchsten**, M aber am **niedrigsten** unter den zunächst gelegenen Punkten der centrischen Linie, in der ersten Windung.

T. IV. F. 55. Zieht man durch L eine Horizontallinie durch die Spindel, bis solche die centrische Linie in l trift, so wird dadurch der Bogen LMFl abgeschnitten, und wenn man sich anstatt der centrischen Linie eine sehr dünne Röhre denkt, so kann man LMFl den wasserhaltenden Bogen (Arcus hydrophorus) nennen.

Man ziehe QG senkrecht auf den Durchmesser AB, so wird erfordert, wenn bei der Umdrehung der Schnecke, jede obere Windung einen eben so großen wasserhaltenden Bogen enthalten soll, daß die Oberfläche des Wassers bis an den Punkt G in der Grundfläche, welcher der Normalpunkt heißen kann, reiche. Denn wenn bei der Umdrehung der Spindel die Einflußöfnung A von B nach Q geht, so wird sich dieser Bogen allmählich mit Wasser füllen, und so bald A in Q ist, genau so viel Wasser geschöpft seyn, als den Bogen LMFl ausfüllt, welches sogleich dadurch einleuchtend wird, wenn man sich diesen Bogen, mit sich parallel an Q gelegt vorstellt. Kommt A über Q, so schöpft die Schnecke so viel Luft, als zwischen zwei wasserhaltenden Bögen enthalten ist, und so kann regelmäßig immer bei jeder Umdrehung so viel Wasser geschöpft werden, als die Ausfüllung des wasserhaltenden Bogens erfordert.

Wenn hingegen die Oberfläche des Wassers nicht bis G reicht, sondern nur etwa bis O, so kann nicht der ganze wasserhaltende Bogen gefüllt werden, und man erhält eine geringere Wassermenge in jeder Windung.

Liegt aber der höchste Punkt der Oefnung A unter der Oberfläche des Wassers, so kann die Schnecke keine Luft schöpfen und die ganze Röhre, so weit sie unter dem Wasserspiegel liegt, füllt sich nach hydrostatischen Gründen mit Wasser. Wird nun die Spindel umgedreht, so schießt etwas Wasser aus der angefüllten Windung in die nächstfolgende über. Bei dem weitern Fortrücken des übergeschossenen Wassers wird die Luft zwischen diesem und dem untern verdünnt; neue Luft tritt durch das übergeflossene Wasser von oben herunter, neues Wasser schießt über, und

wenn bei der Umdrehung die Luftsäule in einer Windung unter die Grundfläche des Wassers in die nächst unterhalb vorhergehende gänzlich mit Wasser angefüllte Windungen kommt, tritt sie nach oben und treibt neues Wasser vor. Sind auf diese Art sämmtliche obere Windungen mit Wasser und Luft gefüllt, so tritt bei der Umdrehung allmählich die obere Luft durch die Wasserbögen nach den untern Windungen, und setzt die verdünnte Luft zwischen den Wasserbögen mit der äußern ins Gleichgewicht. Aber nach jeden drei oder vier Umdrehungen, strömt die Luft so heftig in die Ausflußöfnung und durch alle Wasserbögen nach den untern Windungen hin, daß dadurch eine heftige Erschütterung in sämmtlichen Wasserbögen entstehet. Hierdurch und wegen der unregelmäßigen Bewegung des Wassers kann ebenfalls nicht so viel Wasser jedesmal ausgegossen werden, als der wasserhaltende Bogen einer Windung Inhalt hat; soll daher die größte Wassermenge bei der Schnecke T. IV.
geschöpft werden, so wird erfordert, daß der F. 38.
Wasserspiegel bis an den Normalpunkt G reiche, wie solches die nachstehenden Versuche bestätigen. Dasselbe gilt von den Tonnenmühlen.

Die Wasserschraube macht hievon eine Ausnahme, weil solche entweder nach oben offen, oder selbst wenn sie bekleidet ist, doch zwischen der Bekleidung und den Schraubengängen so viel Zwischenraum hat, daß die Luft die Räume zwischen den Wasserbögen ausfüllen kann. Die Wasserschraube gibt daher eben so viel Wasser, man mag allein ihre Grundfläche, oder mehrere Windungen der untern Schraubengänge unter den Wasserspiegel bringen, wenn nur der wasserhaltende Bogen nicht aus der Oberfläche des Wassers kommt.

Anmerk. Um mit der Erfahrung zu vergleichen, wie viel Wasser eine Schnecke bei verschiedener Eintauchung der Einflußöfnung gibt, ließ ich eine gläserne 0,25 Zoll weite Röhre um einen Cylinder winden, so daß der Durchmesser der centrischen Linie 1,6 Zoll groß, und die ganze Schnecke von 15

Windungen, von Oefnung zu Oefnung 15 Zoll lang war. Hiernach ist der Winkel $\alpha = 11\frac{1}{4}$ Grad, und bei sämmtlichen Versuchen war die Schnecke so gelegt, daß ihre Axe mit dem Horizonte einen Winkel β von 31 Grad einschloß.

Bei jedem Versuche wurde zuvor das Wasser in der Schnecke in den Beharrungsstand gebracht, man machte jedesmal 100 Umdrehungen in Zeit von 5 Minuten, und wenn die erhaltene und genau ausgemessene Wassermenge durch 100 dividirt wurde, entstand die Wassermenge bei jeder Umdrehung, welche dem Wasserbogen in jeder Windung gleich ist.

I. Versuch. Die Einflußöfnung in ihrem tiefsten Stande war genau unter der Oberfläche des Wassers.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,0916 Kubikzoll.

II. Versuch. Wenn der vierte Theil von der Grundfläche der Spindel (254. §.) im Wasser eingetaucht war.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1145 Kubikzoll.

III. Versuch. Der Wasserspiegel stand bis an die Mitte der Grundfläche.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1469 Kubikzoll.

T. IV. F. 35. IV. Versuch. Der Wasserspiegel stand in der Mitte zwischen dem Mittelpunkte O (Figur 35) und dem Normalpunkte G.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1570 Kubikzoll.

V. Versuch. Die Oberfläche des Wassers stand genau gegen den Normalpunkt G.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1796 Kubikzoll.

VI. Versuch. Wenn die Oefnung am höchsten stand, so lag der Wasserspiegel zwischen dem Mittelpunkte der Oefnung und dem Normalpunkte.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1698 Kubikzoll.

VII. Versuch. Die Oefnung in ihrem höchsten Stande lag frei über dem Wasserspiegel.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,1632 Kubikzoll.

VIII. Versuch. Das Wasser stand etwas in der Oefnung, so daß nur wenig Luft geschöpft werden konnte.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,0905 Kubikzoll.

IX. Versuch. Die Oefnung in ihrem höchsten Stande war so weit unter dem Wasser, daß sie keine Luft schöpfen konnte, und außerdem waren drei Windungen der Schnecke mit Wasser bedeckt.

Wassermenge bei jeder Umdrehung 0,0243 Kubikzoll.

Diese Versuche, obgleich nur sehr im Kleinen angestellt, ersetzen dennoch durch die Genauigkeit, mit welcher die Werkzeuge verfertiget sind, den Mangel an Größe, und sind hinreichend, die vorgetragenen Sätze zu erläutern.

260. §.

Die Entfernung des Normalpunkts G vom höchsten Punkte A der Grundfläche läßt sich leicht für jede Lage der Schnecke bestimmen. Denn es ist (Figur 35) $AO = R$ und Bogen $AQ = R.\delta$ daher die gesuchte Entfernung T.IV. F.35.

$$AG = R \text{ Sin. vers } \delta.$$

261. §.

Vom entferntesten Punkte l des wasserhaltenden Bogens, ziehe man lQ' auf die Grundfläche senkrecht, setze daß

L die Länge des wasserhaltenden Bogens LMFl, L.

λ die Länge desjenigen Bogens für den Halbmesser 1 bezeichne, welcher zum Bogen $APBQ'$ gehört λ

und denke sich die krumme Oberfläche des Cylinders ABCD in eine Ebene ausgebreitet, so ist

$$AL = AQ.\text{Sec}\,\alpha = R.\delta.\text{Sec}\,\alpha$$
$$ALMFl = APBQ'.\text{Sec}\,\alpha \text{ oder}$$
$$L + AL = R.\lambda.\text{Sec}\,\alpha \text{ daher}$$
$$L = R(\lambda - \delta)\text{ Sec}\,\alpha.$$

Sobald nun λ bekannt ist, läßt sich mit Hülfe der übrigen gegebenen Größen, die Länge des wasserhaltenden Bogens L bestimmen.

Nach (256. §.) ist die Höhe des Punkts L über der Fläche EE'' oder

$$LN' = R\delta \text{ Tgt}\,\alpha \text{ Sin}\,\beta + R(1 + \text{Cos}\,\delta)\text{ Cos}\,\beta$$

und eben so die Höhe von l über dieser Fläche

$$ln' = R\lambda \text{ Tgt}\,\alpha \text{ Sin}\,\beta + R(1 + \text{Cos}\,\lambda)\text{ Cos}\,\beta$$

daher weil L und l in einerlei Horizontalebene liegen (259. §.) so muß $LN' = ln'$ seyn oder

$$\lambda \text{ Tgt}\,\alpha \text{ Sin}\,\beta + \text{Cos}\,\lambda \text{ Cos}\,\beta = \delta \text{ Tgt}\,\alpha \text{ Sin}\,\beta + \text{Cos}\,\delta.\text{Cos}\,\beta$$

Dividirt man durch $\text{Cos}\,\beta$ und setzt

$$\text{Tgt}\,\alpha \text{ Tgt}\,\beta = T$$

so wird

$$\lambda T + \cos\lambda = \delta . T + \cos\delta \; .$$

weil nun δ und T bekannte Größen sind, so kommt es darauf an, aus dieser Gleichung den Werth von λ zu finden. Dieses läßt sich aber nicht ohne Weitläuftigkeit durch fortgesetztes Proberechnen bewerkstelligen, wie man sich aus den Karstenschen Lehrbüchern, wo auf diese Art gerechnet ist, überzeugen kann, weshalb man, um auf einem direkten Wege die Länge des wasserhaltenden Bogens zu finden, für die meisten Fälle annehmen kann, daß der Bogen λ nicht viel von der halben Peripherie verschieden ist. Man setze daher, um zu einem allgemeinen Ausdrucke für λ zu gelangen, daß

$\lambda = \pi + \omega$ ist, so wird

$\omega = \lambda - \pi$

und weil *)

$$\cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{24} - \frac{\omega^6}{720} + \ldots,$$

so ist, wenn man nur die beiden ersten Glieder der Reihe beibehält, da ω einen Bogen bezeichnet, welcher ein Bruch ist

$$\cos\lambda = \cos(\pi+\omega) = -\cos\omega = \frac{\omega^2}{2} - 1$$

oder wenn man für ω substituirt

$$\cos\lambda = \tfrac{1}{2}(\lambda-\pi)^2 - 1$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \pi\lambda + \tfrac{1}{2}\pi^2 - 1$$

Man setze die bekannte Größe

A $\quad \delta T + \cos\delta = A$, so wird

$\lambda T + \cos\lambda = A$, oder

$\lambda T + \frac{1}{2}\lambda^2 - \pi\lambda + \frac{1}{2}\pi^2 - 1 = A$ oder,

$\lambda^2 - 2\lambda(\pi - T) - 2 + \pi^2 - 2A = 0$ und hieraus

$\lambda = \pi - T \pm \sqrt{[(\pi - T)^2 + 2 - \pi^2 + 2A]}$ oder

$\lambda = \pi - T \pm \sqrt{[2 + 2A + T^2 - 2\pi T]}$ folglich

weil hier der kleinere Werth von λ nicht gesucht wird,

$$\lambda = 3{,}1416 - T + \sqrt{[2 + 2A + T^2 - 6{,}283\,T]}$$

---

*) L. Eulers, angef. Einleitung in die Analysis. 1ster Band, 134. §.

Nun ist

$$T = \mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Tgt}\,\beta = \mathrm{Sin}\,\delta \text{ und}$$

$$A = \delta T + \mathrm{Cos}\,\delta \text{ bekannt,}$$

daher läßt sich leicht daraus λ und demnächst die Länge des wasserhaltenden Bogens

$$L = R\,(\lambda - \delta)\ \mathrm{Sec}\,\alpha \text{ finden.}$$

Beispiel. Wenn nach Vitruv's Angabe *) $\mathrm{Tgt}\,\alpha = 1$ und $\mathrm{Tgt}\,\beta = \frac{3}{4}$ also $\alpha = 45°$ und $\beta = 36°\ 52'$ genommen wird, so ist

$T = \mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Tgt}\,\beta = \frac{3}{4} = \mathrm{Sin}\,\delta$ daher

$\mathrm{Sin}\,\delta = 0{,}75 = \mathrm{Sin}\ 48°\ 35'$ und

$\mathrm{Cos}\,\delta = 0{,}66153$

$\mathrm{Bög.}\,\delta = 0{,}84795$ also

$A = 0{,}84795 . \frac{3}{4} + 0{,}66153 = 1{,}29749$ daher

für $R = 1$

$\lambda = 3{,}1416 - 0{,}75 + \sqrt{[2 + 2{,}595 + 0{,}75^2 - 6{,}283 . 0{,}75]}$

$= 2{,}3916 + 0{,}6672 = 3{,}0588$

(Nach den Tafeln stimmt zu diesem Bogen ein Winkel von $175°\ 16'$)

daher ist die Länge des wasserhaltenden Bogens

$= (3{,}0588 - 0{,}8479)\ \mathrm{Sec}\ 45° = 3{,}1266.$

(Wird der Werth von λ in die Gleichung

$$\lambda T + \mathrm{Cos}\,\lambda = 1{,}2975 \text{ gesetzt,}$$

so erhält man, weil

$$\mathrm{Cos}\ 175°\ 16' = -\,0{,}9966 \text{ ist}$$

$$3{,}0588 . \tfrac{3}{4} - 0{,}9966 = 1{,}2975$$

wie erfordert wird.)

262. §.

Die vorgetragenen Untersuchungen beziehen sich sämmtlich auf Röhren von unendlich kleinen Durchmessern, und lassen sich nur bei sehr engen Röhren, mit Beiseitesetzung der Adhäsion anwenden. Da mir nun bis jetzt keine Untersuchungen über Schnecken von beträchtlicher Weite bekannt sind, so gebe ich nachstehende Auseinandersetzung über die Wasserschnecken mit Windungen, deren

*) Marcus Vitruvius Pollio angef. Baukunst, 2. Bd. 10. Buch, 11. K. S. 265.

senkrechte Durchschnitte Rechtecke von beträchtlicher Größe sind, als einen Versuch, die Theorie dieser Maschinen der Ausübung näher zu bringen.

T. IV. F. 36. Es sei A'BCD (Figur 36) derjenige Cylinder, dessen Umfang durch die centrische Linie ALSFl' der Windung geht; A der Schwerpunkt der Einflußöfnung aa'a'' (die sich der Leser von sich abgekehrt denken muß), und aB'C'D' der Umfang der Spindel, die unter dem Winkel CBE $= \beta$ gegen den Horizont EE' geneigt ist. Die Grundfläche a'vba', welche von der Bekleidung der Schnecke begrenzt wird, geht hier nicht durch den Schwerpunkt der Einflußöfnung, sondern durch den äußern Rand aa' derselben. Durch den höchsten Punkt L (259. §.) in der centrischen Linie, lege man eine Ebene TtLt'', welche erweitert in die Axe der Spindel fällt, und von dem Umfange der Windung begränzt wird. Weil diese Ebene in den ersten Quadranten, von A' an gerechnet, fällt, so wird sich ihr niedrigster Punkt am Umfange der Spindel in t befinden; durch diesen Punkt lege man eine Horizontalebene tS, welche die centrische Linie der ersten Windung in den Punkten S und l' schneidet, so würde bei einer Röhre von unendlich kleiner Weite, der Anfang des wasserhaltenden Bogens in L seyn (258. §.). Im gegenwärtigen Falle aber wird das Wasser bis zum Punkte t nach A' zu ablaufen, und in der Horizontalfläche tS stehen bleiben, daher man ohne Nachtheil annehmen kann, daß sich der Anfang des wasserhaltenden Bogens um die Länge LS verkürze, so daß man SFl' als die wahre Länge dieses Bogens erhält.

a Man setze die Höhe der Windungsweite a'a'' $=$ a, die
b Breite aa' derselben $=$ b, den Halbmesser für die centrische Linie, OA' $=$ R, und den zum Punkte S in der Grundfläche gehörigen Bogen A'V für den Halbmesser 1, $= \delta + \sigma$, so ist

$$\text{Bogen } A'V = R\,(\delta + \sigma) \text{ und}$$
$$\text{Bogen } QV = R \,.\, \sigma$$

weil (259. §.) der Bogen A'Q $= R \,.\, \delta$ ist.

Zieht man nun TQ, tq auf die Grundfläche, und TX, tx, SW, sw auf die Horizontalebene EE' senkrecht, so ist (256. §.)

$$TX = R \cdot \delta \cdot Tgt\,\alpha \cdot Sin\,\beta + R\,(1 + Cos\,\delta)\,Cos\,\beta$$

Von t sei tu auf TX senkrecht, so ist

$$tx = TX - Tu$$

wo Tu der vertikale Abstand der Punkte T und t von einander ist. Man denke sich (Figur 37) die vertikale rechtwinkliche Ebene Ao'od, welche in o' auf der Horizontalfläche ee' stehet; der Kreisausschnitt Ao'T sei auf Ao'o senkrecht, und in demselben die Punkte T, t so gelegen wie Figur 36, dergestalt, daß die Fläche Ao'od mit einem Theile der Fläche A'OO'd (Fig. 36) übereinkommt. Aus T, t ziehe man TT' und tt' auf Ao' senkrecht, so sind diese Linien horizontal und t', T' liegen eben so hoch über ee' wie t, T und wei $\angle$ Ao'T $= \delta$, so ist T.IV. F.37.

$$T't' = Tt \cdot Cos\,\delta$$

Man ziehe T'u' vertikal und t'u' horizontal, ist nun $<$ eo'o $= \beta$, so wird $<$ t'T'u' $= \beta$, daher

$$T'u' = T't'\,Cos\,\beta = Tt \cdot Cos\,\delta\;Cos\,\beta$$

Es ist aber T'u' der vertikale Abstand der Punkte T und t (da TT' und tt' in einerlei Horizontale liegen) und weil Tt $= \frac{1}{2}$ b, so ist dieser Abstand

$$= \tfrac{1}{2}\,b\;Cos\,\delta\;Cos\,\beta$$

daher auch (Figur 37)

$$Tu = \tfrac{1}{2}\,b\;Cos\,\delta\;Cos\,\beta$$

folglich

$$tx = R\,\delta\;Tgt\,\alpha\;Sin\,\beta + R\,(1 + Cos\,\delta)\;Cos\,\beta - \tfrac{1}{2}\,b\,Cos\,\delta\,Cos\,\beta$$

Ferner ist (256. §.)

$$sw = R\,(\delta + \sigma)\;Tgt\,\alpha\;Sin\,\beta + R\,[1 + Cos\,(\delta + \sigma)]\;Cos\,\beta$$

und wenn ss' auf SW senkrecht gezogen wird, so ist $<$ Sss' $= \beta$ also Ss' $= \frac{1}{2}$ a Sin β daher

$$SW = sw + Ss' \text{ oder}$$

$$SW = R\,(\delta + \sigma)\;Tgt\,\alpha\,Sin\,\beta + R\,[1 + Cos\,(\delta + \sigma)]\;Cos\,\beta + \tfrac{1}{2}\,a\,Sin\,\beta$$

Der Punkt S liegt mit t in einerlei Horizontalebene, daher ist

$$SW = tx$$

Setzt man beide Werthe einander gleich, dividirt durch R $\mathrm{Cos}\,\beta$, und anstatt $\mathrm{Tgt}\,\alpha\;\mathrm{Tgt}\,\beta$, nach 259. §. $\mathrm{Sin}\,\delta$ gesetzt, gibt nach gehöriger Abkürzung

$$\sigma\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}(\delta+\sigma) = \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R} - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R}$$

und es kommt darauf an, aus dieser Gleichung σ zu entwickeln.

In denjenigen Fällen, wo $\delta+\sigma$ nicht viel von $\frac{1}{2}\pi$ oder einem rechten Winkel verschieden ist, welche in der Ausübung am meisten vorkommen, kann man den Werth von σ auf folgende Art ohne weitläuftige Proberechnung finden. Man setze

$$\delta + \sigma = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

wo ω auch negativ seyn kann, so ist, wenn man in der vorletzten Gleichung auf beiden Seiten $\delta\,\mathrm{Sin}\,\delta$ addirt

$$\sigma\,\mathrm{Sin}\,\delta + \delta\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,(\delta+\sigma) = \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R} - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R} + \delta\,\mathrm{Sin}\,\delta$$

oder

$$\mathrm{Cos}\,\delta - \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R} - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R} + \delta\,\mathrm{Sin}\,\delta = B$$

gesetzt, gibt

$$(\delta+\sigma)\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,(\delta+\sigma) = B \text{ oder}$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi+\omega)\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,(\tfrac{1}{2}\pi+\omega) = B$$

aber $\mathrm{Cos}\,(\frac{1}{2}\pi+\omega) = -\,\mathrm{Sin}\,\omega$ daher

$$\omega\,\mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{Sin}\,\omega = B - \tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{Sin}\,\delta$$

Nun ist nach der Voraussetzung der Bogen ω nicht beträchtlich, daher weicht er nur wenig von $\mathrm{Sin}\,\omega$ ab, und es kann letzterer um so mehr statt ω in Rechnung gebracht werden, weil er noch mit $\mathrm{Sin}\,\delta$ multiplizirt und der dadurch entstehende Fehler um so geringer seyn wird. Nach dieser Voraussetzung, und wenn man die Zeichen umkehrt ist

$$(1 - \mathrm{Sin}\,\delta)\,\mathrm{Sin}\,\omega = \tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{Sin}\,\delta - B \text{ folglich}$$

$$\mathrm{Sin}\,\omega = \frac{\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{Sin}\,\delta - B}{1 - \mathrm{Sin}\,\delta}$$

Ist hieraus $\mathrm{Sin}\,\omega$ und also auch der Bogen ω gefunden, so erhält man

$$\sigma + \delta = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

Wird $\frac{\frac{1}{2}\pi\ \mathrm{Sin}\,\delta - \mathrm{B}}{1 - \mathrm{Sin}\,\delta}$ negativ, so sucht man den dazu gehörigen Bogen für einen positiven Sinus, nimmt aber alsdann

$$\sigma + \delta = \tfrac{1}{2}\pi - \omega.$$

Beispiel.

$$\mathrm{B} = 0{,}34957 \text{ und}$$
$$\mathrm{Sin}\,\delta = 0{,}24572 \text{ so ist}$$
$$\mathrm{Sin}\,\omega = \frac{1{,}57079 \,.\, 0{,}24572 - 0{,}34957}{1 - 0{,}24572} = 0{,}04827$$
$$= \mathrm{Sin}\ 2^\circ\ 46'$$
$$\text{daher } \omega = 0{,}04829$$
$$\tfrac{1}{2}\pi = 1{,}57079$$
$$\tfrac{1}{2}\pi + \omega = 1{,}61908 = \sigma + \delta$$
$$\text{Aber } \delta = 0{,}24812 \text{ folglich}$$
$$\sigma = 1{,}37096$$

(wozu ein Winkel von $78^\circ\ 33'$ stimmt.)

Anmerk. Für den Fall, daß

σ kleiner als 1 oder kleiner als 57 Grad

ist, kann man durch folgende Betrachtung einen Werth für σ erhalten:

Es ist *)

$$\mathrm{Cos}\,(\delta + \sigma) = \mathrm{Cos}\,\delta - \sigma\ \mathrm{Sin}\,\delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2\ \mathrm{Cos}\,\delta + \tfrac{1}{6}\sigma^3\ \mathrm{Sin}\,\delta + \tfrac{1}{24}\sigma^4\ \mathrm{Cos}\,\delta - \ldots.$$

behält man die drei ersten Glieder dieser Reihe bei, weil die übrigen schon merklich abnehmen, so verwandelt sich die Hauptgleichung in folgende

$$\grave{\sigma}\ \mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,\delta - \sigma\ \mathrm{Sin}\,\delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2\ \mathrm{Cos}\,\delta$$
$$= \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{\mathrm{b}\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2\mathrm{R}} - \frac{\mathrm{a}\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2\mathrm{R}}$$

und man findet, wenn die Glieder, welche sich aufheben, weggelassen werden, den Bogen

$$\sigma = \sqrt{\left[\frac{\mathrm{b} + \mathrm{a}\ \mathrm{Tgt}\,\beta\ \mathrm{Sec}\,\delta}{\mathrm{R}}\right]}$$

Für die Voraussetzung

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

erhält man durch ähnliche Betrachtungen

$$\mathrm{Cos}\,(\delta + \sigma) = \mathrm{Cos}\,(\delta + \tfrac{1}{2}\pi) - \omega\ \mathrm{Sin}\,(\delta + \tfrac{1}{2}\pi) - \tfrac{1}{2}\omega^2\ \mathrm{Cos}\,(\delta + \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$= - \mathrm{Sin}\,\delta - \omega\ \mathrm{Cos}\,\delta + \tfrac{1}{2}\omega^2\ \mathrm{Sin}\,\delta$$

---

*) L. Euler, angef. Vollständige Anleitung zur Differentialrechnung. 2ter Th. Berlin 1790. 95. §.

Diesen Werth in die Hauptgleichung S. 364 gesetzt, und $\frac{1}{2}\pi+\omega$ statt σ eingeführt, gibt ω, woraus $\sigma=\frac{1}{2}\pi+\omega$ durch nachstehenden Ausdruck gefunden wird

$$\sigma=0{,}57079+\mathrm{Cot}\,\delta-\sqrt{\left[\mathrm{Cot}\,\delta^2-\frac{b}{R}\mathrm{Cot}\,\delta-\frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{R\,\mathrm{Sin}\,\delta}-0{,}14159\right]}$$

263. §.

T.IV. F.36. Weil l′ mit t (Figur 36) in einerlei Horizontalebene liegt (262. §.), so ist in l′ das Ende der centrischen Linie des wasserhaltenden Bogens, wozu in der Grundfläche der Punkt q′ gehört. Für den wasserhaltenden Bogen SFl′ ist VBq′ der dazugehörige Bogen in der Grundfläche, und wenn man für den Halbmesser = 1 den zu A′QVBq′ ge-

λ hörigen Bogen $=\lambda$ setzt, so ist der senkrechte Abstand des Punkts l′ von der Horizontalebene EE′ oder (256. §.)

$$l'w'=R\lambda\,\mathrm{Tgt}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta+R\,(1+\mathrm{Cos}\,\lambda)\,\mathrm{Cos}\,\beta+\tfrac{1}{2}\,a\,\mathrm{Sin}\,\beta$$

Aber $l'w'=tx$

daher, wenn die hiefür gefundenen Werthe gesetzt, durch $R\,\mathrm{Cos}\,\beta$ dividirt und

$$\mathrm{Tgt}\,\alpha\,\mathrm{Tgt}\,\beta=\mathrm{Sin}\,\delta$$

(259. §.) gesetzt wird, so ist nach gehöriger Zusammenziehung

$$\lambda\,\mathrm{Sin}\,\delta+\mathrm{Cos}\,\lambda=\delta\,\mathrm{Sin}\,\delta+\mathrm{Cos}\,\delta-\frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R}-\frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R}$$

oder 262. §.

$$\lambda\,\mathrm{Sin}\,\delta+\mathrm{Cos}\,\lambda=B$$

und man findet auf eine ähnliche Art wie 261. §.

$$\lambda=3{,}1416-\mathrm{Sin}\,\delta+\sqrt{[2+2B+\mathrm{Sin}\,\delta^2-6{,}283\,\mathrm{Sin}\,\delta]}$$

Wenn nun λ und σ bekannt sind, so erhält man die Länge des wasserhaltenden Bogens

L $$L=R\,(\lambda-\sigma-\delta)\,\mathrm{Sec}\,\alpha$$

f und wenn $f=a.b$ den Inhalt vom Querschnitte einer Win-

M′ dung, und M′ den körperlichen Inhalt des wasserhaltenden Bogens bezeichnet, so ist die bei jeder Umdrehung geschöpfte Wassermenge

$$M'=f.L=f.R\,(\lambda-\sigma-\delta)\,\mathrm{Sec}\,\alpha$$

vorausgesetzt, daß bei der Schnecke der Wasserspiegel genau bis an den Normalpunkt (259. §.) reiche, die Umdrehungen nicht zu schnell geschehen, damit sich der wasserhaltende Bogen füllen kann und alles an der Maschine

›llkommen dicht sei, weil sonst ein Theil des geschöpften Wassers verloren geht.

Ist m die Anzahl der Umläufe der Spindel in einer Minute, so findet man die Wassermenge in jeder Minute m

$$M = m.f.L$$ M

und wenn t die Umlaufszeit der Spindel bezeichnet, so ist auch t

$$M = \frac{60}{t} f.L$$

Hat die Spindel mehrere Schneckengänge, so muß diese Wassermenge noch mit der Anzahl der Gänge multiplizirt werden.

Den Normalpunkt G in der Grundfläche findet man, wenn von q auf aB′ eine senkrechte Linie qG gezogen wird. T.IV. F.56. Denn offenbar, wenn der Wasserspiegel bis an den Punkt q reicht, wird sich der wasserhaltende Bogen genau füllen, und die zwischen den Wasserbogen erforderliche Luft kann eintreten, welches dadurch einleuchtend wird, wenn man sich den Punkt t in q denkt.

Weil dem Bogen aq der Winkel δ zugehört, so ist für der Spindel Halbmesser $Oa = \varrho$

$$aG = \varrho \text{ Sin.vers } \delta$$ ϱ

und weil $a'a = b$, so findet man die Entfernung des Normalpunkts G vom höchsten Punkte a′ in der Grundfläche oder

$$a'G = b + \varrho \text{ Sin.vers } \delta$$

Beispiel. Für eine Schnecke von zwei Windungen sei der Windungswinkel $\alpha = 11° 39'$, der Neigungswinkel $\beta = 50°$; der Halbmesser der centrischen Linie $R = 2{,}16$, die Höhe der Windungsweite $a = 1{,}15$ und die Breite derselben $b = 1{,}62$ Zoll, man sucht die Wassermenge, welche die Schnecke bei jeder Umdrehung ausgießt und die Lage des Normalpunkts.

$$\text{Tg}\,\alpha\ \text{Tg}\,\beta = 0{,}24572 = \text{Sin}\,\delta = \text{Sin}\ 14°\ 13'$$

$$\text{Cos}\,\delta = 0{,}96937$$

$$\text{Bogen}\,\delta = 0{,}24812$$

$$B = 0{,}96937 - 0{,}36351 - 0{,}31725 + 0{,}06096$$
$$= 0{,}54957$$

$$\lambda = 3{,}1416 - 0{,}24572 + 1{,}10252 = 3{,}99840$$

Nach 262. §. ist

$$\sigma + \delta = 1{,}61908 \text{ also}$$

$$L = \lambda - \sigma - \delta = 2{,}37932$$

daher der Inhalt eines wasserhaltenden Bogen

$$M' = 1{,}15 . 1{,}62 . 2{,}16 . 2{,}37932 . \mathrm{Sec.}\,\alpha = 9{,}776 \text{ K. Z.}$$

folglich die bei jeder Umdrehung ausgegossene Wassermenge

$$2 . 9{,}776 = 19{,}55 \text{ Kubikzoll.}$$

Für die Entfernung des Normalpunkts vom höchsten Punkte der Grundfläche findet man, weil $\varrho = R - \frac{1}{2}b = 1{,}35$

$$1{,}62 + 1{,}35 \text{ Sin.vers}\,\delta = 1{,}6613 \text{ Zoll.}$$

264. §.

Es wäre zu wünschen, daß man sehr ins Große gehende Versuche hätte, mit welchen die vorstehende Theorie verglichen werden könnte. Hennert in seiner Preisschrift*) führt zwar Versuche an, welche mit drei großen Schnecken in Holland gemacht worden sind, es fehlen aber mehrere Größen, welche auf die genaue Bestimmung der Wassermenge Einfluß haben; dabei widersprechen die Angaben auf der 82sten Seite, den auf der 84sten Seite befindlichen, und man findet nicht genau angegeben, wie tief der Mittelpunkt der Einflußöfnung unter dem Wasser gestanden hat. Diese Umstände, und noch weit mehr Erinnerungen, welche Karsten gegen diese Versuche macht, haben mich bewogen, von einer Wasserschnecke ein hölzernes Modell von beträchtlicher Größe, mit allem möglichen Fleiße, unter meiner Aufsicht verfertigen zu lassen, das in allen seinen Theilen mit derjenigen Genauigkeit vollendet ist, welche die Theorie fordert, und womit in Gegenwart des Professors Hobert nachstehende Versuche angestellt sind, bei welchen die Zeiten mit einem Sekundenpendel bemerkt wurden.

---

*) Dissertation sur la Vis d'Archimède, qui a remporté le prix de mathématique adjugé par l'académie roy. des sciences et belles-lettres de Prusse, en 1766, par M. I. F. *Hennert.* à Berlin 1767.

(Diese Piece ist mit einer andern sur la Nutrition zusammengedruckt, welche vorhergeht, wonach sich auch die angeführte Seitenzahl richtet.)

Die Schnecke war nach Art der Tonnenmühlen gearbeitet; um eine 2,7 Zoll dicke Spindel gingen 18 Windungen. Die Breite der Schneckenbretter vom Umfange der Spindel bis zur Bekleidung, oder die Breite der Windungsweite, war 1,62 Zoll, so daß der Durchmesser der Schnecke im Lichten 5,94 Zoll betrug. Die Schneckenbreter hatten eine Dicke von $\frac{1}{4}$ Zoll, und bei zwei Einflußöfnungen oder doppelten Windungen, war die Höhe einer Windungsweite 1,15 Zoll und die Höhe des Schneckenganges 2,8 Zoll.

Die Grundfläche der Schnecke wurde durch eine Kreislinie an der Umfassung der Schnecke bemerkt, die so eingetheilt war, daß dadurch ein Durchmesser der Grundfläche gleiche Abtheilungen erhielt, wodurch man jedesmal genau den Stand des Wasserspiegels gegen die Grundfläche angeben konnte, wenn der höchste Punkt des Durchmessers, der hier o ist, so stand, daß zwei zusammengehörige Punkte der Kreislinie am Umfange, in die Ebene des Wasserspiegels fielen. Die Schnecke wurde in ein sehr weites Gefäß mit Wasser unter einem Neigungswinkel von $50° = \beta$ gesetzt, und bei jedem Versuche suchte man den Wasserspiegel durch Zugießen auf einerlei Höhe zu erhalten. Glückte dieses nicht ganz, so wurde das Mittel zwischen dem anfänglichen und folgenden Wasserstande genommen und in der zweiten vertikalen Reihe der nachstehenden Tafel dergestalt bemerkt, daß die negativen Entfernungen, die Höhen des Wasserspiegels über o, die positiven Entfernungen aber, den Abstand des Wasserspiegels unter o auf dem höchsten Durchmesser der Grundfläche gemessen, anzeigen. In der dritten Reihe der Tafel befindet sich die Anzahl der beobachteten Umdrehungen der Kurbel, welche sich an der Spindel der Schnecke befand, um ein Gefäß von $\frac{1}{2}$ Kubikfuß genau mit Wasser anzufüllen. Die vierte Reihe enthält die während dieser Zeit nach einem genauen Sekundenpendel beobachteten Sekunden. Endlich ist die fünfte und sechste Reihe aus den beiden vorhergehenden berechnet, um die Versuche besser zu übersehen.

Versuche mit der Wasserschnecke.

Nro.	Entfernung vom höchsten Punkte in der Grundfläche. Zoll.	Anzahl der Umdrehungen der Kurbel.	Zeit, in der 864 Kubikzoll Wasser ausliefen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung. Kubikzoll.	Umdrehungen der Schnecke in 1 Minute.
1	— 2,5	55	146	15,7	22
2		58	85	14,9	41
3		59	71	14,6	49
4		61	72	14,1	51
5		66	53	13 1	74
6		79	30	10,9	121
[illegible]	— 1,7	60	96	14,4	54
[illegible]	— 1,4	60	98	14,4	57
[illegible]	— 1,2	[illegible]	66	14,6	49
10	— 1,1	54	75	16,0	43
11		59	64	14,6	56
12	— 1,0	56	58	15,4	58
	— 0,6	58	70	14,9	50
[illegible]	— 0,2	57	74	15,1	46
15		56	61	15,4	55
[illegible]	+ 0,1	53	64	16,3	49
17	+ 0,2	62	43	13,9	86
[illegible]	+ 0,3	60	55	14,4	68
19	+ 0,5	52	96	16,6	32
20		53	64	16,3	49
21	+ 0,8	50	94	17,3	32
22		60	50	14,4	72
23		61	48	14,1	76
24	+ 0,9	60	50	14,4	72
25		61	46	14,1	79
26	+ 1,0	51	82	16,9	37
27		56	52	15,4	64
28		57	49	15,1	70
29		58	48	14,9	72
30	+ 1,1	49	101	17,6	29
31		48	87	18,0	33
32		49	56	17,6	52
33		49	44	17,6	67
34		59	37	14,6	96
35		59	46	14,6	109
36	+ 1,2	50	62	17,3	48
37		56	46	15,4	73
38		61	46	14,1	79

Fortsetzung.

Nro.	Entfernung vom höchsten Punkte in der Grundfläche. Zoll.	Anzahl der Umdrehungen der Kurbel.	Zeit, in der 864 Kubikzoll Wasser auslaufen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung. Kubikzoll.	Umdrehungen der Schnecke in 1 Minute.
39	+ 1,3	46	33	18,8	83
40		49	29	17,6	101
41		72	36	12,0	120
42		73	36	11,8	122
43	+ 1,4	56	61	15,4	55
44		56	47	15,4	71
45		53	43	16,3	74
46		55	40	15,7	82
47	+ 1,5	54	59	16,0	83
48	+ 1,6	52	43	16,6	72
49		46	31	18,8	89
50	+ 1,7	48	51	18,0	56
51		46	46	18,8	60
52		45	57	19,2	75
53		44	51	19,6	85
54		44	27	19,6	98
55		46	25	18,8	120
56	+ 1,8	47	49	18,4	57
57		46	38	18,8	75
58		45	28	19,2	96
59		48	26	19,0	111
60		49	23	17,6	128
61	+ 1,9	48	48	18,0	60
62		48	39	18,0	74
63	+ 2,0	49	40	17,6	73
64		47	29	18,4	97
65	+ 2,1	50	24	17,3	125
66	+ 2,2	49	34	17,6	86
67		50	27	17,3	111
68		51	24	16,9	127
69		66	30	13,1	132
70	+ 2,4	84	112	10,2	45
71		51	44	16,9	69
72		50	38	17,3	79
73		54	28	16,0	116
74	+ 5,0	123	165	7,0	44

senkrechte Durchschnitte Rechtecke von beträchtlicher Größe sind, als einen Versuch, die Theorie dieser Maschinen der Ausübung näher zu bringen.

T.IV. F.36. Es sei A′BCD (Figur 36) derjenige Cylinder, dessen Umfang durch die centrische Linie ALSFl′ der Windung geht; A der Schwerpunkt der Einflußöfnung a a′ a″ (die sich der Leser von sich abgekehrt denken muß), und a B′C′D′ der Umfang der Spindel, die unter dem Winkel CBE $= \beta$ gegen den Horizont EE′ geneigt ist. Die Grundfläche a′vba′, welche von der Bekleidung der Schnecke begrenzt wird, geht hier nicht durch den Schwerpunkt der Einflußöfnung, sondern durch den äußern Rand a a′ derselben. Durch den höchsten Punkt L (259. §.) in der centrischen Linie, lege man eine Ebene TtLt″, welche erweitert in die Axe der Spindel fällt, und von dem Umfange der Windung begränzt wird. Weil diese Ebene in den ersten Quadranten, von A′ an gerechnet, fällt, so wird sich ihr niedrigster Punkt am Umfange der Spindel in t befinden; durch diesen Punkt lege man eine Horizontalebene tS, welche die centrische Linie der ersten Windung in den Punkten S und l′ schneidet, so würde bei einer Röhre von unendlich kleiner Weite, der Anfang des wasserhaltenden Bogens in L seyn (258. §.). Im gegenwärtigen Falle aber wird das Wasser bis zum Punkte t nach A′ zu ablaufen, und in der Horizontalfläche tS stehen bleiben, daher man ohne Nachtheil annehmen kann, daß sich der Anfang des wasserhaltenden Bogens um die Länge LS verkürze, so daß man SFl′ als die wahre Länge dieses Bogens erhält.

a Man setze die Höhe der Windungsweite a′a″ $=$ a, die
b Breite a a′ derselben $=$ b, den Halbmesser für die centrische Linie, OA′ $=$ R, und den zum Punkte S in der Grundfläche gehörigen Bogen A′V für den Halbmesser 1, $= \delta + \sigma$, so ist

$$\text{Bogen } A'V = R\,(\delta + \sigma) \text{ und}$$
$$\text{Bogen } QV = R \,.\, \sigma$$

weil (259. §.) der Bogen A′Q $=$ R . δ ist.

Zieht man nun TQ, tq auf die Grundfläche, und TX, tx, SW, sw auf die Horizontalebene EE' senkrecht, so ist (256. §.)

$$TX = R \,.\, \delta \,.\, \mathrm{Tgt}\,\alpha \,.\, \mathrm{Sin}\,\beta + R\,(1 + \mathrm{Cos}\,\delta)\,\mathrm{Cos}\,\beta$$

Von t sei tu auf TX senkrecht, so ist

$$tx = TX - Tu$$

wo Tu der vertikale Abstand der Punkte T und t von einander ist. Man denke sich (Figur 37) die vertikale T. IV. F. 37.
rechtwinkliche Ebene Ao'od, welche in o' auf der Horizontalfläche ee' stehet; der Kreisausschnitt Ao'T sei auf Ao'o senkrecht, und in demselben die Punkte T, t so gelegen wie Figur 36, dergestalt, daß die Fläche Ao'od mit einem Theile der Fläche A'OO'd (Fig. 36) übereinkommt. Aus T, t ziehe man TT' und tt' auf Ao' senkrecht, so sind diese Linien horizontal und t', T' liegen eben so hoch über ee' wie t, T und wei $\angle$ Ao'T $= \delta$, so ist

$$T't' = Tt \,.\, \mathrm{Cos}\,\delta$$

Man ziehe T'u' vertikal und t'u' horizontal, ist nun $<$ eo'o $= \beta$, so wird $<$ t'T'u' $= \beta$, daher

$$T'u' = T't' \,\mathrm{Cos}\,\beta = Tt \,.\, \mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,\beta$$

Es ist aber T'u' der vertikale Abstand der Punkte T und t (da TT' und tt' in einerlei Horizontale liegen) und weil $Tt = \frac{1}{2}b$, so ist dieser Abstand

$$= \tfrac{1}{2}\, b\ \mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,\beta$$

daher auch (Figur 37)

$$Tu = \tfrac{1}{2}\, b\ \mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,\beta$$

folglich

$$tx = R\,\delta\ \mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\beta + R\,(1 + \mathrm{Cos}\,\delta)\ \mathrm{Cos}\,\beta - \tfrac{1}{2}\, b\,\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\beta$$

Ferner ist (256. §.)

$$sw = R\,(\delta + \sigma)\ \mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\beta + R\,[1 + \mathrm{Cos}\,(\delta + \alpha)]\ \mathrm{Cos}\,\beta$$

und wenn ss' auf SW senkrecht gezogen wird, so ist $<$ Sss' $= \beta$ also Ss' $= \frac{1}{2}$ a Sin β daher

$$SW = sw + Ss' \text{ oder}$$

$$SW = R\,(\delta+\sigma)\ \mathrm{Tgt}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta + R\,[1 + \mathrm{Cos}(\delta+\sigma)]\,\mathrm{Cos}\,\beta + \tfrac{1}{2}\, a\,\mathrm{Sin}\,\beta$$

Der Punkt S liegt mit t in einerlei Horizontalebene, daher ist

$$SW = tx$$

Setzt man beide Werthe einander gleich, dividirt durch R Cos β, und anstatt Tgt α Tgt β, nach 259. §. Sin δ gesetzt, gibt nach gehöriger Abkürzung

$$\sigma \operatorname{Sin}\delta + \operatorname{Cos}(\delta+\sigma) = \operatorname{Cos}\delta - \frac{b \operatorname{Cos}\delta}{2R} - \frac{a \operatorname{Tgt}\beta}{2R}$$

und es kommt darauf an, aus dieser Gleichung σ zu entwickeln.

In denjenigen Fällen, wo $\delta+\sigma$ nicht viel von $\frac{1}{2}\pi$ oder einem rechten Winkel verschieden ist, welche in der Ausübung am meisten vorkommen, kann man den Werth von σ auf folgende Art ohne weitläuftige Proberechnung finden. Man setze

$$\delta + \sigma = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

wo ω auch negativ seyn kann, so ist, wenn man in der vorletzten Gleichung auf beiden Seiten δ Sin δ addirt

$$\sigma \operatorname{Sin}\delta + \delta \operatorname{Sin}\delta + \operatorname{Cos}(\delta+\sigma) = \operatorname{Cos}\delta - \frac{b \operatorname{Cos}\delta}{2R} - \frac{a \operatorname{Tgt}\beta}{2R} + \delta \operatorname{Sin}\delta$$

oder

B $$\operatorname{Cos}\delta - \frac{b \operatorname{Cos}\delta}{2R} - \frac{a \operatorname{Tgt}\beta}{2R} + \delta \operatorname{Sin}\delta = B$$

gesetzt, gibt

$$(\delta+\sigma) \operatorname{Sin}\delta + \operatorname{Cos}(\delta+\sigma) = B \text{ oder}$$

$$(\tfrac{1}{2}\pi+\omega) \operatorname{Sin}\delta + \operatorname{Cos}(\tfrac{1}{2}\pi+\omega) = B$$

aber $\operatorname{Cos}(\frac{1}{2}\pi+\omega) = -\operatorname{Sin}\omega$ daher

$$\omega \operatorname{Sin}\delta - \operatorname{Sin}\omega = B - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{Sin}\delta$$

Nun ist nach der Voraussetzung der Bogen ω nicht beträchtlich, daher weicht er nur wenig von Sin ω ab, und es kann letzterer um so mehr statt ω in Rechnung gebracht werden, weil er noch mit Sin δ multiplizirt und der dadurch entstehende Fehler um so geringer seyn wird. Nach dieser Voraussetzung, und wenn man die Zeichen umkehrt ist

$$(1 - \operatorname{Sin}\delta) \operatorname{Sin}\omega = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{Sin}\delta - B \text{ folglich}$$

$$\operatorname{Sin}\omega = \frac{\frac{1}{2}\pi \operatorname{Sin}\delta - B}{1 - \operatorname{Sin}\delta}$$

Ist hieraus Sin ω und also auch der Bogen ω gefunden, so erhält man

$$\sigma + \delta = \tfrac{1}{2}\pi + \omega.$$

Wird $\frac{\frac{1}{2}\pi \operatorname{Sin}\delta - B}{1 - \operatorname{Sin}\delta}$ negativ, so sucht man den dazu gehörigen Bogen für einen positiven Sinus, nimmt aber alsdann

$$\sigma + \delta = \tfrac{1}{2}\pi - \omega.$$

Beispiel.

$$B = 0{,}34957 \text{ und}$$
$$\operatorname{Sin}\delta = 0{,}24572 \text{ so ist}$$
$$\operatorname{Sin}\omega = \frac{1{,}57079 \,.\, 0{,}24572 - 0{,}34957}{1 - 0{,}24572} = 0{,}04827$$
$$= \operatorname{Sin} 2^{\circ}\ 46'$$
$$\text{daher } \omega = 0{,}04829$$
$$\tfrac{1}{2}\pi = \underline{1{,}57079}$$
$$\tfrac{1}{2}\pi + \omega = 1{,}61908 = \sigma + \delta$$
$$\text{Aber } \delta = \underline{0{,}24812} \text{ folglich}$$
$$\sigma = 1{,}37096$$

(wozu ein Winkel von 78° 33′ stimmt.)

Anmerk. Für den Fall, daß

σ kleiner als 1 oder kleiner als 57 Grad

ist, kann man durch folgende Betrachtung einen Werth für σ erhalten:

Es ist *)

$$\operatorname{Cos}(\delta + \sigma) = \operatorname{Cos}\delta - \sigma \operatorname{Sin}\delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \operatorname{Cos}\delta + \tfrac{1}{6}\sigma^3 \operatorname{Sin}\delta + \tfrac{1}{24}\sigma^4 \operatorname{Cos}\delta - \ldots.$$

behält man die drei ersten Glieder dieser Reihe bei, weil die übrigen schon merklich abnehmen, so verwandelt sich die Hauptgleichung in folgende

$$\sigma \operatorname{Sin}\delta + \operatorname{Cos}\delta - \sigma \operatorname{Sin}\delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \operatorname{Cos}\delta$$
$$= \operatorname{Cos}\delta - \frac{b \operatorname{Cos}\delta}{2R} - \frac{a \operatorname{Tgt}\beta}{2R}$$

und man findet, wenn die Glieder, welche sich aufheben, weggelassen werden, den Bogen

$$\sigma = \sqrt{\left[\frac{b + a \operatorname{Tgt}\beta \operatorname{Sec}\delta}{R}\right]}$$

Für die Voraussetzung

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\pi + \omega$$

erhält man durch ähnliche Betrachtungen

$$\operatorname{Cos}(\delta + \sigma) = \operatorname{Cos}(\delta + \tfrac{1}{2}\pi) - \omega \operatorname{Sin}(\delta + \tfrac{1}{2}\pi) - \tfrac{1}{2}\omega^2 \operatorname{Cos}(\delta + \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$= -\operatorname{Sin}\delta - \omega \operatorname{Cos}\delta + \tfrac{1}{2}\omega^2 \operatorname{Sin}\delta$$

---

*) L. Euler, angef. Vollständige Anleitung zur Differentialrechnung. 2ter Th. Berlin 1790. 95. §.

Diesen Werth in die Hauptgleichung S. 364 gesetzt, und $\frac{1}{2}\pi + \omega$ statt σ eingeführt, gibt ω, woraus $\sigma = \frac{1}{2}\pi + \omega$ durch nachstehenden Ausdruck gefunden wird

$$\sigma = 0{,}57079 + \mathrm{Cot}\,\delta - \sqrt{\left[\mathrm{Cot}\,\delta^2 - \frac{b}{R}\mathrm{Cot}\,\delta - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{R\,\mathrm{Sin}\,\delta} - 0{,}14159\right]}$$

263. §.

T.IV. F.36. Weil l' mit t (Figur 36) in einerlei Horizontalebene liegt (262. §.), so ist in l' das Ende der centrischen Linie des wasserhaltenden Bogens, wozu in der Grundfläche der Punkt q' gehört. Für den wasserhaltenden Bogen SFl' ist VBq' der dazugehörige Bogen in der Grundfläche, und wenn man für den Halbmesser = 1 den zu A'QVBq' gehörigen Bogen $= \lambda$ setzt, so ist der senkrechte Abstand des

λ Punkts l' von der Horizontalebene EE' oder (256. §.)

$$l'w' = R\lambda\,\mathrm{Tgt}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta + R\,(1 + \mathrm{Cos}\,\lambda)\,\mathrm{Cos}\,\beta + \tfrac{1}{2}\,a\,\mathrm{Sin}\,\beta$$

Aber $l'w' = tx$

daher, wenn die hiefür gefundenen Werthe gesetzt, durch $R\,\mathrm{Cos}\,\beta$ dividirt und

$$\mathrm{Tgt}\,\alpha\,\mathrm{Tgt}\,\beta = \mathrm{Sin}\,\delta$$

(259. §.) gesetzt wird, so ist nach gehöriger Zusammenziehung

$$\lambda\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,\lambda = \delta\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R} - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R}$$

oder 262. §.

$$\lambda\,\mathrm{Sin}\,\delta + \mathrm{Cos}\,\lambda = B$$

und man findet auf eine ähnliche Art wie 261. §.

$$\lambda = 3{,}1416 - \mathrm{Sin}\,\delta + \sqrt{[2 + 2B + \mathrm{Sin}\,\delta^2 - 6{,}283\,\mathrm{Sin}\,\delta]}$$

Wenn nun λ und σ bekannt sind, so erhält man die Länge des wasserhaltenden Bogens

L $$L = R\,(\lambda - \sigma - \delta)\,\mathrm{Sec}\,\alpha$$

f und wenn $f = a.b$ den Inhalt vom Querschnitte einer Win-

M' dung, und M' den körperlichen Inhalt des wasserhaltenden Bogens bezeichnet, so ist die bei jeder Umdrehung geschöpfte Wassermenge

$$M' = f.L = f.R\,(\lambda - \sigma - \delta)\,\mathrm{Sec}\,\alpha$$

vorausgesetzt, daß bei der Schnecke der Wasserspiegel genau bis an den Normalpunkt (259. §.) reiche, die Umdrehungen nicht zu schnell geschehen, damit sich der wasserhaltende Bogen füllen kann und alles an der Maschine

vollkommen dicht sei, weil sonst ein Theil des geschöpften Wassers verloren geht.

Ist m die Anzahl der Umläufe der Spindel in einer Minute, so findet man die Wassermenge in jeder Minute m

$$M = m . f . L$$ M

und wenn t die Umlaufszeit der Spindel bezeichnet, so ist auch t

$$M = \frac{60}{t} f . L$$

Hat die Spindel mehrere Schneckengänge, so muß diese Wassermenge noch mit der Anzahl der Gänge multiplizirt werden.

Den Normalpunkt G in der Grundfläche findet man, T. IV. F. 36.
wenn von q auf aB' eine senkrechte Linie qG gezogen wird. Denn offenbar, wenn der Wasserspiegel bis an den Punkt q reicht, wird sich der wasserhaltende Bogen genau füllen, und die zwischen den Wasserbogen erforderliche Luft kann eintreten, welches dadurch einleuchtend wird, wenn man sich den Punkt t in q denkt.

Weil dem Bogen aq der Winkel δ zugehört, so ist für der Spindel Halbmesser $Oa = \varrho$

$$aG = \varrho \text{ Sin.vers } \delta$$ ϱ

und weil $a'a = b$, so findet man die Entfernung des Normalpunkts G vom höchsten Punkte a' in der Grundfläche oder

$$a'G = b + \varrho \text{ Sin.vers } \delta$$

Beispiel. Für eine Schnecke von zwei Windungen sei der Windungswinkel $\alpha = 11° 39'$, der Neigungswinkel $\beta = 50°$; der Halbmesser der centrischen Linie $R = 2,16$, die Höhe der Windungsweite $a = 1,15$ und die Breite derselben $b = 1,62$ Zoll, man sucht die Wassermenge, welche die Schnecke bei jeder Umdrehung ausgießt und die Lage des Normalpunkts.

$$\text{Tgt } \alpha \text{ Tgt } \beta = 0,24572 = \text{Sin } \delta = \text{Sin } 14° 13'$$
$$\text{Cos } \delta = 0,96937$$
$$\text{Bogen } \delta = 0,24812$$
$$B = 0,96937 - 0,36351 - 0,31725 + 0,06096$$
$$= 0,34957$$
$$\lambda = 3,1416 - 0,24572 + 1,10252 = 3,99840$$

Nach 262. §. ist

$$\sigma + \delta = 1{,}61908 \text{ also}$$

$$L = \lambda - \sigma - \delta = 2{,}37932$$

daher der Inhalt eines wasserhaltenden Bogen

$$M' = 1{,}15 . 1{,}62 . 2{,}16 . 2{,}37932 . \text{Sec.}\,\alpha = 9{,}776 \text{ K. Z.}$$

folglich die bei jeder Umdrehung ausgegossene Wassermenge

$$2 . 9{,}776 = 19{,}55 \text{ Kubikzoll.}$$

Für die Entfernung des Normalpunkts vom höchsten Punkte der Grundfläche findet man, weil $\varrho = R - \frac{1}{2}b = 1{,}35$

$$1{,}62 + 1{,}35 \text{ Sin.vers}\,\delta = 1{,}6613 \text{ Zoll.}$$

264. §.

Es wäre zu wünschen, daß man sehr ins Große gehende Versuche hätte, mit welchen die vorstehende Theorie verglichen werden könnte. Hennert in seiner Preisschrift *) führt zwar Versuche an, welche mit drei großen Schnecken in Holland gemacht worden sind, es fehlen aber mehrere Größen, welche auf die genaue Bestimmung der Wassermenge Einfluß haben; dabei widersprechen die Angaben auf der 82sten Seite, den auf der 84sten Seite befindlichen, und man findet nicht genau angegeben, wie tief der Mittelpunkt der Einflußöfnung unter dem Wasser gestanden hat. Diese Umstände, und noch weit mehr Erinnerungen, welche Karsten gegen diese Versuche macht, haben mich bewogen, von einer Wasserschnecke ein hölzernes Modell von beträchtlicher Größe, mit allem möglichen Fleiße, unter meiner Aufsicht verfertigen zu lassen, das in allen seinen Theilen mit derjenigen Genauigkeit vollendet ist, welche die Theorie fordert, und womit in Gegenwart des Professors Hobert nachstehende Versuche angestellt sind, bei welchen die Zeiten mit einem Sekundenpendel bemerkt wurden.

---

*) Dissertation sur la Vis d'Archimède, qui a remporté le prix de mathématique adjugé par l'académie roy. des sciences et belles-lettres de Prusse, en 1766, par M. I. F. *Hennert*. à Berlin 1767.

(Diese Piece ist mit einer andern sur la Nutrition zusammengedruckt, welche vorhergeht, wonach sich auch die angeführte Seitenzahl richtet.)

Die Schnecke war nach Art der Tonnenmühlen gearbeitet; um eine 2,7 Zoll dicke Spindel gingen 18 Windungen. Die Breite der Schneckenbretter vom Umfange der Spindel bis zur Bekleidung, oder die Breite der Windungsweite, war 1,62 Zoll, so daß der Durchmesser der Schnecke im Lichten 5,94 Zoll betrug. Die Schneckenbreter hatten eine Dicke von $\frac{1}{4}$ Zoll, und bei zwei Einflußöfnungen oder doppelten Windungen, war die Höhe einer Windungsweite 1,15 Zoll und die Höhe des Schneckenganges 2,8 Zoll.

Die Grundfläche der Schnecke wurde durch eine Kreislinie an der Umfassung der Schnecke bemerkt, die so eingetheilt war, daß dadurch ein Durchmesser der Grundfläche gleiche Abtheilungen erhielt, wodurch man jedesmal genau den Stand des Wasserspiegels gegen die Grundfläche angeben konnte, wenn der höchste Punkt des Durchmessers, der hier o ist, so stand, daß zwei zusammengehörige Punkte der Kreislinie am Umfange, in die Ebene des Wasserspiegels fielen. Die Schnecke wurde in ein sehr weites Gefäß mit Wasser unter einem Neigungswinkel von $50° = \beta$ gesetzt, und bei jedem Versuche suchte man den Wasserspiegel durch Zugießen auf einerlei Höhe zu erhalten. Glückte dieses nicht ganz, so wurde das Mittel zwischen dem anfänglichen und folgenden Wasserstande genommen und in der zweiten vertikalen Reihe der nachstehenden Tafel dergestalt bemerkt, daß die negativen Entfernungen, die Höhen des Wasserspiegels ü b e r o, die positiven Entfernungen aber, den Abstand des Wasserspiegels u n t e r o auf dem höchsten Durchmesser der Grundfläche gemessen, anzeigen. In der dritten Reihe der Tafel befindet sich die Anzahl der beobachteten Umdrehungen der Kurbel, welche sich an der Spindel der Schnecke befand, um ein Gefäß von $\frac{1}{2}$ Kubikfuß genau mit Wasser anzufüllen. Die vierte Reihe enthält die während dieser Zeit nach einem genauen Sekundenpendel beobachteten Sekunden. Endlich ist die fünfte und sechste Reihe aus den beiden vorhergehenden berechnet, um die Versuche besser zu übersehen.

Versuche mit der Wasserschnecke.

Nro.	Entfernung vom höchsten Punkte in der Grundfläche. Zoll.	Anzahl der Umdrehungen der Kurbel.	Zeit, in der 864 Kubikzoll Wasser ausliefen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung. Kubikzoll.	Umdrehungen der Schnecke in 1 Minute.
1	— 2,5	55	146	15,7	22
2		58	85	14,9	41
3		59	71	14,6	49
4		61	72	14,1	51
5		66	53	13,1	74
6		79	30	10,9	121
[illegible]	— 1,7	60	66	14,4	54
[illegible]	— 1,4	60	98	14,4	37
[illegible]	— 1,2	[illegible]	66	14,6	49
10	— 1,1	54	75	16,0	43
11		59	64	14,6	56
12	— 1,0	56	58	15,4	58
[illegible]	— 0,6	58	70	14,9	50
[illegible]	— 0,2	57	74	15,1	46
15		56	61	15,4	55
[illegible]	+ 0,1	53	64	16,3	49
17	+ 0,2	62	43	13,9	86
[illegible]	+ 0,3	60	55	14,4	68
19	+ 0,5	52	96	16,6	32
20		53	64	16,3	49
21	+ 0,8	50	94	17,3	32
22		60	50	14,4	72
23		61	48	14,1	76
24	+ 0,9	60	50	14,4	72
25		61	46	14,1	79
26	+ 1,0	51	82	16,9	37
27		56	52	15,4	64
28		57	49	16,1	70
29		58	48	14,9	72
30	+ 1,1	49	101	17,6	29
31		48	87	18,0	33
32		49	56	17,6	52
33		49	44	17,6	67
34		59	37	14,6	96
35		59	46	14,6	109
36	+ 1,2	50	62	17,3	48
37		56	46	15,4	73
38		61	46	14,1	79

Fortsetzung.

Nro.	Entfernung vom höchsten Punkte in der Grundfläche. Zoll.	Anzahl der Umdrehungen der Kurbel.	Zeit, in der 864 Kubikzoll Wasser ausliefen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung. Kubikzoll.	Umdrehungen der Schnecke in 1 Minute.
39	+ 1,3	46	33	18,8	85
40		49	29	17,6	101
41		72	36	12,0	120
42		73	36	11,8	122
43	+ 1,4	56	61	15,4	55
44		56	47	15,4	71
45		53	43	16,3	74
46		55	40	15,7	82
47	+ 1,5	54	59	16,0	83
48	+ 1,6	52	43	16,6	72
49		46	31	18,8	89
50	+ 1,7	48	51	18,0	56
51		46	46	18,8	60
52		45	37	19,2	73
53		44	31	19,6	85
54		44	27	19,6	98
55		46	33	18,8	120
56	+ 1,8	47	49	18,4	67
57		46	38	18,8	73
58		45	28	19,2	96
59		48	26	18,0	111
60		49	23	17,6	128
61	+ 1,9	48	48	18,0	60
62		48	39	18,0	74
63	+ 2,0	49	40	17,6	73
64		47	29	18,4	97
65	+ 2,1	50	24	17,3	125
66	+ 2,2	49	34	17,6	86
67		50	27	17,3	111
68		51	24	16,9	127
69		65	30	13,1	132
70	+ 2,4	84	112	10,2	45
71		51	44	16,9	69
72		50	38	17,3	79
73		54	28	16,0	116
74	+ 3,0	123	165	7,0	44

Als bei dem Wasserstande — 1,5 Zoll die Kurbel so schnell umgedreht wurde, daß 56 Umdrehungen in 23 Sekunden, oder in der Minute 146 Umdrehungen erfolgten, so hörte der Ausfluß des Wassers auf. Eben dies erfolgte bei einem Wasserstande von + 1,3, wenn die Schnecke in einer Minute 150 Umläufe machte.

Aus den vorstehenden Versuchen ergibt sich, daß es für einen jeden Wasserstand in Bezug auf die Grundfläche der Schnecke, eine Geschwindigkeit gibt, bei welcher die größte Wassermenge für diesen Wasserstand erhalten wird. Als der Wasserspiegel 1,7 Zoll unter dem höchsten Punkte der Grundfläche stand, war bei 85 und 98 Umdrehungen in der Minute, die größte Wassermenge unter allen Versuchen auf eine Umdrehung

19,6 Kubikzoll.

Nach dem im vorigen §. berechneten Beispiele gibt die Theorie für diesen Fall

19,55 Kubikzoll;

welches eine unerwartete Uebereinstimmung ist.

In Absicht des Normalpunkts gibt die Theorie nach dem vorigen §. 1,66 Zoll und die Versuche geben 1,7 Zoll, welches so genau wie möglich stimmt.

Hiedurch wird es aber eben so wie 259. §. bei den kleinen Versuchen mit der gläsernen Schnecke einleuchtend, wie wichtig es sey, daß das Wasser gegen den Normalpunkt stehe, und man kann sich hieraus sehr gut erklären, wie es möglich war, daß die Schnecken in so üblen Ruf gekommen sind und man statt ihrer, lieber die unvollkommnern Wasserschrauben wählte, weil man bei erstern die Stellung des Wasserspiegels gegen den Normalpunkt vernachlässigte, worauf man bei letztern nicht Rücksicht zu nehmen hat.

265. §.

Um auch in Absicht der Wasserschraube einige Versuche anzustellen und die vorhergehenden allgemeinen Untersuchungen mit den Erfahrungen zu vergleichen, konnte man sich keines so großen Modells wie bei der Wasser-

schnecke bedienen, sondern es mußte hiezu ein kleineres sehr genau gearbeitetes Modell benutzt werden, welches sich bei der Königl. Bauakademie befindet, drei Gänge hat, und mit einem Vorgelege versehen ist, wodurch auf zwei Umdrehungen der Kurbel drei Umdrehungen der Schnecke kommen.

Die Abmessungen dieses Modells sind folgende: Durchmesser der ganzen Schraube $2\frac{1}{8}$ Zoll; Dicke der Spindel $\frac{7}{8}$ Zoll; Breite der Schraubenbreter oder Breite der Windung $\frac{7}{8}$ Zoll; Höhe der Windungsweite $\frac{7}{8}$ Zoll; Dicke der Schraubenbreter etwa $\frac{1}{8}$ Zoll; Höhe des Schraubenganges 3 Zoll; ganze Länge der Schraube 18 Zoll.

Der Untertheil der Schraube wurde in ein Behältniß mit Wasser so gestellt, daß immer wenigstens eine Windung sich unter dem Wasser befand, und die Schraubenaxe hatte in allen Versuchen gegen den Wasserspiegel, eine Neigung von 30 Grad $= \beta$. Das Gefäß, in welchem das geschöpfte Wasser aufgefangen wurde, enthielt genau 200 Kubikzolle; die verflossene Zeit ist mittelst eines Sekundenpendels gezählt.

No. der Versuche.	Umdrehungen der Kurbel.	Zeit, in welcher 200 K. Z. Wasser ausliefen. Sekunden.	Wassermenge bei einer Umdrehung der Schraube. Kubikzoll.	Umläufe der Schraube in 1 Minute.
1	124	260	1,07	43
2	80	137	1,66	52
3	49	49	2,72	90
4	45	40	2,96	101
5	40	29	3,33	124
6	37	21	3,60	159
7	38	18	3,51	190
8	39	18	3,42	195
9	44	18	3,02	220
10	51	17	2,61	270
11	150	42	0,89	321

Bei sehr wenig Umdrehungen in einer Minute wurde gar kein Wasser zum Auslaufen gebracht, obgleich der

Spielraum zwischen dem Kumm und den Schraubenbrettern äußerst geringe und alles gut cylindrisch abgedreht war. Man konnte die Anzahl der Umdrehungen der Kurbel bis auf 10 in 32 Sekunden vermehren, und erhielt noch kein Wasser, bei einer wenig größern Geschwindigkeit fing dasselbe aber an, tropfenweise auszufließen. Hiernach läßt sich annehmen, daß die Schraube bei 28 Umdrehungen in der Minute noch kein Wasser gibt.

In der vorstehenden Tafel sind die beiden letzten vertikalen Reihen aus den nebenstehenden Beobachtungen berechnet, wobei zu bemerken ist, daß zwei Umdrehungen der Kurbel auf drei Umläufe der Schraube kommen. Auch geht daraus hervor, daß die größte Wassermenge erhalten wird, wenn die Schraube in der Minute etwa 159 Umläufe macht, und daß mehr oder weniger Umläufe eine geringere Wassermenge geben, welches sich auch leicht erklären läßt, weil im ersten Falle das Wasser nicht schnell genug aus dem Sumpfe folgen kann, im letzten Falle aber zu viel Wasser während einer Umdrehung durch den Spielraum verloren geht.

266. §.

Um eine Vergleichung anzustellen, wie die Theorie 263. §. mit diesen Erfahrungen bei der Wasserschraube übereinstimmt, kann nachstehende Berechnung dienen.

Es ist $R = a = b = \frac{7}{8}$ Zoll

$$\alpha = 28^\circ\ 37'$$
$$\beta = 30^\circ$$
$$T = 0{,}31500 = \sin\delta = \sin 18^\circ\ 22'$$
$$\cos\delta = 0{,}94906$$
$$\text{Bogen}\,\delta = 0{,}32055$$
$$B = 0{,}94906 - 0{,}47453 - 0{,}28867 + 0{,}10097$$
$$= 0{,}28683$$
$$\lambda = 3{,}1416 - 0{,}31500 + \sqrt{0{,}69375}$$
$$= 3{,}65952$$
$$\sin\omega = \frac{0{,}20796}{0{,}68500} = 0{,}30359 = \sin 17^\circ\ 40'$$

also $\omega = 0{,}30833$ daher

$$\sigma + \delta = 1{,}57079 + 0{,}30833 = 1{,}87912$$

$$L = \lambda - \sigma - \delta = 1{,}78040$$

also die auf jeden Gang kommende Wassermenge

$$M' = \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot 1{,}7804 \cdot \operatorname{Sec} \alpha = 1{,}3587 \text{ Kubikzoll}$$

folglich kommen auf jede Umdrehung

$$3 \cdot 1{,}3587 = 4{,}076 \text{ Kubikzoll.}$$

Die gesammte Wassermenge, welche nach der Berechnung mittelst dreier Gänge gehoben wird, vorausgesetzt, daß kein Wasser durch den Spielraum verloren geht, ist daher 4,076 Kubikzoll, die Erfahrung gibt 3,6 Kubikzoll; weßhalb durch die Spielräume 0,476 Kubikzoll Wasser bei jeder Umdrehung verloren gehen.

Um diesen Wasserverlust einigermaßen in Rechnung zu bringen, kann man folgende Schlüsse machen. Bei 28 Umdrehungen in 60 Sekunden gibt die Schraube noch kein Wasser, es muß also bei jeder Umdrehung in $\frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ Sekunden die gehobene Wassermenge $= 4{,}076$ Kubikzoll verloren gehen. Für die größte Wassermenge werden 159 Umdrehungen in 60 Sekunden erfordert, also erfolgt eine Umdrehung in $\frac{60}{159} = \frac{20}{53}$ Sekunden. Wenn nun bei einer Umdrehung in $\frac{15}{7}$ Sekunden 4,076 Kubikzoll Wasser verloren gehen, so wird in $\frac{20}{53}$ Sekunden die Wassermenge $\frac{7}{15} \cdot \frac{20}{53} \cdot 4{,}076 = 0{,}717$ Kubikzoll ablaufen. Wird diese zu der ausgeflossenen Wassermenge hinzugesetzt, so gibt

die Erfahrung 4,317 Kubikzoll,
die Theorie 4,076 Kubikzoll,

welches auch hier eine ziemliche Uebereinstimmung ist, daher mit Rücksicht auf den Spielraum bei Schrauben, die allgemeinen Ausdrücke 262. und 263. §. sowohl auf Wasserschnecken als auf Wasserschrauben anwendbar sind.

Es ist zu merken, daß sonst bei den Schrauben der Wasserverlust nach Verhältniß der gehobenen Wassermenge weit größer ist, weil sich bei großen Maschinen selten die Genauigkeit wie bei einem Modelle erhalten läßt. Auch schlossen die Schraubengänge bei dem Modell so dicht an den Kumm, daß ein Klemmen entstand und zur Ueber-

wältigung desselben eine merkliche Kraft verwandt werden mußte. Mit einem andern Modell, welches zwar einen geringen Spielraum hatte, und wo die Schraube ohne Reibung am Kumm umgedreht werden konnte, wurden ebenfalls Versuche angestellt, und man fand den Wasserverlust beinahe dem vierten Theile der zu hebenden Wassermenge gleich.

267. §.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen geht so viel hervor, daß bei einem unveränderlichen Wasserstande des Sumpfs, unter übrigens gleichen Umständen, die Wasserschnecke auf alle Weise der Wasserschraube vorzuziehen ist, so bald nur der Wasserspiegel gegen den Normalpunkt der Schnecke stehet. Denn unter gleichen Umständen verursacht die stärkere Spindel der Schraube, und noch mehr die beträchtliche Reibung der Schraubenbretter am Kumm, einen bedeutenden Widerstand, auch geht noch ein ansehnlicher Theil des gehobenen Wassers verloren, welches bei einer gut gearbeiteten Schnecke nicht der Fall ist.

Wäre hingegen der Wasserspiegel veränderlich und man könnte nicht die Einrichtung treffen, daß die Einflußöfnung der Schnecke verhältnißmäßig erhöhet oder erniedrigt werden könnte, so wird die Wassermenge bei der Schnecke ansehnlich vermindert, und wenn bei einer Schraube der Spielraum nicht zu groß ist, diese immer, bei einem veränderlichen Wasserspiegel, der Schnecke vorzuziehen seyn, da solche bei jeder Stellung ihres Untertheils die nöthige Wassermenge schöpfen kann und die Luft freien Zutritt hat, welches bei einer tiefstehenden Schnecke nicht der Fall ist, weil alsdann keine Luft geschöpft wird, sondern von oben nach unten treten muß, wodurch die Fortbewegung des Wassers verhindert wird. Bei der Schraube muß aber auch vorausgesetzt werden, daß ihr Normalpunkt unter dem Wasserspiegel liege; wie tief, ist gleichgültig, weil das Wasser hier gegen jede Windung gleiche Lage hat. Auch läßt sich wohl mit der Schnecke, aber nicht mit der Schraube unreines Wasser schöpfen.

Gewöhnlich stellt man die Schnecken so, daß ihre Axe mit dem Horizont einen Winkel von 45 bis 60 Grad, die Schrauben aber einen Winkel von 30 Grad einschließen. Bei einigermaßen beträchtlichen Höhen wird aber eine Spiralpumpe, welche nach Art der Tonnenmühlen mit zwei bis drei Gängen verfertigt werden kann, den Schnekken und Schrauben vorzuziehen seyn.

Eine Erweiterung der Einflußöfnung bei der Schnecke kann in so fern von Nutzen seyn, als bei einer schnellen Bewegung das Wasser leichter einfließt und weniger Contraction leidet, so wie eben dasselbe von der Wasserschraube gilt. Ich behalte es mir vor, hierüber besondere Modelle verfertigen zu lassen, damit Versuche anzustellen und solche der hiernächst folgenden Maschinenlehre beizufügen.

268. §.

Um das statische Moment zu finden, womit das in einer Windung enthaltene Wasser die Schnecke zu drehen strebt, sey P das Gewicht dieses Wassers, und man nehme in der centrischen Linie AF (Figur 38) ein sehr kleines T.IV.
Stück Mm von dem wasserhaltenden Bogen, so findet man F.38.
das Gewicht desselben

$$= \frac{P \,.\, Mm}{L}$$

Man ziehe MP mit OO′ parallel und MN vertikal, so ist die Ebene PMN mit der Ebene ABCD parallel. In ersterer sei MT auf MP senkrecht, so ist $\angle$ NMT $=$ $90° - PMN = \beta$, und das Gewicht $\frac{P \,.\, Mm}{L}$, welches vertikal nach MN wirkt, zerlegt sich nach MT $= \frac{P \,.\, Mm}{L} \operatorname{Cos}\beta$ und wirkt allein auf die Umdrehung der Schnecke.

Durch M gehe der auf der Axe OO′ senkrechte Querschnitt XY, so ist die Entfernung des Punkts M von der Ebene ABCD

$$= R \,.\, \operatorname{Sin} XO''M = R \,.\, \operatorname{Sin} BOP = PH$$

T.IV. wenn PH auf AB senkrecht gezogen ist; folglich das Mo-
§.38. ment des Drucks nach MT

$$= \frac{P \cdot Mm}{L} \operatorname{Cos}\beta \cdot PH$$

Aber wenn pr auf PH senkrecht ist, so verhält sich

$$Pp : pr = PO : PH \text{ also}$$

$$PH = \frac{PO \cdot pr}{Pp} = \frac{R \cdot Hh}{Pp}$$

Weiter ist

$$Mn = Mm \cdot \operatorname{Cos}\alpha = Pp, \text{ also}$$

$$PH = \frac{R \cdot Hh}{Mm \cdot \operatorname{Cos}\alpha}$$

daher das Moment für den kleinen Bogen Mm

$$= \frac{P \cdot Mm}{L} \operatorname{Cos}\beta \cdot \frac{R \cdot Hh}{Mm \cdot \operatorname{Cos}\alpha} = \frac{P \cdot R \operatorname{Cos}\beta}{L \cdot \operatorname{Cos}\alpha} \cdot Hh$$

Ist nun der wasserhaltende Bogen von S bis M in lauter solche kleine Stücke oder Elemente wie Mm getheilt, so findet man von jedem andern Elemente M'm' das statische Moment seines Gewichts

$$= \frac{P \cdot R \operatorname{Cos}\beta}{L \operatorname{Cos}\alpha} \cdot Hh'$$

und daher die Summe aller Momente der Elemente von M bis S, oder das statische Moment des ganzen Bogens MS =

$$\frac{P \cdot R \operatorname{Cos}\beta}{L \cdot \operatorname{Cos}\alpha} \left[Hh' + h'h'' + h''h''' + \ldots\right] = \frac{P \cdot R \operatorname{Cos}\beta}{L \cdot \operatorname{Cos}\alpha} \cdot KH$$

$$= \frac{P \cdot R \operatorname{Cos}\beta}{L \operatorname{Cos}\alpha} \left[\operatorname{Sin.vers} \frac{AP}{R} - \operatorname{Sin.vers} \frac{AV}{R}\right] R$$

folglich, wenn das ganze Moment, mit welchem der wasserhaltende Bogen SMFI' die Schnecke zu drehen strebt, $= \mu$ gesetzt wird, so ist

$$\mu = \frac{P \cdot R^2 \operatorname{Cos}\beta}{L \cdot \operatorname{Cos}\alpha} \left[\operatorname{Sin.vers} \frac{APBq'}{R} - \operatorname{Sin.vers} \frac{AV}{R}\right]$$

Aber

$$\operatorname{Sin.vers} \frac{APBq'}{R} - \operatorname{Sin.vers} \frac{AV}{R} = \operatorname{Sin.vers} \lambda - \operatorname{Sin.vers} (\delta + \sigma)$$

$$= (1 - \operatorname{Cos}\lambda - [1 - \operatorname{Cos}(\delta + \sigma)] = \operatorname{Cos}(\delta + \sigma) - \operatorname{Cos}\lambda$$

Nach 262. §. ist ferner

$$\operatorname{Cos}(\delta + \sigma) = \operatorname{Cos}\delta - \frac{b \operatorname{Cos}\delta}{2R} - \frac{a \operatorname{Tgt}\beta}{2R} - \sigma T$$

und nach 263. §.

$$\mathrm{Cos}\,\lambda = \delta T + \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\delta}{2R} - \frac{a\,\mathrm{Tgt}\,\beta}{2R} - \lambda T \text{ daher}$$

$$\mathrm{Cos}\,(\delta+\sigma) - \mathrm{Cos}\,\lambda = (\lambda - \delta - \sigma)\ \mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Tgt}\,\beta$$

oder 263. §.

$$= \frac{L}{R}\ \frac{\mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Tgt}\,\beta}{\mathrm{Sec}\,\alpha}$$

folglich das gesuchte Moment

$$\mu = \frac{P\,.\,R^2\ \mathrm{Cos}\,\beta}{L\,.\,\mathrm{Cos}\,\alpha}\,.\,\frac{L}{R}\ \frac{\mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Tgt}\,\beta}{\mathrm{Sec}\,\alpha}$$

$$= P\,.\,R\ \mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\beta$$

und weil $P = \gamma\,.\,L\,.\,f$, so erhält man das statische Moment des wasserhaltenden Bogens, oder

$$\mu = \gamma\,.\,R\,.\,L\,.\,f\,.\ \mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\beta \text{ oder 263. §.}$$

$$= \gamma R^2\ (\lambda - \sigma - \delta)\ f\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\beta$$

und wenn t die Umlaufszeit der Spindel, und M die Wassermenge, welche die Schnecke in jeder Minute ausgießt, bezeichnet, so ist nach 263. §.

$$\mu = \frac{\gamma}{60}\ R\,.\,M\,.\,t\ \mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\beta$$

269. §.

Es läßt sich leicht einsehen, daß bei der Wasserschnecke ebenfalls das Cartesianische Grundgesetz der Statik Statt findet, nach welchem sich die Kraft zur Last, wie der Weg der Last zum Wege der Kraft verhält. Denn man setze, daß c die Entfernung der Schraubengänge von einander bezeichne, so ist

$$e = \pi R\ \mathrm{Tgt}\,\alpha$$

daher ist das Wasser bei einer Umdrehung der Schraube um die Höhe

$$e\ \mathrm{Sin}\,\beta = \pi R\ \mathrm{Tgt}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\beta$$

gestiegen, welches der Weg der Last P ist.

Die Kraft V sei in der Entfernung R′ von der Axe der Schraube angebracht, so ist für eine Umdrehung der Schraube

$$2\pi R'$$

der Weg der Kraft, und $R'V$ ihr Moment. Aber $\mu = PR\ Tgt\alpha\ Sin\beta$ (268. §.), also

$$PR\ Tgt\alpha\ Sin\beta = R'V, \text{ daher}$$

$$P : V = 2\pi R' : 2\pi R\ Tgt\alpha\ Sin\beta$$

wie oben.

Mehreres über die archimedische Wasserschnecke findet man in nachstehenden Schriften:

Pitot, Théorie de la Vis d'Archimède, avec le calcul de l'effet de cette machine. Mémoires de l'académie des sciences, année 1736. p. 238 etc. à Amsterd. 1740.

D. *Bernoulli*, Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii. Argentor. 1738. p. 183 etc.

L. *Euler*, de cochlea Archimedis. Comment. Nov. Petrop. T. V. ad An. 1754 et 1755. p. 295 etc.

J. F. Hennert, angeführte Preisschrift.

Karsten, angef. Lehrbegrif, 6ter Theil. 26. und 27ster Abschnitt. S. 60 u. f.

Langsdorf, angef. Hydraulik, 28. Kap. S. 557 u. f.

Woltmann, angef. Beiträge. 4ter Band. S. 214 u. f.

Ueber den Bau der Wasserschnecke findet man Nachricht in:

Vitruvius angef. Baukunst, 2ter Band, 10tes Buch, 11. Kap. S. 265 u. f.

Leupold, Theatrum Machin. Hydraulic. I. Theil 67. §. S. 36.

Zwei und zwanzigstes Kapitel.

Von den Schöpf- und Wurfrädern.

---

270. §.

Unter allen Schöpfrädern (Tympani, *Tympans*, *Roues à godets*), welche bestimmt sind, das Wasser auf eine gegebene Höhe zu heben, verdient unstreitig die im neunzehnten Kapitel abgehandelte Spiralpumpe den Vorzug. Da

nun bei den Schöpfrädern, besonders wenn sie an ihrem Umfange mit Zellen oder Eimern versehen sind, die sich bei der Umdrehung auf einer gewissen Höhe ausgießen, die Berechnung der Wassermenge leicht ist, so wird es hinreichend seyn in Absicht ihrer mannichfaltigen Bauart, auf die angeführten Schriften von Leupold und Belidor zu verweisen. In Büsch's angeführtem Versuche einer Mathematik, 2ter Theil, S. 347, findet man eine Beschreibung des Bremischen Schöpfrades, welches das Wasser mittelst 16 Schöpfkasten 40 Fuß hoch hebt.

271. §.

Die Wurfräder, welche zur Austrocknung niedriger Ländereien dienen, und gewöhnlich durch ein Vorgelege mit Windmühlenflügel in Bewegung gesetzt werden, theilt man in vertikale und inclinirte. Sie sind beinahe wie Strauberräder geformt, und dienen das Wasser auf eine mäßige Höhe von etwa 4 Fuß zu heben. Liegt die Welle des Rades horizontal, so heißt dasselbe ein vertikales, bei einer schiefen Lage aber ein inclinirtes Wurfrad.

Eine Abbildung von einem vertikalen Wurfrade, in dem dazu gehörigen Gerinne, ist durch die 39ste Figur vorgestellt. An der viereckigen Welle C sind vier Kreuzarme befestiget, welche zugleich als Schaufeln dienen, und da, wo sie ins Wasser treten, eine Breite von etwa $1\frac{1}{2}$ Fuß, so wie die übrigen mittelst der Schwertbänder befestigten Schaufelbreter erhalten. Man gibt diesen Bretern eine gegen den Halbmesser etwas geneigte Lage, damit sie das gehobene Wasser leichter verläßt. Die ganze Höhe des Rades ist 15 bis 20 Fuß, welches sich in einem Gerinne bewegt, dessen Boden und Wände etwa einen Zoll Spielraum lassen. In der Figur ist die Seitenbekleidung nicht angegeben, um die Konstruktion besser zu übersehen. Der Hinterfluther AB erhält vor dem Rade eine Erweiterung durch Flügelwände, auch wohl eine Vertiefung, damit das Binnenwasser freier zufließen kann. Von der Mitte des Rades nach vorn zu, ist eine Kröpfung oder

T. IV. F. 39.

T. IV. F. 39. ein Aufleiter DB, welcher nach der Höhe des fortzuschaffenden Wassers eingerichtet wird. Vom Aufleiter kommt das Wasser in den Vorfluther BE, und im Falle das Wurfrad still steht, so ist an der Gießsäule B eine Wachtthüre, die sich, wenn das Rad im Gange ist, nach außen öfnet und beim Stillstande verschließt, so daß kein Außenwasser zurücktreten kann.

Wenn sich das Wurfrad umdreht, so wird das zwischen den beiden tiefsten Schaufeln befindliche Wasser nach dem Aufleiter gehoben, daher findet man die bei jeder Umdrehung gehobene Wassermenge, wenn der Querschnitt der eingetauchten Schaufel mit demjenigen Kreise multiplizirt wird, welcher durch die Schwerpunkte aller eingetauchten Schaufelstücke geht, vorausgesetzt, daß die Schaufeln keine Dicke hätten, und kein Spielraum zwischen der Kröpfung und den Schaufeln vorhanden wäre. Man setze, daß

a die Höhe der vertikal eingetauchten Schaufel,

b ihre Breite,

d den Spielraum zwischen Schaufel und Gerinne,

r den Halbmesser des Rades bis zum Schwerpunkte der eingetauchten Schaufel,

k den körperlichen Inhalt sämmtlicher Schaufeln so weit sie ins Wasser treten,

q den Verlust von dem gehobenen Wasser wegen des Spielraums, bei einer Umdrehung,

t die Zeit einer Umdrehung,

M' die gehobene Wassermenge bei einer Umdrehung, und

M die Wassermenge in einer Minute bezeichne;

ferner sei

H der Abstand des höchsten Punkts des gehobenen Wassers, vom Spiegel des Binnenwassers,

so läßt sich der Inhalt des Spielraums, durch welchen das gehobene Wasser zurückläuft $= (2a + b)d$ annehmen. Die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe wird nicht sehr von

H verschieden seyn, man erhält daher den Wasserverlust in einer Sekunde

$$= d\,(2a + b)\,\alpha \sqrt{H}$$

und daher in t Sekunden oder

$$q = 4{,}9\,d\,t\,(2a + b)\sqrt{H}.$$

Nun ist die Fläche der eingetauchten Schaufel $= ab$, also der Inhalt des Wasserrings, welchen man sich um das ganze Rad gelegt denken kann, $= 2\pi r \cdot ab$, daher die Wassermenge bei jeder Umdrehung oder

$$M' = 2\pi a b r - k - q$$

folglich die Wassermenge, welche in jeder Minute gehoben wird oder

$$M = \frac{60}{t}\,[2\pi a b r - k - q]$$

Der Umdrehung des Rades setzt sich eine Wassersäule von der Höhe H entgegen, deren Querschnitt man $= ab$ annehmen kann; hienach ist die zur Umdrehung des Rades am Halbmesser r erforderliche Kraft

$$P = abH \cdot \gamma.$$

Ueber vertikale Wurfräder können folgende Schriften nachgesehen werden:

J. van *Zyl*, Theatrum machinarum universale; of groot algemeen Moolen-Boek. I. Deel. Te Amsterdam 1761. p. 5. Tab. XX--XXVI.

Büsch, angef. Versuch einer Mathematik. 2ter Theil. S. 348.

Woltmann, angef. Beiträge. 4ter Bd. S. 169 u. f.

C. L. *Brunings*, Proeve eener nieuwe Theorie nopens de Uitwerking der staande Schepradmolens (1798). (Eine gekrönte Preisschrift).

272. §.

Die inclinirten Wurfräder haben gewöhnlich eine solche Stellung, daß die Wasserradswelle mit dem Horizont einen Winkel von 60 Grad einschließt; ihre Schaufeln erhalten eine solche Stellung, wie die Kämme bei einem Kammrade. Es ist nicht wahrscheinlich, daß sie Vorzüge vor den vertikalen Wurfrädern haben, vielmehr treten

bei denselben nachtheilige Umstände ein, welche bei den vertikalen Rädern nicht Statt finden. Mehreres darüber findet man in den oben erwähnten Schriften von Büsch und Woltmann, und in Belidor angeführter Architect. hydraulica, 1ter Theil, 3tes Buch, 2tes Kapitel. 856. §. u. f.

Drei und zwanzigstes Kapitel.

Von den Schaufel- und Paternosterwerken.

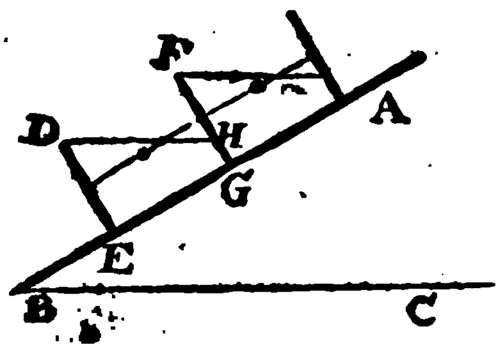
273. §.

Wegen der leichten Fortbringung werden die Schaufelwerke (*Chapelets inclinés*) immer noch sehr häufig bei Grundbauen angewandt, wenn das Grundwasser auf keine beträchtliche Höhe gehoben werden soll. Ihre Anordnung
T.V. ergibt sich aus der 40sten Figur. Mit einer rechtwinkli-
F 40. chen wasserdichten Röhre AB, welche am obern und untern Ende offen ist, wird eine eben so große Rinne CD verbunden. An beiden Enden der Röhre befinden sich in E und F eiserne Getriebe mit sechs eisernen Stäben, über welche eine doppelte Kette ohne Ende geht. In der Mitte zwischen den Gewinden dieser eisernen gleich großen Kettenglieder sind rechtwinkliche 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll dicke Breter oder Schaufeln auf die Richtung der Kette senkrecht befestiget, welche die ganze Röhre ausfüllen, und nur oberhalb und auf beiden Seiten einen Spielraum von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{3}{8}$ Zoll haben. In der obern Rinne kann dieser Spielraum größer seyn. Diese Einrichtung heißt ein Schaufelwerk, welches, wenn es bei G angelehnt wird, mittelst einer Kette oder eines Seils bei H so weit gesenkt werden kann, daß der Untertheil in das auszuschöpfende Wasser gehet. Wird nun das obere Getriebe E mittelst Kurbeln, die an der Axe desselben gewöhnlich angebracht werden, von A nach K umgedreht, vorausgesetzt, daß die Getriebestäbe genau in die Gelenke der Kettenglie-

der passen, so müssen dadurch die Schaufeln und das untere Getriebe F in Bewegung gesetzt werden, das Wasser wird in der Röhre AB steigen, durch KL ausfließen, und die ledigen Schaufeln werden in der Rinne CD nach dem Grundwasser zurückgehen. T.V. F.40.

Man macht die Schaufelwerke von 18 bis 32 Fuß lang, und gibt gewöhnlich den Schaufeln eine Höhe von 5 bis 6 und eine Breite von 12 bis 15 Zoll. Den Abstand zweier Schaufeln im Lichten nimmt man von 7 bis 8 Zoll, damit man sich vierstöckiger Getriebe bedienen kann; es wäre aber besser, den Abstand der Schaufeln von einander mehr zu vermindern, und beinahe der Höhe gleich zu machen, in welchem Falle die Getriebe sechs Stäbe erhalten müssen.

274. §.



Wenn ABC $= \beta$ der Winkel ist, welchen die Axe der Schaufeln mit dem Horizont einschließt; ferner die Höhe der Schaufeln DE $= h$, ihre Entfernung von einander im Lichten gemessen $= e$ und ihre Breite $= b$, so kann man die in jeder Zelle DEFG befindliche Wassermenge finden, wenn der Raum, welchen die Kettenglieder einnehmen, bei Seite gesetzt, und auf den Spielraum zwischen den Schaufeln und den Seitenwänden der Röhre nicht Rücksicht genommen wird.

Der Inhalt des Längenquerschnitts einer Zelle ist $= eh$; nun ist, wenn die Zelle bis DH mit Wasser angefüllt ist, $\angle$ FDH $= \beta$ also

$$FH = e \operatorname{Tgt} \beta$$

daher der Inhalt des $\triangle$ DFH $= \frac{1}{2} e^2 \operatorname{Tgt} \beta$

folglich der Inhalt vom Trapez

$$DEGH = eh - \tfrac{1}{2} e^2 \operatorname{Tgt} \beta$$

daher der Inhalt des Wasserkörpers in einer Zelle

$$M' = \frac{be}{2} (2h - e \, Tgt \beta)$$

Es sei

M die Wassermenge, welche in jeder Minute gehoben wird,

m die Anzahl der Umdrehungen des obern Getriebes in einer Minute,

n die Anzahl der Stäbe desselben,

so ist $m \cdot n$ die Anzahl der Schaufeln, welche in jeder Minute aus der Röhre kommen, daher findet man, wenn kein Wasser durch den Spielraum verloren geht, die Wassermenge in einer Minute

$$M = \tfrac{1}{2} m n b e (2h - e \, Tgt \beta)$$

Dieser Ausdruck setzt aber voraus, wenn M danach richtig berechnet werden soll, daß $e \, Tgt \beta$ nicht größer als h seyn darf, weil sonst der Punkt H unter G fällt und anstatt des obigen Ausdrucks

$$M' = \frac{b h^2}{2} Cot \beta$$

erhalten wird, welcher Fall aber nur bei einer sehr steilen Lage des Schaufelwerks oder bei großen Werthen von e vorkommt.

275. §.

Die erforderliche Kraft zur Erhebung des Wassers am Umfange des Getriebes sei $= P$, die Länge der Röhre, so weit sie über dem Wasser steht, bis zum Ausgusse $= L$, und die Dicke der Schaufeln $= d$, so ist $\frac{L}{e + d}$ die Anzahl der mit Wasser angefüllten Zellen, daher die gesammte Wassermenge, welche gehoben werden muß

$$= \frac{L}{e + d} \cdot M'$$

und deren Gewicht

$$\frac{\gamma L b e}{2(e+d)} [2h - e \operatorname{Tgt} \beta]$$

daher das respektive Gewicht, oder die erforderliche **Kraft** am Umfange des Getriebes, mit Beiseitesetzung derjenigen Hindernisse, welche in die Maschinenlehre gehören.

$$P = \frac{\gamma L b e}{2(e+d)} [2h - e \operatorname{Tgt} \beta] \operatorname{Sin} \beta$$

oder nach dem Vorhergehenden

$$P = \frac{\gamma L . M}{m . n (e+d)} \operatorname{Sin} \beta$$

Anmerk. Wenn alle Abmessungen des Schaufelwerks außer dem Neigungswinkel β gegeben sind, so hängt der größte Effekt desselben davon ab, daß die Wassermenge M mit der Höhe L $\operatorname{Sin}\beta$ multiplizirt, oder daß $(2h - e \operatorname{Tgt}\beta) \operatorname{Sin}\beta$ ein Maximum sei; dieses gibt für ein Schaufelwerk, bei welchem $h = e$ ist, $\angle \beta = 37° 38'$. Hievon in der folgenden Maschinenlehre mehr, wo eigentlich diese Untersuchungen hingehören.

276. §.

Außer den Schaufelwerken bedient man sich auch noch anderer Wasserhebungsmaschinen, die vertikal gestellt werden, und das Wasser höher als diese heben können; sie verursachen aber gewöhnlich sehr viel Reibung, sind vielen Reparaturen unterworfen und haben mehr Unbequemlichkeiten als gewöhnliche Pumpen. Hieher gehören die **Paternosterwerke** oder **Rosenkranzmühlen** (*Chapelets verticaux*), wo durch eine vertikalstehende Röhre eine Kette oder Seil ohne Ende geht, welches in gleichen Entfernungen mit kugelförmig ausgestopften Kissen oder Wulsten versehen ist, die sehr enge in die Röhre passen, und zwischen welchen das Wasser gehoben wird. Werden anstatt der Wulste lederne Scheiben genommen, so entstehet eine **Scheiben-** oder **Püschelkunst**. Eine wesentliche Verbesserung der Scheibenkünste, welche zuerst der Zimmermeister **Leiderit** angegeben und darauf ein Patent erhalten hat, besteht darin, daß zur Verminderung der Reibung

von den vielen in der Röhre befindlichen Scheiben, der Untertheil der Röhre auf eine Länge, welche etwas mehr als der Abstand zweier Scheiben beträgt, mit einer metallnen Röhre versehen wird, in welche die Scheiben genau passen; wogegen der übrige Theil der Röhre bedeutend weiter werden kann als der Durchmesser der Scheiben. Läßt man die vertikale Röhre weg und befestigt an dem Seile ohne Ende in gleichen Entfernungen, Kästen oder andere Gefäße, welche das geschöpfte Wasser auffördern können, so entstehet eine Kastenkunst.

Es wäre zu weitläuftig bei diesen verschiedenen Künsten länger zu verweilen, da ihre Berechnung, sobald die Reibung für einen bestimmten Fall ausgemittelt ist, sehr leicht wird. Die Theorie der Schaufelwerke, Paternoster- und Kastenkünste, findet man bearbeitet in:

Kästen, angef. Lehrbegrif, 6ter Theil. 38 u. 39ster Abschnitt, S. 146 u. f.

Langsdorf, angef. Hydraulik, 29. Kap. S. 580 u. f.

Ueber die Konstruktion dieser Maschinen findet man Nachricht in:

Leupold's angef. Theatrum machin. hydraulic. 5tes und 6tes Kapitel.

J. *Polley*, Theatrum machinarum universale; of keurige verzameling von Waterwerken, Schutslnysen, Waterkeeringen. II. Deel, t'Amsterdam 1737. p. 10. Tab. XXIII.

Belidor, angef. Archit. hydraul. 1. Thl. 2tes Buch. 4tes Kapitel.

Perronet, Description des projets et de la construction des ponts de Neuilli, de Mantes etc. Nouvelle édit. à Paris 1788. p. 210 et 247.

Gilly und Eytelwein angef. Wasserbaukunst, 2. Heft, S. 10 u. f.

Vier und zwanzigstes Kapitel.

Von den Stromgeschwindigkeitsmessern.

277. §.

Es gibt verschiedene Mittel, die Geschwindigkeit der Flüsse zu messen, und noch immer sucht man einfache Instrumente anzugeben, mit welchen man diese Geschwindigkeit mehr oder weniger genau finden kann. Hier sollen einige der vorzüglichsten und am meisten bekannten beschrieben werden.

Wenn es allein darauf ankommt, die Geschwindigkeit des fließenden Wassers auf seiner Oberfläche zu finden, so sieht man leicht, daß hiezu schwimmende Körper angewandt werden können, welches auch schon Mariotte im Traité du mouvement des eaux, Paris 1686. III. Part. IV. Disc. vorschlägt.

Die einfachste Vorrichtung, mittelst schwimmender Körper die Geschwindigkeit eines Flusses auf seiner Oberfläche zu beobachten, ist folgende: Man lasse sich eine 10 bis 15 Zoll dicke blecherne Kugel machen, welche außerhalb mit weißer Oelfarbe angestrichen ist, und innerhalb so lange mit Schrotkörnern oder Wasser beschwert wird, bis sie etwa nur 2 bis 3 Zoll über das Wasser hervorragt. Ferner wird ein Sekundenpendel oder eine Sekundenuhr erfordert; hat man keins von beiden, so läßt sich ein Sekundenpendel dadurch verfertigen, daß eine kleine bleierne Kugel mit einem höchst feinen Faden oder Draht dergestalt verbunden wird, daß vom Mittelpunkte der Kugel bis zum Ende des Draths, wo sich der Aufhängepunkt befindet, genau eine Länge von 3 Fuß 2 Zoll rheinländisch genommen wird (84. §.). Ist nun eine Gegend des Flusses ausgesucht, wo derselbe nicht nur zwischen geraden und

parallelen Ufern fließt, sondern auch eine ziemlich gleichförmige Tiefe hat, so mißt man parallel mit dem Stromstriche, am Ufer eine Weite AB (Figur 41) von etwa 10 bis 15 Ruthen ab, und bemerkt die Endpunkte A, B mit Pfählen. Neben diese Pfähle setzt man, senkrecht auf die Richtung des Stroms, andere in C und D, um dadurch, wenn man hinter dem Pfahl C steht, anzugeben, wenn die schwimmende Kugel in die Richtung CAA′ kommt. Eben dies gilt bei DBB′. Soll nun die Beobachtung angestellt werden, so wird die Kugel mittelst eines Kahns oder Nachens, etwa 5 Ruthen oberhalb AA′ ins Wasser gesetzt, damit sie in der Linie AA′ in derjenigen Gegend ankomme, von wo an man die Geschwindigkeit finden will. In C und D stehen Beobachter, und so bald die Kugel den Fluß so weit herunter geschwommen ist, daß sie in der Verlängerung der Pfähle CA bemerkt wird, so fängt man an die Sekunden zu zählen, und fährt damit so lange fort, bis der zweite Beobachter in D ein Zeichen gibt, daß die Kugel in der Linie BB′ angelangt sei.

T. V. F. 41.

Dieser Versuch muß verschiedenemal wiederholt werden, und es sind dabei diejenigen Zeiten ganz auszuschließen, bei welchen sich die Kugel von der geraden Richtung entfernte, oder an ein Ufer getrieben ist. Aus den gefundenen Zeitsekunden, in welchen die Kugel sich in gerader Richtung bewegte, wird das Mittel genommen und damit in die abgemessene Länge dividirt, so erhält man dadurch die Geschwindigkeit des Flusses an der Oberfläche, in derjenigen Richtung, worin sich die Kugel bewegte. Gesetzt, man hätte gefunden, daß der Weg von 10 Ruthen = 120 Fuß in einer Zeit von 54 Sekunden durchlaufen wäre, so ist die gesuchte Geschwindigkeit $= \frac{120}{54} = 2\frac{2}{9}$ Fuß.

Wenn diese Versuche gelingen sollen, so muß man sehr stilles Wetter abwarten, wo kein Wind die Oberfläche des Wassers bewegt. Nahe an den Ufern ist es beinahe unmöglich, mittelst schwimmender Körper die Geschwindigkeit zu finden, weil sie sich entweder nach der Mitte des Stroms bewegen oder an das Ufer gehen.

Noch ist zu bemerken, daß wegen der Neigung der Oberfläche des Stroms, die Kugel eine Beschleunigung erhält, in den meisten Fällen wird man aber hierauf nicht Rücksicht nehmen dürfen.

278. §.

Will man in einem Stromstriche für eine gewisse Tiefe, die aber wenigstens einige Fuß geringer seyn muß, als die kleinste Tiefe in dieser Richtung, die mittlere Geschwindigkeit ungefähr finden, so verbindet man einen Körper, welcher spezifisch leichter als Wasser ist, mit einem anderen spezifisch schwereren, vermittelst einer Stange oder blechernen Röhre, so daß der leichtere Körper noch einige Zoll über den Wasserspiegel hervorragt, und verfährt bei Bestimmung der Geschwindigkeit auf eine ähnliche Art, wie im vorhergehenden §. bei der schwimmenden Kugel gelehrt worden. Die dadurch gefundene Geschwindigkeit ist aber weder die Geschwindigkeit an der Oberfläche, noch die wahre mittlere für die ganze Tiefe, ob sie sich gleich letzterer am meisten nähert.

Anstatt des Stabes und der beiden Körper, kann man eine gleich weite verschlossene blecherne Röhre nehmen, die mit Schrotkörnern an ihrem Untertheile so lange beschwert wird, bis sie nur noch um eine gewisse Höhe über das Wasser hervorragt. Den Vorschlag, mittelst eines schwimmenden Stabes die Geschwindigkeit zu messen, hat der Pater Cabeo gethan. Mehreres und die Beschreibung verschiedener Versuche, findet man in Wiebeking und Krönke, angef. Wasserbaukunst. 1ster Band. S. 198 — 203 und S. 331 u. f.

279. §.

Die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche zu messen, kann auch ein kleines sehr bewegliches Rädchen mit sehr dünnen blechernen Schaufeln, nach Art der Strauberräder, dienen, wobei es jedoch gut ist, nach 185. §. die Schaufeln etwas schief einzusetzen. Es kommt bei dem

Gebrauche desselben alles darauf an, daß die Oberfläche des Wassers eben ist und die Schaufeln gleich tief eingetaucht bleiben. Beobachtet man nun die Zahl der Umläufe des Rades mittelst eines Sekundenpendels während einiger Minuten, und nimmt an, wie es mit Beiseitesetzung der Reibung geschehen kann, daß die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der eingetauchten Schaufeln, der Geschwindigkeit des Wassers gleich sei, so erhält man die Geschwindigkeit des Wassers, wenn die Peripherie des Rades für den Schwerpunkt der eingetauchten Schaufeln, mit der Anzahl der Umdrehungen multiplizirt, und durch die Anzahl der beobachteten Sekunden dividirt wird. Die hierdurch gefundene Geschwindigkeit des Wassers ist desto genauer, je geringer die Reibung bei der Umdrehung des Rades ist.

Man kann diesem Rädchen einen Durchmesser von etwa 18 bis 24 Zoll geben, und an der stählernen Axe desselben, eine Scheibe mit einer Schraube ohne Ende anbringen, welche in ein kleines Rädchen von etwa 30 Zähnen eingreift, so daß bei jeder Umdrehung des Schaufelrades, ein Zahn des kleinen Rades fortgeschoben wird. Ist alles leicht und gut gearbeitet, so daß die Reibung möglichst vermindert ist, so erhält man hiedurch ein leichtes Mittel die Umdrehungen des Rades zu zählen, welches außerdem bei einigermaßen beträchtlichen Geschwindigkeiten schwer hält. Man sehe J. Leupold's Theatrum machinarum generale. Leipzig 1724. 512. §. S. 152. Tab. LX.

280. §.

Zu den Instrumenten, welche eigentlich nur dazu dienen, die Geschwindigkeit eines Stroms in seiner Oberfläche zu messen, kann man auch den Stromquadranten rechnen, welcher aus einem in 90 Grade getheilten Quadranten AB (Fig. 42) bestehet, in dessen Mittelpunkte C
T.V. F.42. ein feiner mit Wachs bestrichener Faden befestiget ist, worin sich in V eine Kugel befindet, die ein größeres spezifisches

Gewicht als das Wasser hat. Um dem Quadranten die vertikale Stellung zu geben, dient das kleine Loth CE, welches auf o Grad einspielen muß. Hängt nun die Kugel V in fließendem Wasser, so wird sie von der lothrechten Linie CE abweichen, und durch den Strom um irgend einen Winkel ECV $= \alpha$ fortgestoßen werden.

Gesetzt, das Gewicht der Kugel im Wasser sei $= q$, so findet man die Kraft, welche die Kugel forttreibt $= q \operatorname{Tgt} \alpha$, vorausgesetzt, daß man bei einer unmerklichen Neigung der Oberfläche des Wassers, auf die daher entstehende Abweichung nicht Rücksicht nimmt. Setzt man nun für den Winkel α die Geschwindigkeit des Wassers $= c$, und für einen andern Winkel $\alpha' = c'$; so ist bekannt, daß sich die Kräfte des stoßenden Wassers bei verschiedenen Geschwindigkeiten, sehr nahe wie die Quadrate derselben verhalten; es ist daher

$$c^2 : (c')^2 = q \operatorname{Tgt} \alpha : q \operatorname{Tgt} \alpha' \text{ oder}$$
$$c : c' = \sqrt{(\operatorname{Tgt} \alpha)} : \sqrt{(\operatorname{Tgt} \alpha')}$$

d. h. es verhalten sich die verschiedenen Geschwindigkeiten des Wassers, wie die Quadratwurzeln von den Tangenten der Neigungswinkel bei einerlei Stromquadranten. Sind demnach bei einer bestimmten Kugel, für einige Neigungswinkel, die dazu gehörigen Geschwindigkeiten mittelst schwimmender Körper bekannt, so kann man daraus durch die vorstehende Proportion, für jeden andern Neigungswinkel, die dazu gehörige Geschwindigkeit finden.

Aus der Konstruktion des Instruments läßt sich einsehen, daß es nicht tief unter der Oberfläche des Wassers gebraucht werden kann, weil sonst das Wasser den Faden biegen wird, wodurch man einen zu großen Winkel erhält; wollte man aber anstatt des Fadens eine feste dünne Stange nehmen, so wird diese, so dünn sie auch ist, dennoch einen Stoß vom Wasser erhalten, wodurch eine Zweideutigkeit in Absicht der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser die Kugel trift, entstehet.

Weil bei großen Geschwindigkeiten eine zu leichte Kugel sehr hoch gehoben wird, und nur Winkel bis höchstens 60 Grad die erforderliche Genauigkeit geben, so kann man annehmen, daß bei Geschwindigkeiten, die nicht größer als 3 bis 4 Fuß sind, elfenbeinerne Kugeln noch hinreichen, für größere Geschwindigkeiten muß man aber hohle messingene oder zinnerne Kugeln gebrauchen, deren spezifisches Gewicht verhältnißmäßig größer ist.

Wollte man aus der Größe und dem Gewichte der Kugel, die zu jedem Neigungswinkel gehörige Geschwindigkeit finden, so setze man das Gewicht der Kugel in der Luft $= p$, so ist

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \frac{p-q}{\gamma} \text{ oder } \pi r^2 \gamma = \frac{3(p-q)}{4r}$$

Ist nun der Stoß gegen die Kugel $\frac{1}{n}$ von dem Stoße gegen ihre Projektion, so erhält man

$$\frac{1}{n}\,\frac{c^2}{4g}\,\pi r^2 \gamma = q \operatorname{Tgt} \alpha$$

oder wenn man anstatt $\pi r^2 \gamma$ den vorhin gefundenen Werth setzt

$$\frac{1}{n}\,\frac{c^2}{4g}\,\frac{3(p-q)}{4r} = q \operatorname{Tgt}\alpha \text{ oder}$$

$$c^2 = n\,\frac{16g}{3}\,\frac{q}{p-q} \operatorname{Tgt}\alpha.$$

Nun ist (176. §. III.)

$$\frac{1}{n} = 0{,}7886 \text{ also } n = 1{,}268$$

daher nach gehöriger Abkürzung die gesuchte Geschwindigkeit

$$c = 35{,}609 \sqrt{\left[\frac{q}{p-q}\, r \operatorname{Tgt}\alpha\right]}$$

Herr Prof. Schmidt hat zur Verbesserung des Stromquadranten, im ersten Bande der angeführten Allgemeinen Wasserbaukunst, Seite 205 u. f., einige Vorschläge gethan. Hieher gehören auch die schätzbaren Untersuchungen des Hrn. Ritters von Gerstner in dessen: Bemerkungen über das hydrometrische Pendel. Prag, 1819.

Mehrere Bemerkungen über dieses Instrument findet man in meiner Abhandlung:

Versuche mit dem Stromquadranten 2c. in der Sammlung die Baukunst betreffend, Jahrg. 1799, 1ter Band. S. 53 u. f.

Noch muß ich hiebei anmerken, daß mir Brünings in einem Schreiben die Erinnerung gemacht hat, daß die nahe am Kahn beobachtete Geschwindigkeit des Wassers größer als die wirkliche seyn müsse. Ungeachtet ich nun bei meinen Versuchen schon darauf Rücksicht nahm, und den Quadranten so weit wie möglich vom Kahn entfernt hielt, so habe ich dennoch ohne den Gebrauch eines Kahns, ähnliche Versuche mit Zuziehung des Bauinspektors Kypke, in dem 104. §. beschriebenen Kanal angestellt, und da die Resultate mit dem bereits angegebenen Ausdrucke übereinstimmten, so kann dies als eine neue Bestätigung dieses Ausdrucks angesehen werden.

§. 281.

Wenn außer der Geschwindigkeit an der Oberfläche eines Stroms, auch noch Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen verlangt werden, so bedient man sich zu deren Bestimmung zuweilen der **Pitotschen Röhre**, weil sich dieselbe durch ihre Einfachheit empfiehlt. Bei großen Tiefen und schnellen Strömen ist sie aber selten anwendbar, weil ihre Befestigung, wie bei vielen andern Instrumenten, alsdann mit Schwierigkeiten verbunden ist, die Röhre selbst aber von dem Wasser so sehr erschüttert wird, daß man nicht leicht sichere Beobachtungen anstellen kann.

Die Einrichtung dieses Instruments ist zuerst von **Pitot** angegeben, und in den Abhandlungen der Pariser Akademie (a. a. O. S. 195) beschrieben worden. Mit einer blechernen etwa einen Zoll weiten Röhre AB (Figur 43), T.V. welche unten eine trichterförmige Oefnung BC erhält, de- F.43. ren Axe horizontal liegt, verbinde man eine gläserne Röhre AD. Wird nun die Röhre so weit ins Wasser gestellt, daß ein Theil der gläsernen Röhre über dem Wasserspiegel hervorragt, und die Oefnung C gegen die Richtung des Stroms gestellt ist, so wird das Wasser, welches gegen die Oefnung C stößt, das Wasser in der Röhre zum Steigen bringen.

T. V. F. 45. Man setze die Geschwindigkeit des Wassers in der Tiefe EB = c, so ist (171. §.) der Stoß gegen die Oefnung C, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Höhe mit derjenigen übereinkommt, welche der Geschwindigkeit c zugehört und die man $= \frac{c^2}{4g}$ findet. Soll daher eine Wassersäule dem Stoße gegen C das Gleichgewicht halten, so muß ihre Höhe $h = \frac{c^2}{4g}$ seyn. Nun ist aber schon im stillstehenden Wasser die Röhre von B bis F angefüllt, wenn also das Wasser noch um die Höhe FG = h steigt, so ist allein die Höhe der Wassersäule FG, welche dem Stoße des Wassers gegen die Oefnung C das Gleichgewicht hält, und man findet hieraus die Geschwindigkeit des Wassers in der Tiefe FB oder

$$c = 2\sqrt{g}\sqrt{h} = 7{,}9\sqrt{h}.$$

Um die Pitotsche Röhre mit mehrerer Bequemlichkeit zu gebrauchen, und den Punkt E, bis zu welchem stillstehendes Wasser in der Röhre stehen würde, genauer anzugeben, verbindet man noch eine ganz gerade Röhre, mit der Röhre BD, und gibt dem ganzen Instrumente die Einrichtung, daß die gebogene Röhre an einem langen nach vorn zugespitzten Holze, welches nicht viel dicker als die Röhre seyn darf, in einer kleinen Vertiefung angebracht werden kann. Die Befestigung der Röhren geschieht mittelst metallner Charniere, so daß man bei größern Tiefen noch mehrere blecherne Röhren aufschieben und befestigen kann. Auch läßt sich zwischen beiden Röhren ein metallner eingetheilter Schieber anbringen, um den Abstand der Oberflächen in beiden Röhren genauer zu messen.

Der Ritter du Buat hat dieses Instrument noch dadurch verbessert, daß er die erweiterte Oefnung der Röhre mit einer dünnen Platte verschloß, und in die Mitte dieser Platte eine kleine Oefnung anbrachte. Aus den mit einem solchen Instrument angestellten Versuchen geht hervor, daß der senkrechte Stoß auf verschiedene Punkte einer Ebene kleiner wird, je weiter solche vom Mittelpunkte derselben

abstehen, daß aber die Mitte einen Druck leidet, dessen Höhe $1\frac{1}{2}$mal so groß ist als die der Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers zugehörige Höhe (Principes d'Hydr. T. II. §. 454. p. 176), man erhält daher für die Pitotsche Röhre nach der Büatschen Verbesserung

$$h = \frac{3}{2} \frac{c^2}{4g}$$

also die Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{(\tfrac{8}{3} g)} \sqrt{h}.$$

282. §.

Die hydraulische Schnellwage hat an einer Stange AB (Fig. 44), welche in den Strom gehangen wird, eine Tafel C, gegen welche das Wasser senkrecht stößt. In A ist dieses Instrument senkrecht aufgehangen, und an dem Hebelarm AD wird ein Gewicht E mit dem Stoße des Wassers gegen die Tafel C, ins Gleichgewicht gebracht. Man erhält hiedurch aber deshalb nicht die wahre Geschwindigkeit des Wassers in C, weil außer der Tafel C, auch ein Theil der Stange AB vom Wasser gestoßen wird, welches bei großen Tiefen schon beträchtliche Abweichungen gibt, es sei denn, daß man die Tafel so groß annimmt, daß der Einfluß von dem Stoße auf die Stange nicht beträchtlich ist. Schon Leupold (Theatr. machin. gener. 1724. §. 504. S. 150) hat ein solches Instrument beschrieben, welches auch von Michelotti *) geschehen ist. Brünings hat bei diesem Instrumente noch einige Verbesserungen angebracht **).

T.V. F.44.

283. §.

Eine eben so sinnreiche als einfache Einrichtung, hat

---

*) *Michelotti*, Sperimenti Idraulici principalmente diretti a confirmare la Teoria, e facilitare la Pratica del misurare le acque correnti. Vol. II. Torino 1771, p. 116 etc.

**) Brünings angef. Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers. S. 100 u. f.

der von Lorgna *) angegebene Wasserhebel, um die Geschwindigkeit des Wassers in jeder Tiefe zu messen. An
V. einem Pfahle AB (Figur 45), welcher auf dem Grunde
45. feststehet, ist eine blecherne Röhre CD befestiget, an deren Ende sich eine Rolle bei D befindet. Durch diese Röhre und über die Rolle geht ein Faden, an dessen Ende bei E eine Halbkugel befindlich ist. Das andere Ende des Fadens ist bei F an dem kurzen Arm eines Hebels FG befestiget, so daß, wenn der Strom die Halbkugel forttreibt, ein Gewicht H am langen Arme des Hebels, mit dem Stoße des Wassers ins Gleichgewicht gebracht werden kann.

Damit der in E von dem Wasser gestoßene Körper immer auf einerlei Art getroffen werde, ist es besser eine Kugel daselbst anzubringen, nur muß das spezifische Gewicht derselben dem spezifischen Gewichte des Wassers gleich seyn, damit der Faden DE beinahe in horizontaler Lage erhalten wird. Am besten ist es, den Hevelarm IG mit feinen nummerirten Zähnen zu versehen, und um zugleich die Reibung und Biegsamkeit des Fadens 'n Rechnung zu bringen, durch Versuche zu bestimmen, wie viel Gewicht in E ziehen muß, um das Gewicht H am Hebel IG im Gleichgewichte zu halten.

Hienach wird jede Nummer der Kerbe, für ein bestimmtes Gewicht H, einem gewissen Gewichte in E entsprechen, woraus sich leicht eine Tafel für die zugehörigen Geschwindigkeiten verfertigen läßt. Denn, weil diese Gewichte die Größe des Wasserstoßes gegen die bei E befestigte Kugel angeben, und die Quadratwurzeln derselben sich wie die Geschwindigkeiten des Wassers verhalten, so kann man leicht aus einigen durch Beobachtungen gefundenen Geschwindigkeiten für eine bestimmte Kugel, die übrigen berechnen. Auch lassen sich leicht größere oder kleinere Geschwindigkeiten finden, als die sind, welche das Gewicht H

---

*) A. M. *Lorgna*, Memorie intorno all' Acque correnti. Verona 1777. p. 7 etc.

angibt, weil man sich nur eines kleinern oder größern Gewichts bedienen darf.

284. §.

Die Wasserfahne des Ximenes gründet sich darauf, daß an einer beweglichen Spindel AB (Fig. 46) eine Tafel oder Fahne C befestiget ist, welche senkrecht vom Strome in jeder Tiefe gestoßen werden kann, deren Stellung gegen die Richtung des Stroms man aus dem Zeiger bei A, welcher sich über einer unbeweglichen in Grade eingetheilten Tafel drehet, bemerkt. Um die an der Spindel befestigte Scheibe bei A ist ein Faden gelegt, welcher über die Rolle D geht, an dessen Ende bei E ein Gewicht mit dem Stoße des Wassers ins Gleichgewicht gesetzt werden kann, woraus sich auf eine ähnliche Art wie bei dem Wasserhebel oder der hydraulischen Schnellwage, die Geschwindigkeiten des anstoßenden Wassers finden lassen. Dieses Instrument dient auch den schiefen Stoß des Wassers zu messen. In den angeführten Nuove Sperienze Idrauliche etc. findet man mehreres hierüber. T.V. F.46.

285. §.

Der von Brünings angegebene Geschwindigkeitsmesser oder Tachometer ist so eingerichtet, daß eine Tafel C (Figur 47) senkrecht von dem Strome nach der Richtung CD fortgestoßen wird. Am Ende der dünnen Stange CD, woran die Tafel befestiget ist, geht von D ein Faden über die Rolle E bis an den Hebelarm bei F, an dessen entgegengesetztem Arme ein Gewicht G dem Stoße des Wassers das Gleichgewicht hält. Brünings hat mit diesem Instrumente sehr lehrreiche Versuche angestellt, welche nebst der vollständigen Beschreibung und Abbildung des Tachometers sich in dessen Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers befinden. T.V. F.47.

286. §.

Der hydrometrische Flügel des Herrn Woltmann gründet sich darauf, daß der Strom zwei kleine

T.V. Flügel C,D (Figur 48) auf eine ähnliche Art, wie die Luft
F.48. die Windmühlenflügel, umtreibt. An der Flügelwelle ist eine Schraube ohne Ende in E, welche in ein gezähntes Rad F eingreift, so daß sich durch dieses Rad die Anzahl der Umdrehungen leicht bemerken läßt. Mittelst der Schnur GH ist man im Stande die Axe des Rades zu erhöhen, damit solches nur so lange in die Schraube ohne Ende greift, als man die Sekunden zählt. Aus der Anzahl der Umläufe und der Umlaufszeit läßt sich alsdann durch eine Berechnung die Geschwindigkeit des Stroms finden, und man sieht leicht, daß dieses Instrument sich in allen Tiefen, bei einer gehörigen Befestigung der Stange AB anwenden läßt. Die Beschreibung, Theorie und den Gebrauch dieses Werkzeuges findet man in der bereits angeführten Schrift des Herrn Woltmann: Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels.

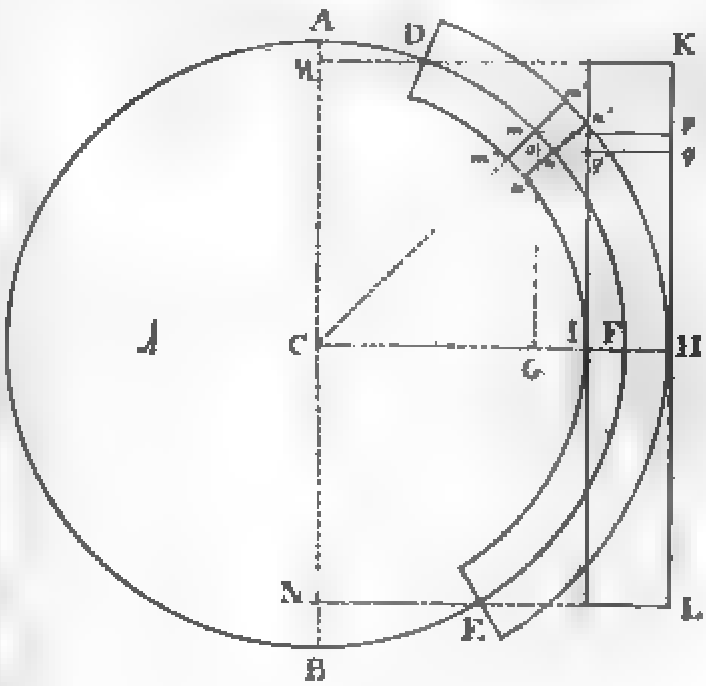
287. §.

Die Beschreibung der hydrometrischen Flasche von Grandi, des Regulators von Castelli, und mehrere Untersuchungen über Geschwindigkeitsmesser, befinden sich in Kästner's angeführter Hydrodynamik, 270 §. S. 213 u. f., und in der Brünings'schen angeführten Abhandlung.

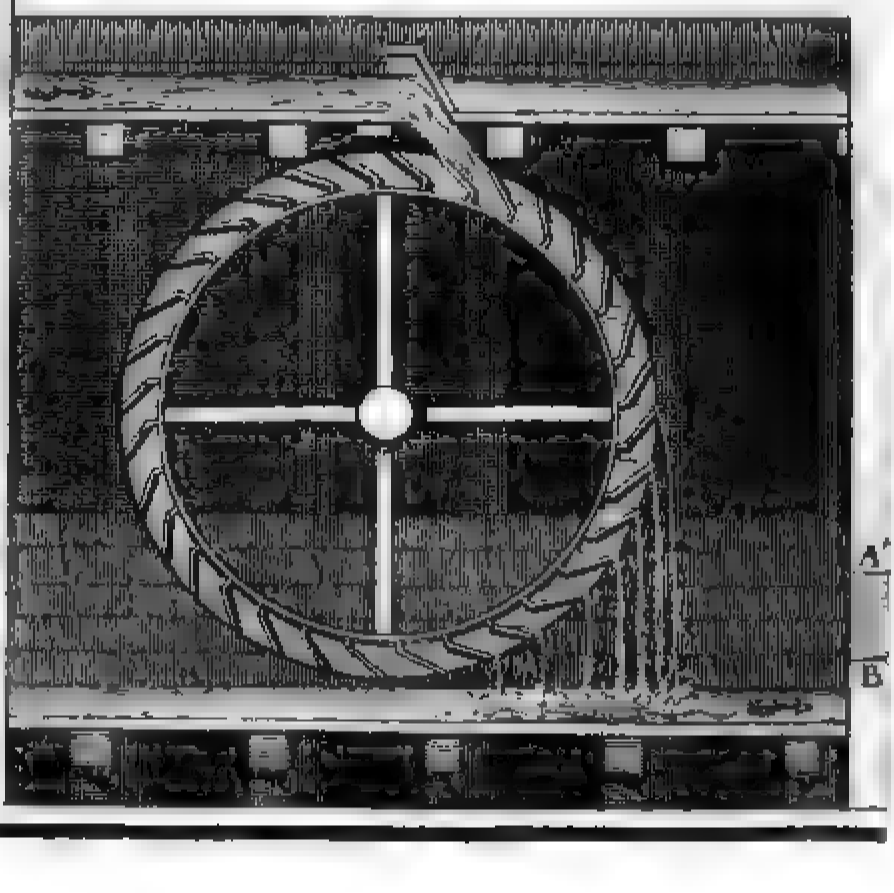
T. V. F. 48. Flügel C, D (Figur 48) auf eine ähnliche Art, wie die Luft die Windmühlenflügel, umtreibt. An der Flügelwelle ist eine Schraube ohne Ende in E, welche in ein gezähntes Rad F eingreift, so daß sich durch dieses Rad die Anzahl der Umdrehungen leicht bemerken läßt. Mittelst der Schnur GH ist man im Stande die Axe des Rades zu erhöhen, damit solches nur so lange in die Schraube ohne Ende greift, als man die Sekunden zählt. Aus der Anzahl der Umläufe und der Umlaufszeit läßt sich alsdann durch eine Berechnung die Geschwindigkeit des Stroms finden, und man sieht leicht, daß dieses Instrument sich in allen Tiefen, bei einer gehörigen Befestigung der Stange AB anwenden läßt. Die Beschreibung, Theorie und den Gebrauch dieses Werkzeuges findet man in der bereits angeführten Schrift des Herrn Woltmann: Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels.

287. §.

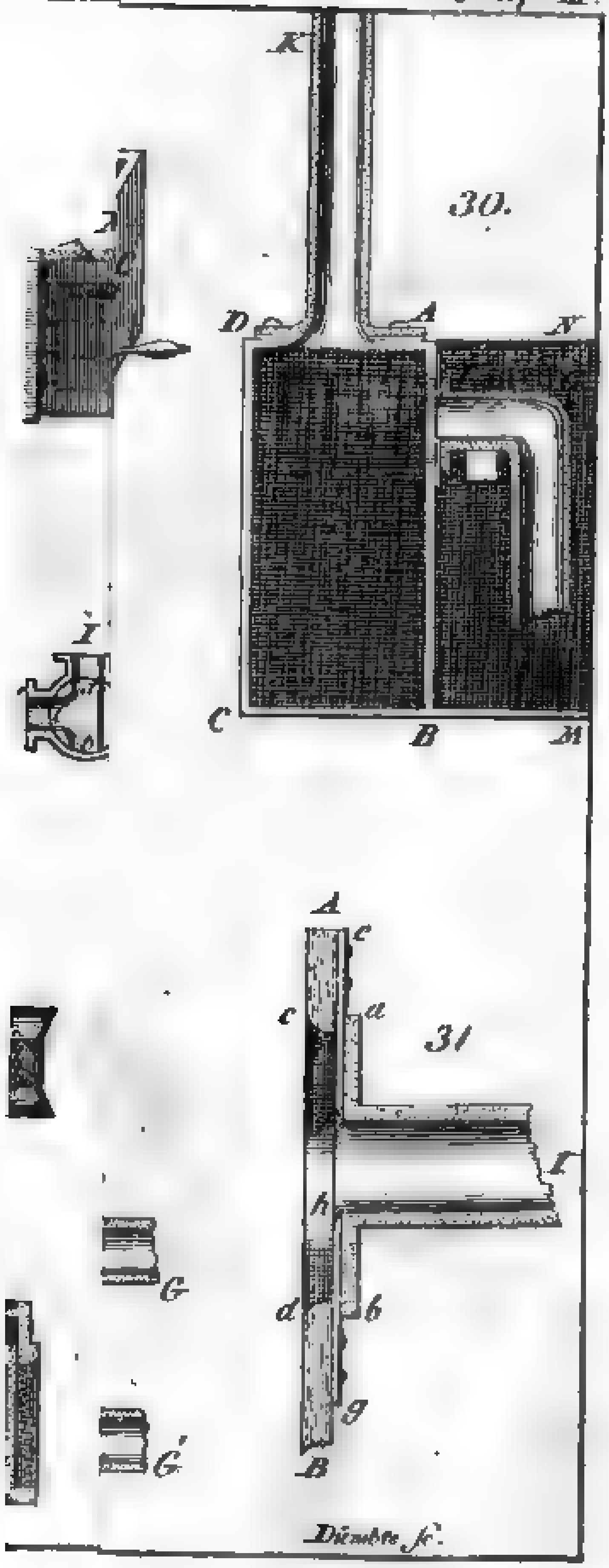
Die Beschreibung der hydrometrischen Flasche von Grandi, des Regulators von Castelli, und mehrere Untersuchungen über Geschwindigkeitsmesser, befinden sich in Kästner's angeführter Hydrodynamik, 270. §. S. 213 u. f., und in der Brünings'schen angeführten Abhandlung.



3



Taf. III.



DATE DUE			